现代数学译丛 6

应用偏微分方程

〔英〕 John Ockendon Sam Howison
Andrew Lacey Alexander Movchan 著

谭永基 程 晋 蔡志杰 译



现代数学译丛 6

应用偏微分方程

〔英〕John Ockendon　Sam Howison　Andrew Lacey　ALexander Movchan 著
谭永基　程　晋　蔡志杰 译

科 学 出 版 社
北 京

图字: 01-2006-2626 号

内 容 简 介

本书原著作者 John Ockendon 是英国牛津大学博士, 英国皇家学会 fellow, 是国际著名的"Study Group"讨论会的创始人之一. 他是著名的偏微分方程专家, 在自由边值问题、工业问题的偏微分方程模型等方面做出过重要的贡献.

本书提供了来自工业、科技和其他现实世界中的大量偏微分方程模型, 并紧密结合这些模型系统地介绍了偏微分方程的基本理论和方法. 书中包含了偏微分方程最新的研究成果, 特别是关于自由边值问题和非线性偏微分方程等内容十分新颖. 本书主要内容包括: 一阶标量拟线性方程; 一阶拟线性方程组; 二阶标量方程简介; 双曲型方程; 椭圆型方程; 抛物型方程; 自由边值问题; 非拟线性方程和其他课题.

本书适合作为数学专业研究生教材, 也可作为数学专业高年级本科生的选修课程教材. 由于它的内容结合实际, 也可供其他相关专业的研究生和科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用偏微分方程/(英)奥克顿(Ockendon, J.)等著; 谭永基, 程晋, 蔡志杰译. —北京: 科学出版社, 2008
(现代数学译丛; 6/李大潜主编)
ISBN 978-7-03-021945-9

I. 应… II. ① 奥… ② 谭… ③ 程… ④ 蔡… III. 偏微分方程 IV. O175. 2
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 068007 号

责任编辑: 王丽平 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
新 蕾 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张: 27 1/2
印数: 1—3 000 字数: 558 000

定价: 88. 00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新蕾〉)

第二版序

本书的修订曾给作者带来快乐和痛苦. 快乐来自有机会添加新的材料, 几乎所有添加的新材料都是用来使原有的内容更加统一, 结合得更紧密. 它们使读者对偏微分方程及其在现实世界中的应用间的令人惊奇的相互作用的概貌有一个很好的了解. 我们一直坚持的不能动摇的原则是: 偏微分方程式提供的信息内涵惊人地丰富, 许多偏微分方程的基本简单结构使得掌握它的人能够对他们周围的几乎任何连续过程建立定量模型.

修订的痛苦来自意识到在写第一版时由于内容的过分扩张影响了某些地方论述的准确性. 然而, 我们已经尽可能小心谨慎地作了补救. 在完成这一任务时, 我们得到了我们的同事和合作者的巨大帮助, 他们提供了有关的新材料和有益的建议. 我们也对 Alison Jones 和牛津大学出版社的同事们在本书出版的最后阶段中给予的大量帮助表示衷心感谢.

牛津: J.R.O.
S.D.H.
爱丁堡: A.A.L.
利物浦: A.B.M.
2003 年 1 月

第一版序

在 20 世纪 60 年代, Alan Tayler、Leslie Fox 和同事们在牛津大学发起了 “Study Group” 讨论会, 学术界的数学家和工业界的研究人员一起研究重要的实际问题. 不久他们就向世界表明, 数学能为许多不仅是雇用了数学家的行业研究提供无可估量的洞察力.

这一信息是 Alan 的书《应用力学中的数学方法》[43] 的主题, 书中包含许多数学建模和应用分析如何发挥作用的例子. 该书揭示了偏微分方程模型无处不在, 但是它没有从应用远景的角度对这些方程的理论作出综合的叙述. 因此, 20 世纪 80 年代, 我们策划出版一本作为补充的著作, 最初它是以非正式的讲义出现的.

此后发生了许多变化. Alan 的疾病导致作者的两次变化: 首先, Andrew Lacey 和 Sasha Movchan 参与协助, 后来在 1995 年 Alan 不幸去世之后, Sam Howison 也介入了. 此外, 在保持本书约为研究生一年级水平的同时, 本书也吸收了过去十年中许多新出现的实例和理论.

只有现在我们才能够报答 Alan Tayler 和过去十年中支持我们的人们. 尤其, 我们要感谢 June Tayler、Annabel Ralphs、Natasha Movchan 和 Hilary Ockendon, 感谢她们的宽容, 感谢 Brenda Willoughby 在关键阶段的打字帮助, 感谢牛津大学出版社的 Elizabeth Johnston 和她的同事们.

一本像这样的书若无世界各地同仁的帮助是不可能完成的, 但由于人数众多, 不能一一提及, 然而, 我们要特别感谢提出有益意见的博士后们, 他们通常是数学和现实世界交流中最重要的人物.

牛津: J.R.O.
S.D.H.
爱丁堡: A.A.L.
利物浦: A.B.M.
1999 年 2 月

《现代数学译丛》已出版书目

(按出版时间排序)

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008.3 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon Sam Howison Andrew Lacey Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译

目　录

引　言

偏微分方程是数学的中心, 不论是纯粹数学还是应用数学. 它们通常发生于因变量作为以空间和时间为自变量的连续变化的函数的数学模型中. 它们最引人注目的特性是其普适性, 这一特性使我们能够从流体和固体力学、电磁学、概率、金融到众多应用领域中找到本书中的每一个数学概念的来源. 而且这种可应用性随着现代软件适用于这种方程的离散逼近的灵活性和威力的增加日益增长. 同样戏剧性的是所有这些应用领域中方程的产生方式能容易地成为非常重要和深刻的基本数学问题的研究动机, 并且反过来从这些研究的成果中获益.

不管它是否作为一种物理现象的模型, 偏微分方程的分析有许多目的. 其中的一个主要目的是问题的 *适定性*. 我们将在第 2 章给出确切的定义, 但粗略地说, 一个偏微分方程是适定的, 若它有解, 解唯一, 且对输入数据的微小改变的响应也是很小的改变. 前两个准则是一个有意义的物理模型所要求的, 第三个准则是实验观察的基础. 考虑适定性时, 还应记得对有实际意义的问题通常不可能求得显式解, 从而逼近格式, 特别是数值解在应用中就具有特别的重要性. 因此, 适定性问题与偏微分方程科学计算的如下中心问题有紧密联系: 对一个问题给定一定精度的数据, 数值解计算的输出有多少精度? 正因为这个问题对现代定量科学的重要性, 适定性成为本书主要的数学内容.

虽然在实际情况中能推导出适定问题建模可靠的数学模型有很多, 但是那些看起来不可预测的或者对小扰动极端敏感的现象也随处可见. 例如对由 Navier-Stokes 方程刻画的包括湍流在内的流体流动和由固化方程刻画的晶体生长就是这种例子. 所以纯粹数学家和应用数学家必须准备同样面对适定和不适定偏微分方程模型. 对标量常微分方程, 若其阶至少为 3, 混沌就可能发生, 因此, 无限阶常微分方程会出现 “不可预测” 的解是毫不奇怪的. 我们也必须记住, 有些过程, 如 Brown 运动, 在分子尺度上是随机的, 而在长时间和大尺度的情况, 其许多性质可用适定的偏微分方程来建模. 然而, 由于没有篇幅来叙述混沌理论, 我们将无法讨论混沌与不适定性之间的非常有趣的关系, 虽然在第 7 章会涉及几个具有高度不可预测性态的实例. 不过, 我们会看到几个涉及如放热化学反应等虽然模型是适定的但解在发生奇异或 “破裂” 之前只在一个有限的区域中存在的例子.

计算机的出现不仅改变了数学界对偏微分方程的态度, 而且改变了大多数需要定量解的领域中研究人员对偏微分方程的态度. 强大的计算机鼓励人们去攻克迄今未解决的问题或所研究的微分方程的数量和种类以巨大速度增长的新问题. 这一

观察是我们撰写本书的最重要的实际理由, 即蕴含在偏微分方程模型中的 "浓缩资料". 令人惊讶的事实是本书中叙述的实际问题, 从油漆流动到固化, 从期权定价到燃烧, 都可用简明符号表示的 **拟线性方程组**

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} = \boldsymbol{b} \tag{0.1}$$

和适当的边界条件来描述, 其中未知量 $\boldsymbol{u}$ 是自变量 $x_i, i = 1, \cdots, m$ 的向量函数, 而 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别是依赖于 $\boldsymbol{u}$ 和 x_i 的方阵和向量. $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不依赖于 $\boldsymbol{u}$ 的导数是刻画拟线性特征的关键事实. 正如以后将看到的, 我们甚至能设法使右端 $\boldsymbol{b}$ 为 $\mathbf{0}$.

为了对为什么这种模式是包含一切的有一些认识, 假设我们面临一个相当一般的两个自变量 x, y 的一阶标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

令 $q = \partial u/\partial y$ 及

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix},$$

关于 y 微商后得方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\partial G/\partial q \end{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \begin{pmatrix} G \\ \partial G/\partial y + q\partial G/\partial u \end{pmatrix},$$

这就是拟线性形式[1].

(0.1) 与 $m = 1$ 时的常微分方程, 即

$$\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{b}$$

存在戏剧性的差异. 对后者, 只要 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 这通常是成立的, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 满足适当的 Lipschitz 条件, 就存在唯一的解, 在某点 $x = x_0$ 成立 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0$. 然而, 很清楚如果 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y)$ 及

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \boldsymbol{b},$$

除非 $\boldsymbol{A}\partial \boldsymbol{u}_0/\partial x = \boldsymbol{b}$, 无论 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有多好的性态, 我们都不可能得到方程在 $y = y_0$ 处满足 $\boldsymbol{u}(x, y) = \boldsymbol{u}_0(x)$ 的解.

1 明眼的读者会注意到第一个矩阵是可逆的 (因为偏微分方程已经 "解出了" $\partial u/\partial x$), 而第二个矩阵是不可逆的 (因为求导时信息失去了). 在 2.3 节和 8.2 节中我们会看到许多这样的简单计算. 顺便地, 为简明计, 本书有许多脚注, 别被吓住, 它们大部分包含离开主流的内容.

这一观察是第 1 章讨论的基础, 在该章中考虑 (0.1) 的标量形式, 其包含最高阶导数的项 (称为方程的 *主部*) 为

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

我们用辨识什么边界数据可指望解存在, 什么边界数据解几乎没有希望存在作为开始. 这是遍及后面分别处理如 (0.1) 的方程组或简单二阶标量方程两章的主题. 在第 2 章我们第一次为不适定性担忧, 在该章, 可以看到当 $\boldsymbol{u}$ 在某些初始曲面上给定时, 我们能很好地求得它垂直于该曲面的所有导数, 但是, 用这样的信息我们只能将 $\boldsymbol{u}$ 延拓到离开初始曲面很近的地方. 然而, 在第 3 章和第 5 章会明白, 放松在曲面上给定 $\boldsymbol{u}$ 的所有分量的要求有时可克服此困难.

在第 3 章中, 除了对简单二阶标量方程的性质好的或性质差的解进行分类外, 还为第 4~6 章, 每章都处理在物理、工程、化学、生物以及甚至社会科学和金融等领域中出现的经久不衰的一类二阶标量方程, 提供一个引子. 事实上, 从学生希望得到对归入这些类型方程的解的内在理解的实用观点上看, 这几章提供了本书的核心素材, 或多或少地可独立阅读.

第 7 章或许是本书中最不寻常的一章, 因为它致力于叙述一类除了专业文献外很少被编入教科书中的问题. 然而近来数学模型对解决实际问题, 特别是工业问题的进展已经揭示, 许多偏微分方程模型必须在区域预先并不知道的情形下求解. 这些区域必须作为解的一部分求得; 典型的例子是盒子内冰的融化或水在容器中的泼溅. 我们称这些问题为*自由边值问题*, 在第 7 章我们将努力为这一近年来迅速增长的巨大知识体系提供一个入门.

尽管 (0.1) 有普适性, 但按照完全非线性方程的原来形式来进行研究是有好处的; 在第 8 章我们回复到 $\boldsymbol{A}$ 不仅依赖于 $\boldsymbol{u}$ 而且依赖于 $\partial u_i/\partial x_j$ 的问题. 因此 (0.1) 不再是拟线性的, 这意味着当我们用 $\boldsymbol{u}$ 在某个已知曲面上的值去求其导数值时, 经常会遇到不存在或不唯一性的可能. 我们会发现这会引出许多非拟线性常微分方程理论的有意思的拓广, 如包络解和焦散, 这意味着几何解释比前几章更有价值. 第 9 章是不适合进入前几章的偏微分方程概念的一个概要, 它是可以一直继续下去的.

前 6 章出现的一个关键数学概念是 *线性偏微分* 方程, 即当 (0.1) 中的 $\boldsymbol{A}_i$ 与 $\boldsymbol{u}$ 无关, $\boldsymbol{b}$ 只是线性地依赖 $\boldsymbol{u}$ 时, 其解是可以形式地写出的. 这是如下说法的推广, 为解一个线性代数方程组, 我们必须求矩阵的逆; 代替 $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 蕴含 $\boldsymbol{x} = \mathcal{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, 我们说 $\mathcal{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ 蕴含 $\boldsymbol{u} = \mathcal{L}^{-1}\boldsymbol{f}$. 我们将看到当 “$\mathcal{L}^{-1}$” 存在时, 可用所谓的 Green 函数或 Riemann 函数为权的加权积分表示. 然而, 求出这种函数甚至它的简单性质经常是困难的, 通常是不可能的. 所以读者不应被其表面概念的简单性所蒙蔽, 认为线性偏微分方程是既容易又乏味的.

在开始之前还有一点需要说明. 为保持本书像现在这样较短的篇幅, 我们排除了几乎所有泛函分析、数值方法的讨论, 特别排除了众多结果都能由其得到的 "摄动理论", 这是一个遗憾的事实. 事实上, 我们将自己的注意力限于那些可以完全解析证明或获得几何解释的结果. 原则上, 只要将大部分章的篇幅增加一倍, 不难添加由相关摄动理论得到的重要结果; 包括数值方法又会将篇幅增加一倍; 叙述偏微分方程的现代泛函分析理论的主要结果也是如此. 然而, 我们要强调, 许多我们得到的或在本书中引用的结果, 若没有开始时原始的数值方法的实验是不可能得到的.

我们自己强加的限制的另一好处是: 我们只要求读者具有的预备知识为对常微分方程、单复变函数和多元实变量函数微积分的一些了解. 当然我们希望他们知道 Fredholm 二择性定理, 对不熟悉者, 2.2 节给出介绍. 虽然不是作为预备知识要求, 但若读者对本书抱一种宽容的数学态度和从一种更宽广的图景来看本书将是有帮助的: 它既非一本 "定义 – 定理 – 证明" 的书, 也非方法和技巧的大全. 作者的背景是基于物理的应用数学, 出发的例子和理论的解释不可避免地有所倾斜, 但适定性的基本信息对数值分析或概率工作者是一样的. 我们避开某些严格的计算, 将其移入习题意味着我们未在对应用性作妥协的情况下, 使本书保持相对小的篇幅.

为使初次阅读比较容易, 我们对较困难的节和习题用 $*$ 号标记, 时间紧的读者可以自由地略去.

第 9 章后面提供了由几乎完整的有关教科书组成的参考文献.

第 1 章　一阶标量拟线性方程

1.1　引　　言

虽然本章只讨论一类最简单的偏微分方程, 但出现的理论却与很多重要而奇妙的应用情形有关系. 例如, 如图 1.1(a) 所示, 考察沿墙壁流下的油漆薄层. 由于油漆层很薄, 因此速度 $u(x,y,t)$ 近似地只沿墙壁向下一个方向. 油漆的黏性抵抗重力, 从而产生剪应力. 假设剪应力与速度的梯度 $\partial u/\partial y$ 成正比. 由流体微元的力平衡可以得到 $\partial^2 u/\partial y^2$ 是一个与重力成正比的常数 $-c$ (见图 1.1(b)). 假设油漆粘在墙上, 因此在 $y=0$ 上, $u=0$. 又由于在油漆表面 $y=h(x,t)$, 剪应力为 0, 故 $\partial u/\partial y=0$, 于是

$$u=\frac{1}{2}cy(2h-y).$$

最后, 由薄层的质量守恒定律, 油漆厚度的变化速度与沿墙壁向下的油漆流的 x 变化是平衡的. 记流量为 $q(x,t)=\int_0^h u\mathrm{d}y$, 经过一小段时间 δt, 长度为 δx 的小单元

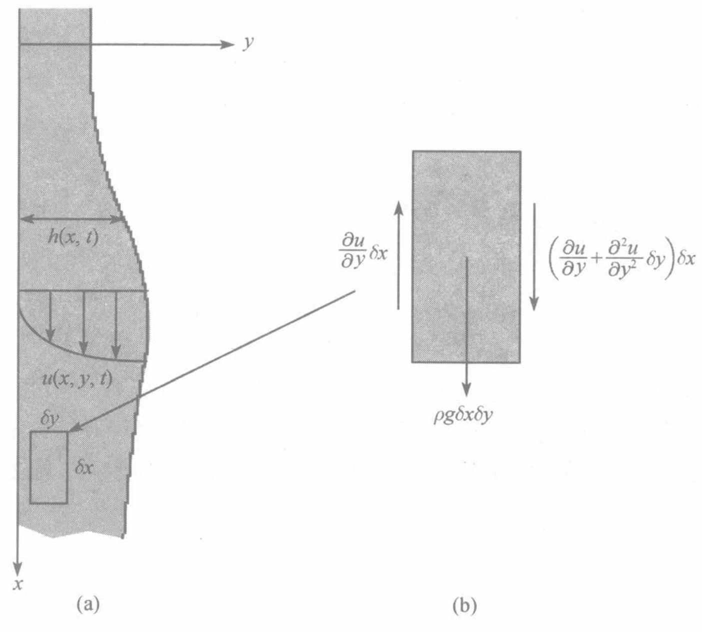


图 1.1　(a) 墙上油漆; (b) 流体微元上的应力

质量损失了约 $(q(x+\delta x,t)-q(x,t))\delta t$, 与之相平衡, 增加的质量为 $(h(x,t+\delta t)-h(x,t))\delta x$, 于是得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\frac{\partial h}{\partial t}+ch^2\frac{\partial h}{\partial x}=0. \tag{1.1}$$

事实上, 这类一阶方程经常会遇到, 只要涉及 "密度" (如 $h(x,t)$) 及 "流量" (如 $q(h)$, h 的已知函数). 则由质量守恒定律推出 *运动波动方程*

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q(h)}{\partial x}=0.$$

这类方程经常被用于如拥塞道路上的交通流问题、通过弹性壁管道 (如动脉) 的血流问题或者沿连铸机器模壁流下的润滑油的建模, 它们都可以作为气体动力学和水力学一般理论的特殊情形, 参见第 2 章.

在完全不同的情形中, 假设 $p_n(t)$ 表示经过 t 时间校对一本深奥的微分方程的书籍后, 原稿仍有 n 个错误的概率. 又假设在很短的时间段 $(t,t+\delta t)$ 内, 作者发现并改正一个错误的概率为 $\mu np_n(t)\delta t$. 在 $t+\delta t$ 时刻原稿有 n 个错误仅当 t 时刻有 n 或 $n+1$ 个错误才会发生. 运用条件概率, 经简单计算可得

$$p_n(t+\delta t)=\mu(n+1)p_{n+1}(t)\delta t+(1-\mu n\delta t)p_n(t).$$

令 $\delta t\to 0$, 则生成函数 $p(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)x^n$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\mu(n+1)p_{n+1}-\mu np_n)x^n,$$

因此

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\mu(x-1)\frac{\partial p}{\partial x}=0.$$

这个方程和 (1.1) 都必须补充适当的初始条件或边界条件. 因此, 可以将初始的油漆厚度记为 $h(x,0)$, 而对校对模型适当的条件是假设校对开始时有 N 个错误, 从而 $p(x,0)=x^N$. 注意, 对油漆模型也可给出其他条件, 例如, 如果油漆随刷子以速度 V 移动, 可以给出 $x=Vt$ 上 h 的值.

1.2　Cauchy 数据

为解决这些例子提出的问题, 根据由浅入深的原则, 我们现在建立一般的 一阶

拟线性方程 的理论. 这类方程的形式为

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u), \tag{1.2}$$

其中 a, b, c 不依赖于 u 的导数, 这一点非常重要. 又假设 a, b, c 在讨论的范围内是光滑函数 (即是连续可微的).

假设 Γ 是 (x,y) 平面中的一条曲线, 定义 Cauchy ***数据*** 为 u 给定在 Γ 上的值. 为方便起见, 将边界条件写成参数形式

$$x=x_0(s),\quad y=y_0(s),\quad u=u_0(s)\quad 对\ s_1\leqslant s\leqslant s_2. \tag{1.3}$$

这里 x_0, y_0, u_0 是 s 的光滑函数[2], 并且不存在 s 使得 $x_0'(s)=y_0'(s)=0$, 其中撇号表示对 s 求导.

寻求满足 (1.2) 和 (1.3) 的连续可微函数 u 的边值问题, 在几何上可以解释为在 (x,y,u) 空间中构造曲面 $u=u(x,y)$, 满足 (1.2) 且通过 (1.3) 定义的边界曲线, 称为 ***积分曲面*** 或 ***解曲面***. 这显然是常微分方程初值问题的推广, 而这个推广需要构造一条通过边界点的曲线 (即曲线图). 对常微分方程, 如 $a(x,u)\partial u/\partial x=c(x,u)$, 这通常都是可能的, 除非在边界点上 $a=0$. 同样地, 对偏微分方程, 边界曲线的某一子集也可能是不可接受的.

如果沿边界曲线对边界数据关于 s 进行求导, 则

$$u_0'=\frac{\partial u}{\partial x}x_0'+\frac{\partial u}{\partial y}y_0'. \tag{1.4}$$

方程 (1.4) 和 (1.2) 在 Γ 上的取值都是关于 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 在 Γ 上值的方程组, 其中 a, b, c 是 s 的已知函数. 因此, 如果系数行列式满足

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x_0' & y_0' \end{vmatrix}=ay_0'-bx_0'\neq 0\quad 对所有的\ s_1\leqslant s\leqslant s_2, \tag{1.5}$$

$\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 在 Γ 上可被唯一决定. 如果这个条件成立, 并且 a, b, c 及 Cauchy 数据在每一点都有 Taylor 级数展开, 容易验证 u 的任意阶偏导数都可以被 Cauchy 数据和偏微分方程唯一决定, 并且可以形式地构造 $u(x,y)$ 在 Γ 上一点的 Taylor 级数展开. 这形成了 Cauchy-Kowalevskaja 存在唯一性定理的出发点, 这个定理考虑了 Taylor 级数的收敛性, 并保证当条件 (1.5) 满足时有唯一解. 进一步的讨论见第 2 章.

如果在一点 $s=s_0$ (或 s 的某一范围内) 条件 (1.5) 不满足, 那么在边界曲线的邻域中通常不存在解. 不过对如下的特殊情形

$$\frac{x_0'}{a}=\frac{y_0'}{b}=\frac{u_0'}{c}, \tag{1.6}$$

[2] 当 x_0, y_0, u_0 或 a, b, c 不光滑时, 这一问题需要全新的方法, 参见 1.6 节.

(1.2) 和 (1.4) 线性相关, $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 存在, 但在 $s=s_0$ 上不能唯一决定. 在这种情形下, 可能有很多解曲面通过同一条边界曲线. 这说明满足这些常微分方程的曲线扮演着重要的角色, 参见下一节.

1.3 特 征 线

偏微分方程 (1.2)

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c$$

有几何解释, 这也是给出 Cauchy 边界数据 $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$, $u=u_0(s)$ 满足 (1.5) 的解的关键. 在 (x,y,u) 空间中, 解曲面的法向为 $(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, -1)$, 将偏微分方程重写成下面的形式

$$(a,b,c)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},-1\right)=0.$$

于是, (a,b,c) 落在解曲面每一点的切平面上. 因此, 如果可以通过求解常微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(x,y,u),\\ \dot{y}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b(x,y,u),\\ \dot{u}&=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=c(x,y,u)\end{aligned}\tag{1.7}$$

来构造曲线 $(x(t),y(t),u(t))$, 其中 t 为参数, 那么对所有 t, 这条曲线都落在解曲面上. 另外, 如果在 $t=0$ 上要求

$$x=x_0(s),\quad y=y_0(s),\quad u=u_0(s),\tag{1.8}$$

则这个解曲面也通过边界曲线. (1.7) 的解曲线称为**特征线**[3], 当 s 变化时, 特征线族张成一个曲面 (见图 1.2), 也就是所要求的解曲面. 又如图 1.2 所示, (1.7) 的解曲线在 (x,y) 平面上的投影称为 **特征投影**. 然而从这个结论还不清楚所构造的曲面是否光滑, 甚至是否连续. 例如, 有可能在 u 的导数不连续处产生扭结, 或者曲面可能自相交.

如果要求偏微分方程 $a\partial u/\partial x+b\partial u/\partial y=c$ 的解是所谓的 **经典解**, 那么 u 及其一阶导数必须存在, 且使每一点上方程的左右两端相等. 尽管几何图形已经表示了这一点, 不过仍有必要用下面的分析讨论来证实这一点.

---

3 我们简短地给出两个考虑由 (1.7) 定义的曲线的重要理由, 这将引出适用于更多一般偏微分方程特征线的新定义.

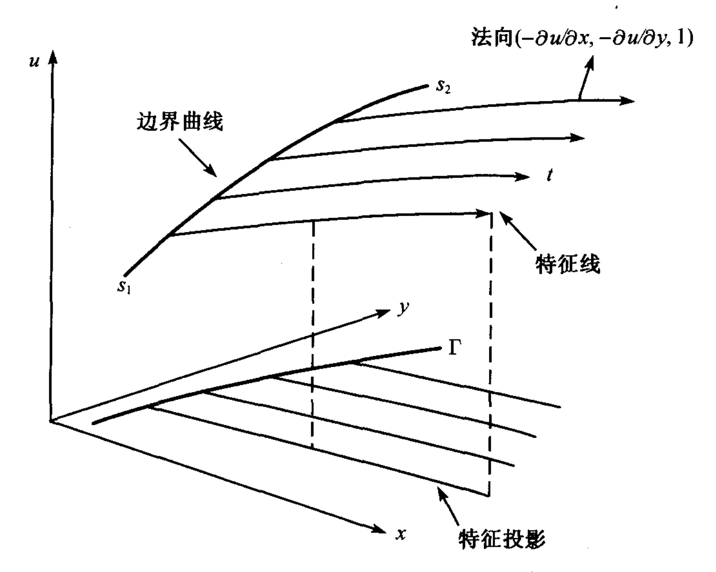


图 1.2 由特征线张成的解曲面

由于 a, b, c 都是 x, y, u 的函数, 而不显含 t, 特征方程组 (1.7) 是一个由 3 个自治常微分方程组成的方程组满足初始数据 (1.8). 设 a, b, c 是 Lipschitz 连续的, 故由 Cauchy-Picard 定理可知, 特征方程组有唯一的局部解, 可以写为

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t), \tag{1.9}$$

其中 $x(s,0) = x_0(s)$, $y(s,0) = y_0(s)$, $u(s,0) = u_0(s)$. 进一步, 由同样的定理, x, y, u 是 s 和 t 的可微函数, 且连续依赖于边界数据.

关系式 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ 和 $u = u(s,t)$ 是解曲面的参数表示. 如果变换 $(s,t) \mapsto (x,y)$ 有唯一的逆变换, u 可以局部唯一地表示为 x 和 y 的可微函数. 由反函数定理, 其充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & \dot{x} \\ y' & \dot{y} \end{vmatrix} \neq 0, \infty,$$

这里及以后, 记 $' = \partial/\partial s, \dot{} = \partial/\partial t$. 利用 (1.7) 将其简化为

$$ay' - bx' \neq 0, \infty,$$

它在边界曲线 $t = 0$ 上肯定是满足的, 并化为条件 (1.5). 由连续性, 在边界的某些邻域中也满足这一条件. 于是得到 u 的局部存在性结果. 进一步, 显然所构造的函数满足原来的微分方程 $a\partial u/\partial x + b\partial u/\partial y = c$. 由 (1.7), 只要简单地沿特征线求导, 可以得到

$$\dot{u} = c = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}.$$

注意这个结果表示, 沿特征线 (1.2) 中偏导数项简化为 u 沿特征线方向的方向导数.

1.3.1 线性方程和半线性方程

虽然我们已经得到了局部存在性的结果, 但在远离 Γ 的地方 u 仍有可能会产生奇性, 这在方程不是线性时是很容易发生的. 在线性方程中 $c(x,y,u)=\alpha(x,y)u+\beta(x,y)$, 且 a, b 不依赖于 u. 最简单的例子是运动波动方程, 其中 $\alpha=\beta=0$ 且 a, b 均为常数. 这时特征方程组为

$$\dot{x}=a,\quad \dot{y}=b,\quad \dot{u}=0,$$

于是

$$x=at+x_0(s),\quad y=bt+y_0(s),\quad u=u_0(s),$$

另一种表示为 $u=f(bx-ay)$, 其中 f 为任意函数. 边界值简单地沿特征投影传播.

现在我们转向更大的一类方程, 特征方程组 (1.7) 仍能很容易地使用. 它们是*半线性方程*, 定义为主部 (即含有最高阶导数的项) 是线性的. 于是, 对 $a\partial u/\partial x+b\partial u/\partial y=c$, 左边含有所有导数, 关于 u 是线性的, a, b 仅依赖于 x, y, 而 c 可以非线性地依赖于因变量 u.

现在, 特征方程组 (1.7) 简化为一阶微分方程, 因为方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{b}{a}$$

关于 u 是不耦合的. 这个方程在相平面 (x,y) 中有积分曲线, 除了*奇点* $a=b=0$ 外不相交[4]. 满足初始条件 $x(s,0)=x_0(s)$, $y(s,0)=y_0(s)$, 它们构成 (x,y) 平面中整体单参数曲线族 C, 称为特征投影 (通常称这些曲线 C 为特征线). 通过任意非奇点存在唯一的特征投影, 参数为 t, s, 因此映射 $(s,t)\mapsto(x,y)$ 是可逆的, 从而 $ay'-bx'\neq 0$.

假设特征投影已知, 由 (1.7), 并利用下面两式中容易求解的一个

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{c}{a}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{c}{b},$$

可计算沿着特征投影 u 是如何变化的. 当然, 如果 c 非线性依赖于 u, 最后的常微分方程可能没有整体解, 参见例 1.3. 但是事实上, (1.7) 可以分解为两个一阶标量常微分方程, 可以分别求解, 这是一个实质性的简化, 即使不一定能得到用初等函数表示的显式解. 下面的例子说明了运气好的话所发生的情形.

例 1.1　求解下列线性问题:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y)u\quad 且\quad u=1\quad 在\ x=1,\ 1<y<2\ 上.$$

4 奇点附近性态的例子可参见习题 1.9.

初始数据可以写成参数形式

$$x_0(s)=1,\quad y_0(s)=s,\quad u_0(s)=1\quad 对\ 1<s<2.$$

在这个例子中, 类似于常微分方程理论, 我们期望在 $x=y=0$ 上出现奇性. 特征方程为

$$\dot{x}=x,\quad \dot{y}=y,\quad \dot{u}=(x+y)u,$$

且特征投影 C 由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}$$

给出. 如图 1.3 所示, 它们是过原点的直线, 而原点是一个奇点.

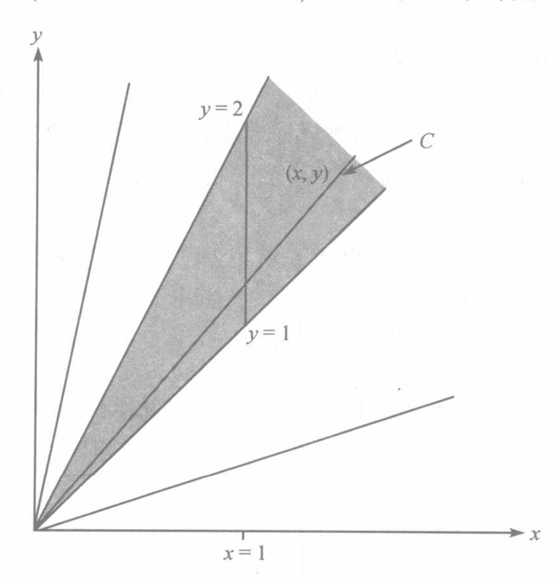


图 1.3 例 1.1 的特征投影

沿特征线 C 对 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x=(x+y)u/x$ 积分, 其中 y/x 是常数, 且在 $x=1$ 上 $u=1$, 得到

$$\log u=\int_C\left(1+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(1+\frac{y}{x}\right)(x-1).$$

在图 1.3 中, 解 u 仅在阴影三角域中有定义. 进一步, 当 $x\to 0+$ 时 u 有奇性, 这个结果在计算解的参数形式中也很明显:

$$x=\mathrm{e}^t,\quad y=s\mathrm{e}^t,\quad \log u=(1+s)\int_0^t \mathrm{e}^\tau\mathrm{d}\tau=(1+s)(\mathrm{e}^t-1).$$

当 $x>0$ 时, Jacobi 行列式 $|\partial(x,y)/\partial(s,t)|=-\mathrm{e}^{2t}$ 恒不为零, 因此可局部消去 s 和 t, 得到 u 关于 x 和 y 的唯一函数. 当 $t\to-\infty$ 时, $(x,y)\to(0,0)$, Jacobi 行列式趋于零, u 是奇性的. 我们通常用术语 *破裂* 表示 u 或其导数出现奇性的情形.

1.4 定义域和破裂

在上面的例子中, 解存在的区域 $x>0,\ y>0$ 是由通过 (x,y) 平面内给定边界数据的边界曲线 (即边界曲线的投影) 端点的特征投影围成的. 这个区域就是熟知的 *定义域*. 如果边界条件改为对 $y_1\leqslant y\leqslant y_2,\ u=1,\ x=1$, 那么解的定义域为 $y_1\leqslant y/x\leqslant y_2,\ x>0$. 对所有标量拟线性方程, 一个共有的特性是定义域至少是被通过边界曲线投影的端点的特征投影所限制. 另一个对定义域的限制可能是由 a 和 b 均为零, 或者沿特征线积分时 u 破裂, 或者在 (x,y) 平面的某些曲线上 Jacobi 行列式 $|\partial(x,y)/\partial(s,t)|$ 为零所导致. 事实上, 解的定义域在这些曲线上不能再延拓, 因为通常至少有一个 u 的导数是无界的.

注意到当 $ay'=bx'$ 时, Jacobi 行列式为零, 但在一般拟线性的情形下, 对定义域的这一限制只有先求解 u 后才能被确定. 而对半线性的情形, $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 可以唯一决定, 除非在奇点 $a=b=0$, 正如前面提到的, 除了奇点外, Jacobi 行列式 $|\partial(x,y)/\partial(s,t)|$ 必不为零.

下面给出边界上 Cauchy 数据的 Jacobi 行列式为零的例子.

例 1.2 求解

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y)u \tag{1.10}$$

(与前一个例子是同一个方程), 在圆弧 Γ 上 $u=1$, 其中 Γ 定义为

$$x_0=2-\sqrt{2}\cos s,\quad y_0=\sqrt{2}\sin s\quad 对\ 0\leqslant s<\frac{\pi}{4}.$$

作为界限的特征投影为 $y=0$ 及 $y=x$, 于是定义域是 $0<y<x$, 如图 1.4 所示.

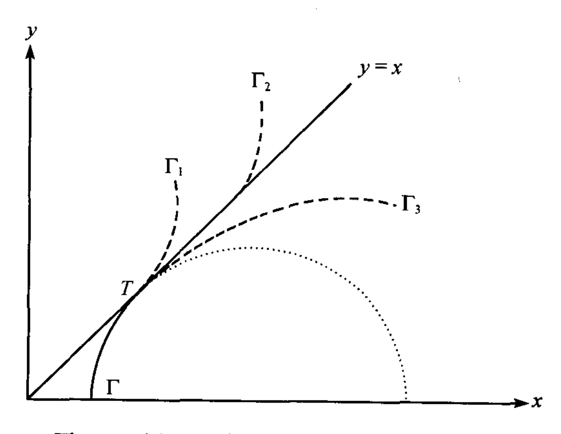


图 1.4 例 1.2: 解仅在 $0<y<x$ 中有定义

但是这里有一个问题, 在求参数解时, 有

$$x = \left(2 - \sqrt{2}\cos s\right)\mathrm{e}^t, \quad y = \sqrt{2}\sin s\mathrm{e}^t,$$
$$\log u = \left(2 - \sqrt{2}\cos s + \sqrt{2}\sin s\right)(\mathrm{e}^t - 1),$$

于是

$$x'\dot{y} - y'\dot{x} = 2\mathrm{e}^{2t}\left(1 - \sqrt{2}\cos s\right);$$

虽然这个表达式在 $0 \leqslant s < \pi/4$ 上非零, 但它在 Γ 相切于特征线 $s = \pi/4$ 处为零. 这给了我们一个危险的信号, 不仅是对问题 (1.10), 而是对任何试图将 Cauchy 数据延拓至甚至越过图 1.4 中 T 点的问题. 如果我们希望延拓至 Γ_1 上, 那么仅在特征线 $y = x$ 上出现问题, 但是如果我们试图延拓至 Γ_2 (任何包含特征线 $y = x$ 上一条线段的曲线) 或者 Γ_3, 就会导致没有任何解的情形. 在 Γ_2 的情形中, 数据可能不满足特征方程组 (1.7), 而对 Γ_3, 特征投影通过 Γ, 数据可能与从 Γ 沿特征线传播的信息相矛盾.

众所周知, 一阶非线性常微分方程的解容易产生奇性而导致破裂. 下面的例子显示对半线性方程也可能出现同样的情况.

例 1.3 求解

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 \quad 在\ x > 0\ 中 \tag{1.11}$$

满足

$$u = \mathrm{e}^{-y^2} \quad 在\ x = 0\ 上, \quad 即 \quad x_0 = 0, \quad y_0 = s, \quad u_0 = \mathrm{e}^{-s^2}.$$

显然, 解的参数形式为

$$x = t, \quad y = t + s, \quad u = \frac{1}{\mathrm{e}^{s^2} - t}.$$

(1.11) 右端项的非线性很强, 在曲线 $x = \mathrm{e}^{(y-x)^2}$ 上, $u \to \infty$, 从而解破裂. 定义域是 $x < \mathrm{e}^{(y-x)^2}$ 决定的区域; 如果不彻底修改偏微分方程, 就无法定义超出这个区域的解 u.

这类性态在一阶标量方程的应用中很少遇到, 但我们在第 6 章高阶方程中会看到很多这种例子. 现在我们转向一阶拟线性方程, 它会出现另一类特有的破裂.

1.5 拟线性方程

3 个自治常微分方程 $\dot{x} = a$, $\dot{y} = b$, $\dot{u} = c$ 的一般积分理论要比在线性或半线性情形下得到的 2 个方程的理论困难得多. 事实上, 多了一个自由度变成了 3 维相空间, 与相平面相比, 意味着我们将会遇到混沌的特征线. 于是如果积分曲面确实可

以定义的话, 将可能导致 "折叠" 的积分曲面. 我们先看一个拟线性偏微分方程的例子.

当要写出显式解时, 我们也许非常幸运地遇到对称形式的方程, 如

$$x(y-u)\frac{\partial u}{\partial x}+y(u-x)\frac{\partial u}{\partial y}=u(x-y), \tag{1.12}$$

在此情形下, 容易找到

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y-u)}=\frac{\mathrm{d}y}{y(u-x)}=\frac{\mathrm{d}u}{u(x-y)}$$

的积分形式[5]

$$x+y+u=x_0(s)+y_0(s)+u_0(s), \quad xyu=x_0(s)y_0(s)u_0(s), \tag{1.13}$$

因此特征投影为

$$x+y+\frac{x_0(s)y_0(s)u_0(s)}{xy}=x_0(s)+y_0(s)+u_0(s).$$

从应用的观点来看, 这是另一种求特征方程的方法, 它常比用 s 和 t 的参数表示容易. 注意, 如果我们能够找到两个独立的积分 $f(x,y,u)=$ 常数及 $g(x,y,u)=$ 常数, 那么原偏微分方程 (1.2) 的通解是 $G(f,g)=0$, 其中 G 是任意的. 为了看清这一点, 注意到曲面 $G=0$ 与曲面 $f=c$ 相交于 $G(c,g)=0$, 即 $g=$ 常数; 因此曲面 $G=0$ 由图 1.2 的特征线所组成, 这反映了这样的事实, 即任何两个积分曲面在特征线上相交. 显然, 上面例子的解可以用这种方法得到, 这里 $f=xyu$ 及 $g=x+y+u$; 参见习题 1.4. 然而, 这种以对称性为基础而存在显式解是难得遇到的事情, 这种对称性也很难发现. 第 6 章将回到这个一般问题.

如 (1.13) 的参数解表示隐藏了一个现象, 它可以用如下的简单模型方便地进行研究

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1.14}$$

这是运动波动方程, 其中 x 表示时间, 波速线性依赖于波幅 u, 而不是油漆模型 (1.1) 中的二次形式. 观察冲上浅滩的波浪, 发现浪尖上的水移动得比浪谷中的水快, 从

---

5 这里 合分比定理

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\lambda \quad\Rightarrow\quad \frac{\sum\limits_i \lambda_i a_i}{\sum\limits_i \lambda_i b_i}=\lambda \quad \text{对任何 } \lambda_i$$

经常是很有用的.

中得到了一个好的想法; 事实上, (1.14) 的解 u 可以被视为这种波浪高度的原始模型. 考虑适当的 Cauchy 数据形成初值问题, 在 $x=0$ 上 $u=f(y)$, 于是

$$x_0=0,\quad y_0=s,\quad u_0=f(s),$$

且相应的解为

$$x=t,\quad y=tf(s)+s,\quad u=f(s).$$

通解由 $u=f(y-ux)$ 隐式地给出, 其中 f 是任意函数.

我们得到非常有用的结果, u 在特征投影 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=u$ 上是常数, 因而特征投影是直线. 现在考虑两种 "倾斜" 数据[6]

$$f_{\pm}(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \pm y, & 0\leqslant y<1,\\ \pm 1, & 1\leqslant y.\end{cases}\tag{1.15}$$

由特征投影, $x>0$ 的解为 (见图 1.5)

$$u_{\pm}=\begin{cases}0, & y<0,\\ y/(x\pm 1), & 0\leqslant y<1\pm x,\\ \pm 1, & 1\pm x\leqslant y.\end{cases}$$

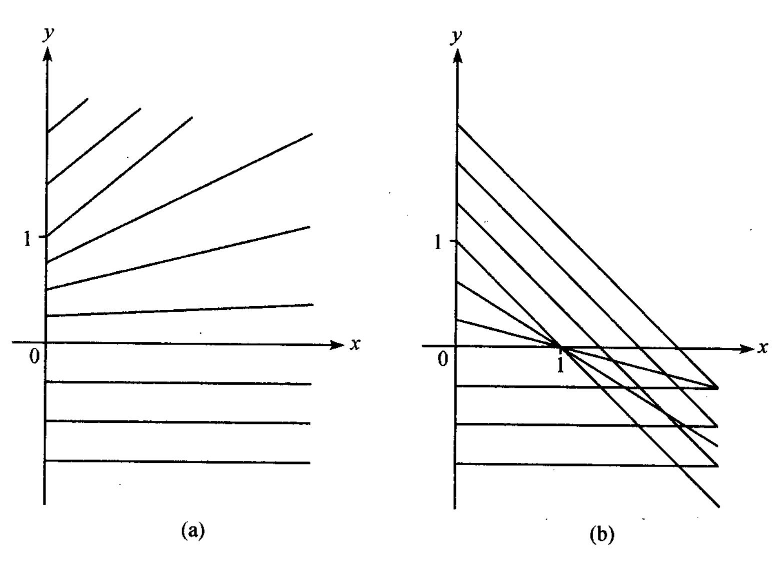


图 1.5 (1.14) 和 (1.15) 解的特征投影: (a) 正倾斜; (b) 负倾斜

6 这个 Cauchy 问题不满足先前关于仅考虑连续数据的假设, 但可以用光滑近似代替 (1.15) 并取适当的极限.

$y=0$ 时斜率的初始不连续性, 在特征投影 $y=0$ 上一直保持, 但在 $y=1$ 上斜率的不连续性沿特征投影 $y=1\pm x$ 传播, $u_{\pm}$ 作为 y 的函数保持分段线性, 参见图 1.6. 于是随着 x 的增加, 正斜率的倾斜 u_{+} 变得越来越平缓, 而负斜率的倾斜 u_{-} 变得陡峭, 直到 $x=1$ 变成垂直, 当 $x>1$ 时, 变成三值的. 对于正斜率, 在 $x>0$ 时没有值, 因为不满足可解条件 $\partial(x,y)/\partial(s,t)\neq 0,\infty$, 而对于负斜率, 在 $x\geqslant 1$ 上有一曲线, 其 Jacobi 行列式为零. 我们强调指出即使将倾斜数据 "光滑化", 这个结论还是可以用的, 因为这是 (1.14) 非线性导致的不可避免的结果. 对于曾经在垂直墙上刷厚漆的人是很熟悉这种 "翻转" 现象的, 模型 (1.1) 会受到对刚给出的分析作简单修改的影响. 同样的注记可用于交通车辆追尾, 或者在本章开始时我们提及的用运动波动方程描述的其他情形. 然而, 从数学的角度来看, 这个现象在整个非线性偏微分方程的研究中具有重要的意义, 因为只要我们试图用非线性方程作为数学模型, 就会遇到这类间断.

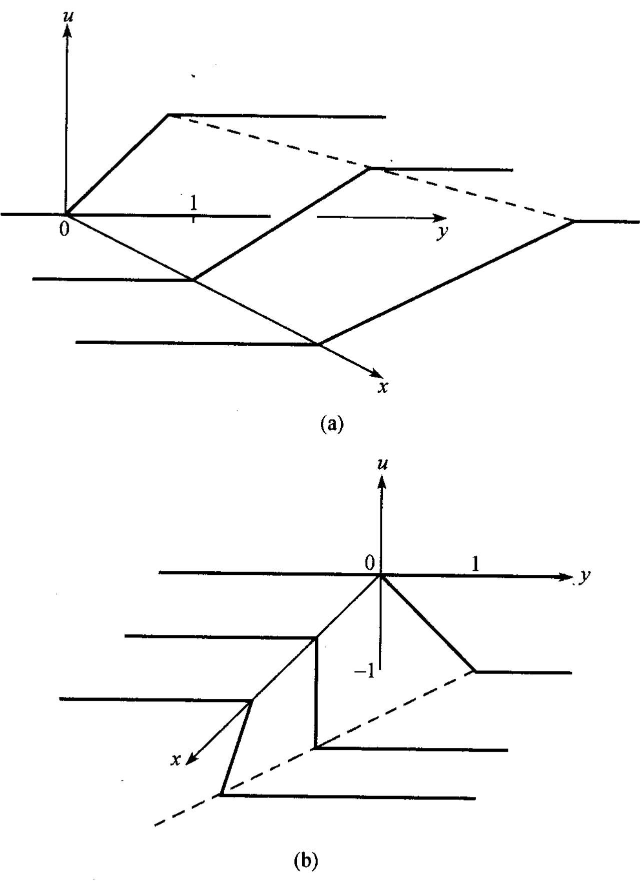


图 1.6　(1.14) 和 (1.15) 的解: (a) 正倾斜; (b) 负倾斜

在考虑对这个问题做些什么之前, 先考虑另一种包含间断的偏微分方程模型. 我们观察到许多设法建模的物理现象只能用微分方程, 甚至是线性方程来方便地描述, 它的解在越过边界时含有间断, 而这个边界是由解的一部分所决定的. 这种情形称为 *自由边值问题*, 后面我们将用一章来讨论这个问题. 这里我们指出它们在对可以有相变的材料热流或在薄层上的化学反应 (例如火焰) 建模时会出现, 在这些情况下, 热流在自由边界上是间断的. 同样地, 在两相流之间的自由曲面也可被考虑为密度是不连续的, 或者一些生物体中的肿瘤在生长边界的浓度也可视为是不连续的. 这些例子与 (1.14) 之间的主要区别是, 后者随着 x 的增长会自发地出现间断, 而上面提及的物理例子在描述问题时就加上了奇性.

这些例子促使我们考虑偏微分方程的更有创造力的求解方法, 而不仅仅是寻找所谓的经典解, 即因变量及其导数处处足够光滑且满足微分方程. 我们允许解在某些点上有奇性 (与之相关的, 比如爆炸模型) 或者在某些线上有奇性 (作为模型, 比如流体或超导中的涡流), 但这里我们仅考虑越过比自变量的空间维数低一维的曲面 (即曲线, 这是本章涉及的大多数情况) 的间断性.

1.6 间 断 解

与 "经典" 的概念相区别, 关于 (1.14) 第一个朴实的想法 (与之相关的, 比如气体动力学中的激波), 是用 "弱" 的概念, 解由不同区域上定义的经典解组成. 这些区域按以下方法拼接在一起, 越过区域之间的边界时某些导数会有间断, 控制方程 (1.2) 的一个适当的推广形式是

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c.$$

下一节将给出当 u 本身有间断时更为精确的定义, 不过我们首先仅考虑 u 的一阶导数在越过 (x,y) 平面中的某些曲线 C 时是不连续的, 而 u 本身是连续的情形. 如果曲线定义为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 函数从两边趋近于这条曲线的极限值分别用上标 $^+$ 和 $^-$ 表示, 则

$$\dot{u}^+=\dot{x}\frac{\partial u}{\partial x}^+ +\dot{y}\frac{\partial u}{\partial y}^+,\quad \dot{u}^-=\dot{x}\frac{\partial u}{\partial x}^- +\dot{y}\frac{\partial u}{\partial y}^-.$$

由于 u 在越过 C 时是连续的, $\dot{u}$ 也连续, 所以

$$\dot{x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+ +\dot{y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_-^+=0, \tag{1.16}$$

其中方括号表示 "跳跃" 或越过 C 时表达式有有限间断. 函数 u 除在 C 上外都满足偏微分方程, 于是相减后得

$$a\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+ + b\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_-^+ = 0, \tag{1.17}$$

其中 a 和 b 在 C 上的计算不会引起歧义, 因为 u 是连续的. 这些导数间断不为零的必要条件是 $b\dot{x} = a\dot{y}$, 所以 C 必定是特征投影.

于是特征线的进一步解释是它们是解曲面上的曲线, 越过它不需要有连续的切平面, 而代之为 "扭结" 或 "棱"[7]. 这种解在边界曲线仅有分段连续切向量时产生, 它不是严格意义上所说的经典解, 因为在 C 上不满足偏微分方程. 然而, C 划分了区域, 在每个区域中经典解可以定义和计算, 而不需要考虑间断的大小.

在线性情形中, $c(x,y,u) = \alpha(x,y)u + \beta(x,y)$, 可以按如下方法计算沿着 C 传播的间断大小. 首先观察到, 如果 $\dot{x} = a$ 及 $\dot{y} = b$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+ = a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_-^+ + b\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right]_-^+.$$

对原偏微分方程关于 x 求导, 并将 C 两边的值相减, 得到

$$a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_-^+ + b\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right]_-^+ + \frac{\partial a}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+ + \frac{\partial b}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_-^+ = \alpha\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+.$$

于是由 (1.17), 并假设 $b \neq 0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+ = \left(\alpha - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{a}{b}\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+, \tag{1.18}$$

所以如果当 $t = 0$ 时, $[\partial u/\partial x]_-^+$ 非零, 则它恒不为零.

根据 1.5 节的讨论, 我们现在考虑 u 本身不连续的情形. 从下面一个简单例子可以看到这种做法的内在危险. 考虑 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0,y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & y > 0, \end{cases}$$

问是否存在某一特殊曲线 $y = f(x)$, $f(0) = 0$, 使得解为

$$u = \begin{cases} 0, & y < f(x), \\ 1, & y > f(x). \end{cases} \tag{1.19}$$

7 事实上, 这个解释从不同于 1.3 节的另一个观点出发给出了特征线的定义, 可推广到向量偏微分方程, 参见第 2 章.

我们给出一个甚至对相应的一般的半线性问题也似乎合理的回答, 边界数据 u 在某一点 $s=s_0$ 间断, 其中 $s_1<s_0<s_2$. 我们知道在特征投影所界定的区域中存在唯一的经典解, 这些特征投影通过从 s_1 到 s_0-0 定义的点, 并且在通过从 s_0+0 到 s_2 的特征投影所界定的区域中也存在唯一的经典解. 在半线性情形特征投影的决定不依赖于 u 的值, 所以通过 $s=s_0$ 的特征投影 C_0 可以唯一地定义 (见图 1.7). 从而在由 C_0 分开的两个邻接区域 $D_\pm$ 中可以定义经典解. 因此, 定义通解的唯一方法是允许 u 仅在越过特征投影 C_0 时有跳跃, 或者有有限间断. 这意味着在 (1.19) 中 $f(x)=x$.

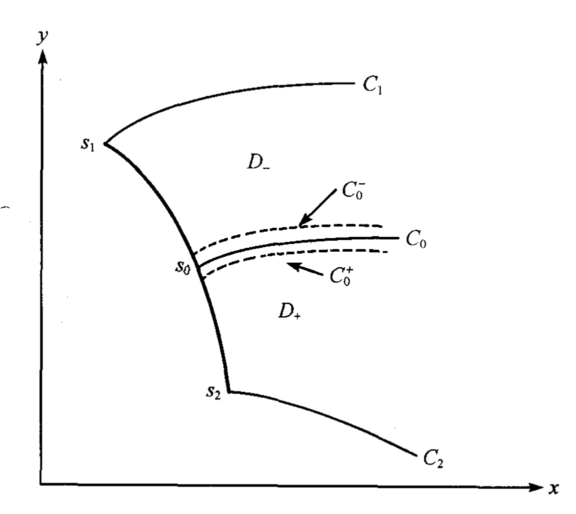


图 1.7 半线性方程的不连续边界数据

u 的间断大小由 C_0 两边的 u 的极限值给出, C_0 必须满足特征方程组 (1.7), 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u]_-^+=[c]_-^+.$$

如果 c 不依赖于 u, 则 u 的间断保持常数; 若 $c=\alpha(x,y)u$, 那么在 C_0 上,

$$[u]_-^+=A\exp\int_0^t\alpha(x(\tau),y(\tau))\mathrm{d}\tau,$$

其中 A 是常数.

然而, 在拟线性的情形中, 特征投影的极限 C_0^+ 和 C_0^- 通常是不相等的, 因为它们分别依赖于 u_0^+ 和 u_0^- 的值. 于是定义经典解的两个区域可能会重叠或不邻接, 从而分别导致多值或无解的情形. 在这种情况下, 边界数据间断的存在对解在区域上的修改比仅一条特征线的情形时要大. 这需要一种新的方法, 下一节将给出这种方法.

在继续之前, 我们强调我们无法太仔细地构建偏微分方程间断解的理论. 允许解在任何方面有不好的性质, 对方程来说不太自然. 我们就像渔夫将网撒得很大, 以便将河中的鱼都捕捞上来. 如果这样, 我们不得不先对许多候选解进行筛选.

*1.7 弱 解

u 或它的一阶导数在越过曲线 C_0 时具有间断, 偏微分方程 $a\partial u/\partial x+b\partial u/\partial y=c$ 在 C_0 上是没有意义的. 然而, 我们在上一节已经看到, u 的一阶导数的跳跃, 即有限间断, 可以自然地描述为将特征线两边不同的经典解分块连接起来. 本节要寻找一个类似的系统方法来描述 u 本身具有有限间断的情形. 这种间断通常被称为激波, 它源自于气体动力学的偏微分方程模型. 如果激波存在, 那么仅用偏微分方程来描述, 问题仍无法确定下来, 这时要么给出间断值的条件, 要么用某种方法重写问题, 使之在激波存在的情形下也有意义.

为了便于说明, 先用线性方程

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=\alpha(x,y)u \tag{1.20}$$

说明后一个过程. 引入一个任意的可微函数 $\psi(x,y)$, 称为 **试验函数**, 当 u 可微且满足 (1.20) 时, 对所有的 ψ,

$$\frac{\partial}{\partial x}(au\psi)+\frac{\partial}{\partial y}(b\psi u)\equiv u\left(\frac{\partial}{\partial x}(a\psi)+\frac{\partial}{\partial y}(b\psi)+\alpha\psi\right). \tag{1.21}$$

于是, 如果 u 在某些初始弧 Γ 上有定义, 在由 Γ 及任意曲线 γ 围成的区域 D 上进行积分, ψ 在 γ 上限制为零 (见图 1.8(a)), 那么可以对 (1.21) 使用 Green 公式, 得到

$$\int_\Gamma u\psi(a\mathrm{d}y-b\mathrm{d}x)\equiv\iint_D u\left(\frac{\partial}{\partial x}(a\psi)+\frac{\partial}{\partial y}(b\psi)+\alpha\psi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.22}$$

(1.22) 式是一个恒等式, 即使 u 不可微时也有意义. 因此, 我们定义 (1.20) 在 Γ 上具边界数据的 **弱解** 为函数 u 对所有试验函数[8] ψ 满足 (1.22). 这里的关键之处在于这个定义不要求 u 在所有点上都拥有导数, 只要积分存在就可以了; 可微性条件从 u 转移到 ψ 上. 不过, 如果 u 在子区域 D_0 中处处可微, 那么选择适当的试验函数, 按上面讨论的逆向过程, 容易证明 u 在 D_0 中处处满足 (1.20) 式. 同样的注释可应用于 u 越过特征线有不连续导数的情形. 但是, 如果 u 本身越过开曲线 C_0 不连续, 如图 1.8(b) 所示, 那么在 C_0 分隔的两个区域 D^+ 和 D^- 中分别使用

8 在某些情形下, 例如气体动力学模型, 这个定义来源于物理, 见 [30].

Green 公式, 相减后得到

$$\int_{C_0} \psi[u]_-^+(a\mathrm{d}y - b\mathrm{d}x) = 0. \tag{1.23}$$

由于 $[u]_-^+ \neq 0$ 且 ψ 是任意的, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = b/a$ 并且 C_0 是特征投影.

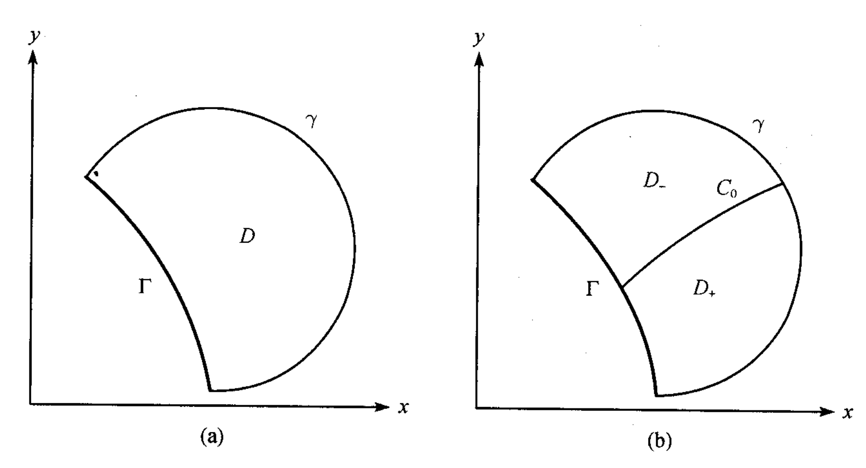


图 1.8 弱解的积分区域: (a) 连续解; (b) 间断解

对于拟线性问题, 这个过程仅可在方程的主部, 即包含最高阶导数的项, 是 *散度形式* $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ 时才能使用, 因为此时 Green 公式才能应用. 在这种情形下,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = c, \tag{1.24}$$

其中 P, Q, c 是 x, y, u 的可微函数. 这个方程称为 *非齐次守恒律方程* (当 $c = 0$ 时, 简称为 *守恒律方程*).

于是适当的弱解定义为函数 u 使得

$$\iint_D \left(P\frac{\partial \psi}{\partial x} + Q\frac{\partial \psi}{\partial y} + c\psi\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Gamma \psi(P\mathrm{d}y - Q\mathrm{d}x) \tag{1.25}$$

对所有允许的试验函数 ψ 都成立. 同样, 容易验证, 如果 u 可微, 必满足 (1.24). 而同 (1.23) 一样, 如果 u 越过 C_0 不连续,

$$\int_{C_0} \psi([P]_-^+\mathrm{d}y - [Q]_-^+\mathrm{d}x) = 0, \tag{1.26}$$

由于 ψ 是任意的, 上式意味着在 C_0 上激波的斜率由 Rankine-Hugoniot条件[9]给出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{[Q]_-^+}{[P]_-^+}. \tag{1.27}$$

9 这个条件也可以从简单的 "盒子" 理论得到, 在越过中心在激波上的小盒子时, 密度的跳跃与流量的跳跃相平衡, 很像 1.1 节的质量守恒的推导. 不过, 这个结论在多因变量时不易应用.

通常这不再是特征投影, 但当 $[u]_-^+ \to 0$ 时, 它趋近于由 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\partial Q/\partial u)/(\partial P/\partial u)$ 定义的特征投影[10].

例 1.4 求解下列方程 (仍是 (1.14)):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0,y) = f(y).$$

由 (1.15) 讨论的简单推广, 这个问题对所有 $x > 0$ 都没有经典解, 只要 y 的值满足 $f'(y) < 0$. 然而, 由 (1.25) 定义的弱解存在, 其中 $P = u$, $Q = \frac{1}{2}u^2$, $c = 0$. 于是将区域分隔成两个经典解都存在的区域的一条可能的曲线 C_0, 其斜率满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{1}{2}u^2\right]_-^+}{[u]_-^+} = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

现在回到由 p. 19 提及的同样经典的问题会产生不同的弱解. 在这个例子中, 如果偏微分方程乘以 u, 这样 $P = \frac{1}{2}u^2$, $Q = \frac{1}{3}u^3$, 弱解的定义会有不同, 曲线 C_0 的斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{1}{3}u^3\right]_-^+}{\left[\frac{1}{2}u^2\right]_-^+} \neq \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

因此, 将 Cauchy 问题经典解的定义推广到经典解不存在而出现激波的情形时, 会损失唯一性; 我们需要另外的条件来修复这个特性. 回到 (1.14) 可以更清楚地看到这一点, 设初始数据为

$$u(0,y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & y > 0. \end{cases}$$

u 连续而导数不连续的解为

$$u = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y/x, & 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 1, & x < y; \end{cases}$$

间断在特征投影 $y = 0$ 及 $y = x$ 上传播. 因此, 这是一个弱解. 但是, 另一个弱解是

$$u = \begin{cases} 0, & y < x/2, \\ 1, & y > x/2, \end{cases}$$

因为它在 $y = x/2$ 上满足激波条件 (1.27). 于是对这个 Cauchy 问题, 存在多个弱解, 而且实际上可以构造出很多这种不连续的弱解. 1.7 节表示出的担心可以被理

10 注意, (1.11) 的解在其上有奇性的曲线也不是特征线, 但当 $x \to \infty$ 时它的斜率趋近于特征线的斜率.

解, 我们需要其他的限制或者 "过滤" 来恢复唯一性. 这里包含多种可能性, 第 2 章最后将讨论其中的三种方法.

*1.8 多 自 变 量

我们将本章关于一阶标量拟线性方程的思想推广到多于两个自变量的情形, 并作一些简短的说明作为总结, 这些情形源自于很多应用. 例如, 在给定曲面 $z = F(x, y)$ 上的黏性流薄层, 其中 z 垂直向上, (1.1) 的适当推广是

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{3}cA\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(Ah^3\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Ah^3\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right) = 0, \tag{1.28}$$

这里 $A = (1 + (\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2)^{-1/2}$, c 与 (1.1) 中的相同, 沿地层的法向测量的流体厚度 h 是 x, y, t 的函数.

方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = c \quad 对\ m > 2, \tag{1.29}$$

其中 a_i 和 c 是 x_i 和 u 的函数. Cauchy 数据 (1.3) 的适当推广是给定 u 在 $m-1$ 维曲面上的值, 与 1.3 节所使用的相比较, 这种形式上的变化是合适的. 在处理 m 个坐标的问题时, 通常将曲面表示为函数的水平集合, 比如 $\phi(x_1, \cdots, x_m) = 0$, 而不是选择一个变量 x_m 表示成其他变量的函数.

我们知道在曲面 $\phi = 0$ 上的 u, 其决定了 u 的 $m-1$ 个切向导数, 再加上偏微分方程, 一般足以决定 $\phi = 0$ 上所有一阶导数 $\partial u/\partial x_i$. 为了解析地看出这是成立的, 将 (x_i) 变为新的变量 (ϕ, ψ_i), $i = 1, \cdots, m-1$, 其中 ψ_i 是不依赖于 ϕ 的函数. 于是, 由链式法则,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u}{\partial \phi} + \boldsymbol{a} \cdot \nabla u = c, \tag{1.30}$$

其中

$$\boldsymbol{a} \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\left(a_i \frac{\partial}{\partial \psi_j}\right).$$

因此, 只要

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \neq 0, \tag{1.31}$$

在 $\phi = 0$ 的法向上 u 的导数 $\partial u/\partial \phi$ 就可以得到. 按照 (1.5), 称 $m-1$ 维曲面 $\phi = 0$ 是 (1.29) 的 **特征曲面**, 如果

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0. \tag{1.32}$$

现在我们得到了关于 ϕ 的偏微分方程, 虽然我们并不需要同样地求解它[11]. 事实上, 由于 (1.32) 仅在 $\phi=0$ 上成立, 它实际上是一个 $(m-1)$ 个自变量的偏微分方程, 尽管是非线性的 (见习题 1.16).

容易看到这种特征定义方法与只有特征曲面才允许越过它 $\partial u/\partial x_i$ 有跳跃的定义相符. 事实上, 将 (1.30) 在 $\phi=0$ 两边的值相减得到

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial \phi}\right]_{\phi=0-}^{\phi=0+}=0.$$

然而这种间断在 $\phi=0$ 上传播的方法并不是 $m=2$ 时相应结果的平凡推广, 当 $m=2$ 时 Cauchy 数据在一点上的间断简单地沿过这一点的特征投影传播. 首先为了简单, 假设 a_i 是常数且 $c=0$. 这意味着特征曲面是超平面, 所以 ϕ 是 x_i 的线性组合. 那么, 将 (1.30) 关于 ϕ 求导并将 $\phi=0$ 两边的值相减, 得到

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right]_{\phi=0-}^{\phi=0+}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\left[\frac{\partial u}{\partial \phi}\right]_{\phi=0-}^{\phi=0+}=0. \tag{1.33}$$

于是, 在特征曲面 $\phi=0$ 上,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\left[\frac{\partial u}{\partial \phi}\right]_{\phi=0-}^{\phi=0+}=0.$$

即使当 a_i 和 c 依赖于 x_i 和 u, 还是容易看到 (1.33) 的右端可以像 (1.18) 一样简单地替换为与 $[\partial u/\partial\phi]_{\phi=0-}^{\phi=0+}$ 成比例的项. 于是我们得到有趣的结果, 系数 a_i 定义了特征曲面上的一个方向, 称为 *次特征方向*, 间断沿着这个方向传播. Cauchy 数据在初始曲面上一点的任一跳跃仅沿着过这点的一维次特征线传播. 进一步, 容易看到每一个 $(m-1)$ 维特征曲面由 $(m-2)$ 个次特征曲线参数族组成 ($m=3$ 的情形见图 1.9). 当然, 当 $m=2$ 时次特征简化为特征线; 对 $m>2$, 它们可以通过求 *次特征方程*

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=a_i \quad 及 \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=c, \tag{1.34}$$

再加上 Cauchy 数据

$$u=u_0(\boldsymbol{s}),\quad x_i=x_{i0}(\boldsymbol{s}),\quad \boldsymbol{s}=(s_1,\cdots,s_{m-1})$$

的参数解来构造.

例 1.5　求解

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=1$$

11 在第 8 章我们将看到如 (1.32) 的方程的解总可以化简为某些常微分方程组的解.

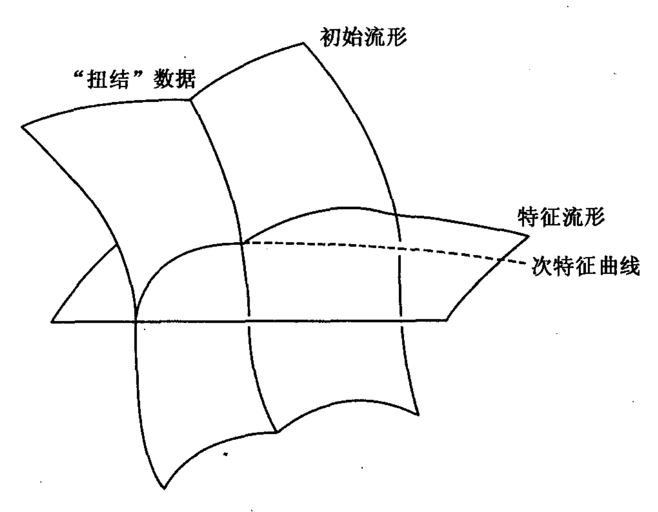


图 1.9　(1.29) 的特征曲面和次特征曲线

满足

$$u = 0 \quad \text{在 } x + y + z = 1 \text{ 上},$$

即

$$u_0(s_1, s_2) = 0, \quad x_0(s_1, s_2) = s_1, \quad y_0(s_1, s_2) = s_2, \quad z_0(s_1, s_2) = 1 - s_1 - s_2.$$

次特征方程是

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = z, \quad \dot{u} = 1,$$

于是参数解为

$$x = s_1 \mathrm{e}^t, \quad y = s_2 \mathrm{e}^t, \quad z = (1 - s_1 - s_2)\mathrm{e}^t, \quad u = t.$$

解的非参数形式是 $u = \log(x + y + z)$, 特征曲面由 $x\partial\phi/\partial x + y\partial\phi/\partial y + z\partial\phi/\partial z = 0$ 给出, 由 p. 14 描述的方法的推广, 容易看到它有通解 $\phi = F(x/y, x/z)$. 于是特征曲面是过原点的任意截面的锥面, 而次特征曲线是这些锥面的母线.

1.9 附　　录

给出微分方程通解中出现的任意常数和函数的数目列表是很有用的, 我们用这张列表作为本章的总结. 记 F 是由方程决定的函数, 而 G 是任意函数.

关于函数 $u(x)$ 的 常微分方程, 我们有

一阶方程: 通解是

$$F(u, x, G_1) = 0,$$

其中 G_1 是一个任意常数.

二阶方程: 通解是

$$F(u, x, G_1, G_2) = 0,$$

其中 G_1, G_2 是任意常数. 对于高阶方程, 通解形式按这种方法继续下去.

对 *偏微分方程*, 直观地知道解依赖于任意函数.

一阶方程, 两个自变量: 通解是

$$F_0(u, x, y, G_1(F_1)) = 0,$$

其中 G_1 是任意函数, $F_1 = F_1(u, x, y)$.

一阶方程, 三个自变量: 通解是

$$F_0(u, x, y, z, G_1(F_1, F_2)) = 0,$$

其中 G_1 是任意的, $F_i = F_i(u, x, y, z), i = 1, 2$.

二阶方程, 两个自变量: 通解是

$$F_0(u, x, y, G_1(F_1), G_2(F_2)) = 0,$$

其中 G_1, G_2 是任意的, $F_i = F_i(u, x, y), i = 1, 2$.

二阶方程, 三个自变量: 通解是

$$F_0(u, x, y, z, G_1(F_1, F_2), G_2(F_3, F_4)) = 0,$$

其中 G_1, G_2 是任意的, $F_i = F_i(u, x, y, z), i = 1, 2, 3, 4$.

同样地, 对高阶方程和更多的自变量, 通解形式类似. 但是我们将在第 3 章和第 5 章看到, 这张列表在函数或变量是复数的情形下会引起误导.

习　　题

1.1. 考虑 1.1 节中的校对模型, 初始时有 N 个错误. 证明解为

$$p(x, t) = (1 + (x - 1)\mathrm{e}^{-\mu t})^N.$$

这个结果是否与你读此书的经验相符? 本书的前两个版本已经校对超过 33 遍.

1.2. 假设 $\rho(x, t)$ 是沿马路单位长度上汽车数量密度, x 是沿马路的距离, 设 $u(x, t)$ 是汽车的速度 (超车是非法的). 假设没有汽车进入或离开马路, 证明如果 $a(t)$ 和 $b(t)$ 是任意两辆车的位置 (于是 $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = u(a, t)$, $\mathrm{d}b/\mathrm{d}t = u(b, t)$), 则

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t)\mathrm{d}x$$

与时间无关. 由此推出, 如果 ρ 和 u 充分光滑, 则

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0.$$

进一步假设 u 是 ρ 的已知递减函数 (为什么这是合理的?). 证明信息通过交通的传播速度 $\mathrm{d}(\rho u)/\mathrm{d}\rho < u$.

1.3. (i) 假设你可以得到特征方程

$$\frac{\dot{x}}{a(x,y,u)} = \frac{\dot{y}}{b(x,y,u)} = \frac{\dot{u}}{c(x,y,u)}$$

的一个积分 $f(x,y,u) = k =$ 常数, 且可解出 $u = F(x,y,k)$. 假设你还足够幸运地在 $k =$ 常数时能够对 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = b(x,y,F)/a(x,y,F)$ 进行积分, 解释如何找到特征方程的第二个积分.

(ii) 称函数 a 是 *齐次* 的, 如果对所有 λ 及某个数 α,

$$a(\lambda x, \lambda y, \lambda u) \equiv \lambda^{\alpha} a(x,y,u).$$

证明如果 a, b, c 都是齐次函数, 且具有相同的 α, 那么两个特征方程可以简化为单个一阶标量微分方程.

提示. 注意到 a, b, c 都是仅依赖于 u/x 和 y/x 的函数, 乘上 x^{α}, 记 $u = xv(\xi)$, 其中 $\xi = y/x$, 得到关于 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\xi$ 的方程, 可作为仅是 v 和 ξ 的函数.

1.4. 考虑方程 (1.12), 特征方程的两个首次积分由 $f(x,y,u) = x+y+u =$ 常数及 $g(x,y,u) = xyu =$ 常数给出, 通解为 $G(f,g) = 0$. 假设初始数据是 $x_0(s) = y_0(s) = u_0(s) = s$. 证明 G 的一个选择是 $G(f,g) = (f/3)^3 - g$, 于是解可以由 $((x+y+u)/3)^3 - xyu = 0$ 隐式地给出.

1.5. 对特征方程进行积分, 证明

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 2xu$$

满足当 $x = 0$ 及 $1 \leqslant y \leqslant 2$ 时 $u = y^3$ 的解是

$$u = \frac{(y+x^2)^4}{y}.$$

在 $y > 0$ 上解的定义域是什么?

1.6. 对特征方程进行积分, 证明

$$x^3\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

满足

$$u = \frac{1}{1+x^2} \quad 在\ y=0,\ -\infty < x < \infty\ 上$$

的解是

$$u = \frac{1-2x^2y}{1+x^2-2x^2y}.$$

证明尽管数据对所有的 x 都有定义, 但是解在 $y > 1/2x^2$ 上没有定义.

1.7. 假设

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} - yu\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$$

及 $x=y$ 上 $u=f(x)$. 证明当

(i) $f(x)=0, u=\pm(x-y)$,

(ii) $f(x)=\sqrt{2}x, u=\pm\sqrt{x^2+y^2}$,

(iii) $f(x)=x, u=\pm\sqrt{x^2-xy+y^2}$,

对 $xy>0$, 要确定在第一象限中是什么符号, 在第三象限中是什么符号. 解释为什么情形 (i) 的解不唯一, 为什么当 $xy<0$ 时解不能定义. 从几何的角度描述曲面 $z=u(x,y)$. 改变什么变量可以使问题变得更加容易?

1.8. 导出方程

$$(x+u)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u + y^2$$

参数形式的解

$$\begin{aligned} y &= y_0(s)\mathrm{e}^t, \quad u = (u_0(s) - y_0^2(s))\mathrm{e}^t + y_0^2(s)\mathrm{e}^{2t}, \\ x &= (x_0(s) - y_0^2(s))\mathrm{e}^t + (u_0(s) - y_0^2(s))t\mathrm{e}^t + y_0^2(s)\mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

假设在 $y=1, -\infty < x < \infty$ 上, $u=x$. 证明

$$u(x,y) = \frac{x-y^2}{1+\log y} + y^2.$$

u 的定义域是什么?

1.9. 证明如果

$$-y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y),$$

则在远离 $x=y=0$ 处,

$$u = \int_0^\theta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta + F(r), \tag{1.35}$$

其中 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $F(r)$ 是任意的. 假设 $\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0$. 证明 u 对任何 $(x,y) \neq (0,0)$ 有定义. 进一步假设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 解析, 从而有 Taylor 级数展开, 它在原点的邻域中收敛于 f. 证明如果 u 在原点也是解析的, 那么

$$u = \frac{1}{2}\left(\int_{\alpha}^{\theta} + \int_{\pi+\alpha}^{\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right) + G(r^2),$$

其中 $G(z)$ 在 $z = 0$ 处解析, α 是任意的.

提示. 在 (1.35) 中令 $f = r\sin\theta$.

(感谢 S. Dobrokhotov 提供这个例子).

*1.10. 在习题 1.2 中取 $u = 1 - \rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. 如何解释 $\rho = 1$? 证明 u 和 ρ 在特征线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - 2\rho$$

上是常数, 并证明对于激波 $x = S(t)$ 速度的 Rankine-Hugoniot 条件为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{[\rho(1-\rho)]_-^+}{[\rho]_-^+}.$$

在交通灯 $x = 1$ 处建立了一个队列, 当转为绿灯时, 在 $t = 0$ 处,

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 1, \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

证明初始特征线是直线

$$\begin{array}{ll} x - s = t & \text{在 } x < t \text{ 或 } x > t+1 \text{ 上, 其中 } \rho = 0, \\ x - s = (1-2s)t & \text{在 } t < x < 1-t \text{ 上, 其中 } \rho = s, \\ x - 1 = (1-2s)t & \text{在 } 1-t < x < 1+t \text{ 上, 其中 } \rho = s = (t-x+1)/(2t). \end{array}$$

推出当 $t = 1/2$ 时 $x = 1/2$ 处第一次出现冲突, 然后出现激波满足

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{S+t-1}{2t}.$$

1.11. 证明方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

满足在 $x = y = s$ 上 $u = s/2$ 对 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 的解是

$$u = \frac{4x - 2y - x^2}{2(2-x)},$$

且特征线是

$$y=\frac{x^2}{2}+c(2-x),\quad c=\text{常数}.$$

解的定义域是什么?

*1.12. 证明如果

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0\quad \text{对 } x>0$$

满足

$$u(0,y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0 \text{ 或 } y\geqslant 1,\\ y(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

则对 $0\leqslant s\leqslant 1$, 特征线是

$$y-s=s(1-s)x$$

且

$$u=s(1-s).$$

证明同样有

$$u^2x^2+u(1+x-2xy)+y^2-y=0,$$

且对充分小的 x, u 是连续的. 特征线的包络是 $y-s=s(1-s)x$ 关于 s 求偏导再消去 s. 由此得到 $4xy=(x+1)^2$, 并推出在 $x=y=1$ 的激波形式.

*1.13. 沿墙壁流下的油漆厚度 $u(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad \text{对 } t>0.$$

证明特征线是直线且在激波 $x=S(t)$ 上的 Rankine-Hugoniot 条件是

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\left[\frac{1}{3}u^3\right]_-^+}{[u]_-^+}.$$

在 $t=0$ 上应用于油漆带, 使得

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } x>1,\\ 1, & 0<x<1.\end{cases}$$

证明对充分小的 t,

$$u=\begin{cases}0, & x<0,\\ (x/t)^{1/2}, & 0<x<t,\\ 1, & t<x<S(t),\\ 0, & S(t)<x,\end{cases}$$

其中激波是 $x=S(t)=1+t/3$. 解释为什么这个解在 $t=3/2$ 处发生改变, 然后证明

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{S}{3t}.$$

$*1.14.$ 沿次特征线积分, 证明如果

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=y$$

满足在 $z=0, -\infty<x,y<\infty$ 上 $u=x$, 那么

$$z=t,\quad y=\frac{t^2}{2}+s_2,\quad u=\frac{t^3}{6}+s_2t+s_1,\quad x=\frac{t^4}{24}+\frac{s_2t^2}{2}+s_1(t+1).$$

推出

$$u=\frac{24x-12yz^2+5z^4}{24(1+z)}+yz-\frac{1}{3}z^3$$

且定义域由 $z=-1$ 界定.

$*1.15.$ 证明 (1.28) 在 (x,y) 平面上的次特征投影是曲面 $z=F(x,y)$ 的最速下降线, 即它们正交于 F 的水平曲线.

$*1.16.$ 假设在 $\phi=0$ 上满足 (1.32), 且方程 $\phi=0$ 可以局部地解出为 $x_m=\psi(x_1,\cdots,x_{m-1})$. 证明微分方程

$$\sum_{i=1}^{m-1}a_i\frac{\partial\psi}{\partial x_i}-a_m=0$$

在 $(x_1,\cdots,x_{m-1})$ 空间中成立, 其中 $a_i=a_i(x_1,\cdots,x_{m-1},\psi)$.

$*1.17.$ 假设 $u(x,y)$ 满足 $\partial u/\partial x=0$ 且

$$u(0,y)=\begin{cases}-1, & y<0,\\ +1, & y>0.\end{cases}$$

现将 u 的偏微分方程改为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial y^2},$$

对小正数 ε. 验证这个方程的解是

$$u(x,y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y/2\sqrt{\varepsilon x}}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$$

(这将在第 6 章导出). 证明当 $\varepsilon\to0$ 时,

$$u\to\begin{cases}-1, & y<0,\\ 1, & y>0,\end{cases}$$

对 $x\geqslant0$, 这个结果与要求 u 仅在特征线上有间断得到的结果相同. (这种对激波光滑化的方法将在第 2 章中作进一步研究.)

第 2 章　一阶拟线性方程组

2.1　动机与模型

与标量情形相比, 向量偏微分方程组可以对更多的物理现象建立模型. 例如, 对第 1 章中简单的运动波动模型, 可研究波同时有向后和向前传播的情形. 一个著名的例子是 浅水波, 在水平的河床上一具有深度为 $h(x,t)$ 的自由曲面的流体薄层, 重力与惯性力平衡, 沿 x 轴流动 (图 2.1(a)). 设流体密度为常数 ρ. 则如果假设压力 p 近似为静水压力, 设其等于 $\rho g(h-y)$, 河床为 x 轴, 由河水的水平力平衡[12], 近似单向流的速度 $u(x,t)$ 满足

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2.1}$$

同时如同 1.1 节中的油漆模型, 由质量守恒定律得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)=0. \tag{2.2}$$

这样就得到一个关于 u 和 h 的 2×2 方程组.

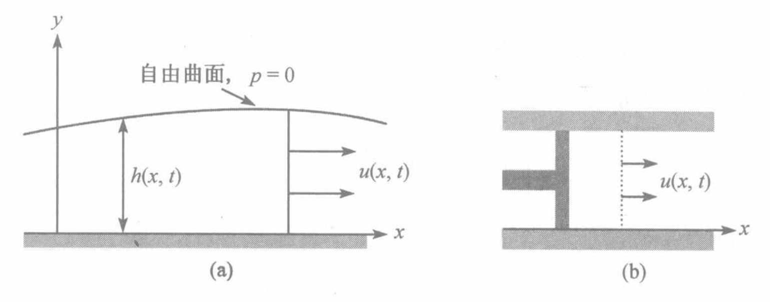


图 2.1　(a) 浅水流开放河道; (b) 由活塞产生的一维不定常气体流

浅水方程组可以视为如下的 3×3 的关于压力 p, 密度 ρ (现在是可变的) 和速度 u 的一维不定常气体动力学方程组 (图 2.1(b)) 的一种特殊情况 (见习题 2.1)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.3}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{p}{(\gamma-1)\rho}+\frac{1}{2}u^2\right)+\frac{\partial}{\partial x}(pu)=0, \tag{2.4}$$

---

12 流体加速度不只是速度对时间的导数; 需要增加对流项 $u\partial u/\partial x$, 因为事实上当流体从一个地方移动到另一个地方会加速.

其中 γ 是大于 1 的常数. 这些方程分别表示质量守恒, 力平衡以及能量守恒. 同样由守恒律可对关于速度 (u, v) 的 2 维定常气体动力学建立模型, 得到 4×4 方程组

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \tag{2.5}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.6}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2+v^2)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(pu) + \frac{\partial}{\partial y}(pv) = 0. \tag{2.7}$$

在这两个气体动力学模型中, 最后一个方程都表示所有对气体施加的压力做的功都变成了热焓和动能[13]. 进一步的推广是允许在气体中出现化学反应, 此时 (2.4) 和 (2.7) 包含非零右端项, 通常表示反应物浓度变化速率的方程. 本章后面将考虑右端项在空间中局部化的简单情形, 这可以对 "爆炸" 进行建模, 有时它会伴随着激波.

显然, (2.5)~(2.7) 是复杂的拟线性方程组, 所以考虑关于常数解 $u = U$, $v = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ 作 "线性化" 得到更简单的模型是富有启发性的. 第 7 章将讨论这类线性化的更多细节. 可以证明 (2.7) 通常意味着 $p/\rho^\gamma =$ 常数 $= p_0/\rho_0^\gamma$, 于是记 $u = U + \overline{u}$, $v = \overline{v}$, $p = p_0 + \overline{p}$, $\rho = \rho_0 + \overline{\rho}$, 并忽略带横杠的量的二次项, 得到

$$\rho_0\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right) + U\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x} = 0, \tag{2.8}$$

$$U\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x} = 0, \tag{2.9}$$

$$U\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y} = 0, \tag{2.10}$$

其中 $a_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ (见习题 2.2); 后面将看到 a_0 表示声音在空气中的速度.

来自于很多工业过程的一阶方程组没有被很好地研究. 在玻璃工业中有很多丰富的材料, 例如, 对截面积为 $A(x,t)$ 的光纤以速度 $u(x,t)$ 作单向牵引可以归结为所谓 "伸展流" 的模型 (图 2.2). 这里主要的黏滞力不是一种剪应力 (如第 1 章中的油漆模型), 而是一种与 $\partial u/\partial x$ 成正比的 *正应力* σ_x, 设其为与 $A\partial u/\partial x$ 成正比的力 (图 2.3). 忽略玻璃的惯性力, 对动量平衡 $\partial\sigma_x/\partial x = 0$ 进行积分, 得到

$$cA\frac{\partial u}{\partial x} = T(t), \tag{2.11}$$

其中 T 为纤维的张力, 常数 c 与玻璃的 *黏性* 成正比, 黏性是剪应力和张力的阻力的度量[14]. 质量守恒通常表示为

13 我们又假设气体遵从所谓的 *理想气体定律*, 其温度与 p/ρ 成正比.

14 在 1.1 节的油漆模型中, 对应的常数与黏性成反比.

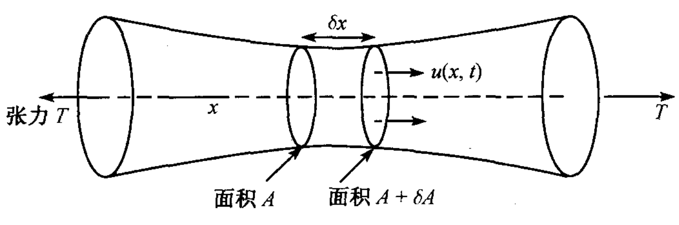


图 2.2　纤维牵引

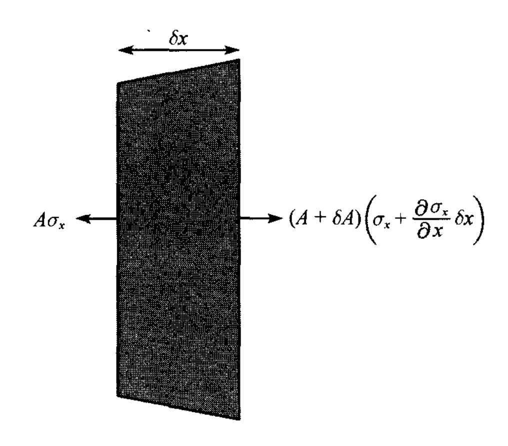


图 2.3　纤维牵引：力平衡

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Au)=0, \tag{2.12}$$

从而得到有点不太常规的一阶方程组, 其中 T 由边界条件决定.

当我们考虑厚度为 $2h(x,y,t)$, 关于 (x,y) 平面对称的玻璃片时 (见图 2.4), 会出现更加有趣的现象. 在 (x,y) 平面中出现 2 维剪切速度 (u,v). 沿薄片厚度进行积分, 由正应力和剪应力 σ_x, σ_y 和 τ 的动量平衡, 有

$$\frac{\partial(h\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(h\tau)}{\partial y}=\frac{\partial(h\tau)}{\partial x}+\frac{\partial(h\sigma_y)}{\partial y}=0. \tag{2.13}$$

对图 1.1(b) 和图 2.3 模型的推广可以导出应力

$$\begin{gathered}h\sigma_x=2h\left(2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad h\sigma_y=2h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ h\tau=h\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\end{gathered} \tag{2.14}$$

为了方便, 这里的黏性常数设为 1. (2.3) 中的质量守恒方程推广为

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)+\frac{\partial}{\partial y}(hv)=0, \tag{2.15}$$

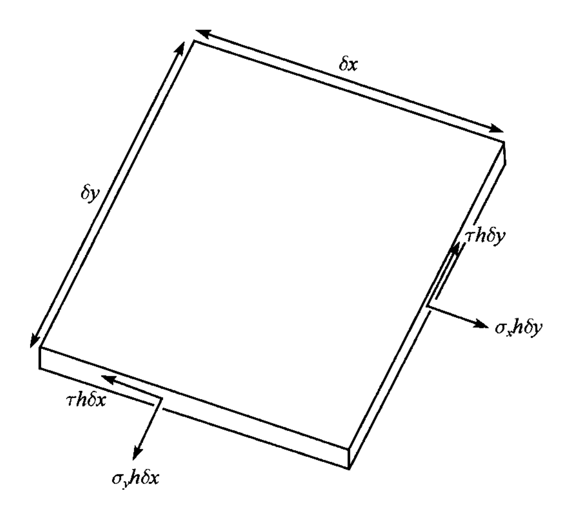


图 2.4 玻璃片拉伸：力平衡

这样得到一个 6 维方程组 (2.13)~(2.15).

其他工程过程中的实例如下.

粒子材料流

在无重力的情形下, 无惯性力的 2 维粒子材料的力平衡也可简化为 (2.13) 式, 其中 $h = 1$ (见图 2.5). 假设因为应力处处很强, 可以克服摩擦而发生流动. 用摩擦的 Coulomb 定律进行分析, 可以发现应力必须满足的一个简单的 "屈服准则". 这就是说我们需要确认粒子材料流的每一点都有 "滑移面", 其上的 (摩擦) 剪应力与正应力之比等于摩擦系数, 比如 $\tan\phi$, 而在其他平面上的比例小于 $\tan\phi$.

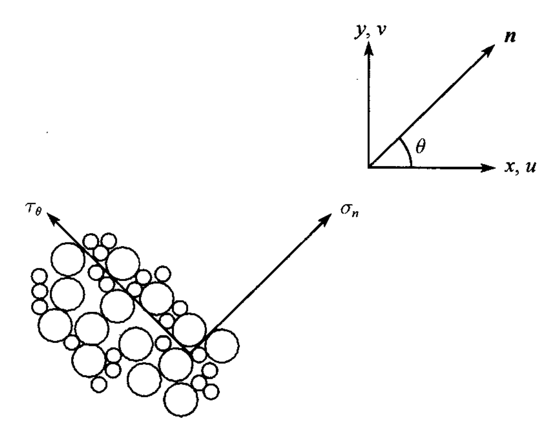


图 2.5 粒子介质流; σ_n 是正应力, τ_θ 是法向为 $\boldsymbol{n}$ 的平面上的剪应力

虽然这个条件容易用语言表示, 仍需要用习题 2.3 的计算将之翻译为

$$\tau = -\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\sin\phi\sin\left(\arctan\left(\frac{2\tau}{|\sigma_x - \sigma_y|}\right)\right), \tag{2.16}$$

上式与 (2.13) 一起给出了关于 σ_x, σ_y 和 τ 的封闭模型.

填料床和液化床中的流动

在化学工程中有很多一阶偏微分方程组的实际应用. 除了第 6 章要介绍的反应器模型外, 几乎每个过程都包含热或质量从一种材料状态转换成另一种状态, 从而导致模型中包含关于时间和空间的一阶导数.

如果事先知道材料的状态, 会出现一种最简单的情形. 例如, 在固体粒子的填料床中通过流体. 典型地, 考虑热交换再生成器, 温度为 θ_g 的冷气体在其中加热; 气体以速度 U 通过温度为 θ_s 的稳定的固体粒子, 它本身可能已被另一种热气体加热. 于是, 在一维情形下, 忽略热传导, 需写出的薄气体层中相邻粒子之间的平衡只有热对流和热交换的平衡. 对气体来说, 这导致平均热平衡形式

$$\rho_g c_g\left(\frac{\partial\theta_g}{\partial t} + U\frac{\partial\theta_g}{\partial x}\right) = h(\theta_s - \theta_g), \tag{2.17}$$

对于粒子有

$$\rho_s c_s\frac{\partial\theta_s}{\partial t} = h(\theta_g - \theta_s), \tag{2.18}$$

其中 ρ 和 c 分别表示密度和比热, h 是实验决定的 "热交换系数".

两种相态都运动时会出现更加复杂的情形, 例如对液化床, 固定粒子相态的重力, 被床底部多孔 "分配器" 中垂直流出的液体的牵引力所克服. 这个过程的力学建模是非常困难的, 但如果我们仅对液化床中液体的混合性质建模感兴趣, 通过观察, 注意到在很多情况下, 气体按两种模式流动. 除了已假设的在回热器中多孔介质粒子间的流动是大的, 通常为肾形的几乎是纯气体的气泡是从分配器不断上升到液化床表面. 记这两种模式下的气体密度分别为 c_a 和 c_b, 由质量守恒定律

$$f_a\left(\frac{\partial c_a}{\partial t} + v_a\frac{\partial c_a}{\partial x}\right) + k(c_a - c_b) = 0, \tag{2.19}$$

$$f_b\left(\frac{\partial c_b}{\partial t} + v_b\frac{\partial c_b}{\partial x}\right) + k(c_b - c_a) = 0, \tag{2.20}$$

其中 f_a 和 f_b 分别是孔隙空间和气泡所占体积的比例, v_a 和 v_b 是两种模式下气体的速度, k 是质量转换系数, 所有这些参数都假设为常数. 这是所谓的气泡液化床混合的 Van Deemter 模型, 显然它是 (2.17) 和 (2.18) 的推广.

如此之多的偏微分方程模型由一阶偏导数组成是毫不奇怪的, 因为质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律通常可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{密度}) + \nabla\cdot(\text{流量}) = \text{源},$$

进一步用于描述材料的力学和热力学行为的本构定律仅包含关于物理变量的一阶导数. 在这些问题之上, 包含电磁学的问题要求与 Maxwell 方程结合, 其基本形式是电场和磁场关于空间和时间一阶偏导数之间的关系式. 在建模中自然出现高阶导数的常见的物理情形仅有量子力学, 将在第 8 章进一步进行讨论.

鉴于如此强烈的动机, 我们现在对 2 个自变量的一阶方程组建立框架. 可叹的是, 上述例子 (实际上是任何非线性偏微分方程组) 很少能像第 1 章中的方程或其本质过程可以写成高阶标量方程的例子那样进行充分的分析. 因此, 本章不提供任何特殊的偏微分方程组解的精确行为; 而是在开始研究具体的解析或数值方法之前, 必须先对如何估计所有这些方程进行描述.

2.2 Cauchy 数据和特征线

我们先试图将第 1 章的想法推广到 2 维或更高维的一阶实方程组, 在 2.6 节前只考虑两个自变量 (x,y) 的情形. 先考虑 2×2 方程组, 希望寻求含分量 u_1 和 u_2 的向量函数 $\boldsymbol{u}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}=\boldsymbol{c}, \tag{2.21}$$

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是 2×2 矩阵, $\boldsymbol{c}$ 是有 2 个分量的向量, 所有分量都是 x, y, u_1 和 u_2 的函数. 3 维几何解释是找 2 个曲面 $u_1=u_1(x,y)$ 和 $u_2=u_2(x,y)$, 期望给出适当的边界数据, 使得每个曲面通过各自的初始曲线. 这个边界条件可以写成参数形式

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0(s),\quad x=x_0(s),\quad y=y_0(s)\quad 对\ s_1\leqslant s\leqslant s_2.$$

这一边界数据意味着 $\boldsymbol{u}$ 的 2 个偏导数必须满足

$$\boldsymbol{u}_0'=x_0'\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}+y_0'\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}, \tag{2.22}$$

其中 $'$ 仍表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$. 这些偏导数在边界曲线上可由 (2.21) 和 (2.22) 4 个方程唯一决定, 如果

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22}\\ x_0' & 0 & y_0' & 0\\ 0 & x_0' & 0 & y_0' \end{vmatrix}\neq 0\quad 对\ s_1\leqslant s\leqslant s_2. \tag{2.23}$$

记 $y_0'=\lambda x_0'$, 前两列减去后两列的适当倍数, 可以得到

$$\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{A})\neq 0. \tag{2.24}$$

条件 (2.24) 在一维情形显然可以简化为 (1.5), 它对 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 矩阵时的一阶方程组也是成立的. 对于标量情形, 只要满足 (1.5), 第 1 章的方法足以将问题化简为性质很好的常微分方程组. 于是如果假设 Lipschitz 连续, **标量问题是适定的**, 即

- 解存在;
- 解唯一;
- 解连续依赖于数据.

然而, 我们很快会看到在 $n>1$ 的向量情形, (2.24) 不再能确保适定性 (现在的数据是 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{u}$ 的 Cauchy 数据). 令人惊奇的是, 它甚至不能保证在线性问题中这一性质成立, 而这种奇性在 1.4 节和 1.5 节中是不会出现的. 于是, 对方程组 (2.21) 提出适当的边界条件必须予以特别的关注.

在第 1 章中, 特征线由特征常微分方程组 (1.7) 定义, 但无法平凡地推广到高维情形. 然而, 我们可以推广 (1.5) 后面提到的想法, 如果 Cauchy 数据在特征线的投影曲线上给出, 那么偏导数在这条曲线上不能唯一确定. 在一阶标量问题中, Cauchy 数据定义沿曲线方向的偏导数, 而曲线的法向偏导数在特征投影上无法定义. 于是利用这个性质定义方程组的 **特征线** (投影), 以后在论及方程组的特征线投影时将略去投影一词[15].

根据这个定义, $\boldsymbol{A}\partial\boldsymbol{u}/\partial x+\boldsymbol{B}\partial\boldsymbol{u}/\partial y=\boldsymbol{c}$ 的特征线是一条曲线 $(x(t),y(t))$, 使得在曲线上满足方程且

$$\dot{x}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}=\dot{\boldsymbol{u}}\tag{2.25}$$

关于 $\partial\boldsymbol{u}/\partial x$ 和 $\partial\boldsymbol{u}/\partial y$ 没有唯一解, 就是说这 4 个方程的左端是线性相关的. 这只要在计算 (2.24) 时用 t 代替 s; 于是 $(x(t),y(t))$ 是特征线如果

$$\det(\boldsymbol{B}\dot{x}-\boldsymbol{A}\dot{y})=0.\tag{2.26}$$

这是关于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\dot{y}/\dot{x}$ 的二次表达式, 因此在每一点上可能给出不是实的特征方向, 这不同于标量情形. 于是, 我们已经看到与第 1 章所考虑的情形基本的不同点: 当特征线由实的变成复的后将出现 **类型变化** (下一章给出精确的概念), 当飞行器穿过音障时自然会出现新的现象[16]. 这可以从下面对方程组 (2.8)~(2.10) 的简单计算中看到, 我们在本书的后面将重新回到这个例子. 在这个例子中, $\boldsymbol{u}$ 有 3 个分量, 但结果 (2.26) 可平凡地推广到任意维数.

15 一阶标量情形下的一个等价定义是 (1.17), 如果 u 的一阶导数仅有跳跃间断, 则跳跃必沿着特征线. 我们简短地对照一下. 事实上, 对 2 维方程组的几何解释是在 4 维空间中进行的, 不像标量情形可以容易地显示出来.

16 对第 1 章的方法的任何推广都会有进一步的障碍, 因为在 4 维实空间中, 即使是仅有 2 个自变量的方程, 也必须考虑复特征线.

例 2.1 (2 维稳定气体动力学) 对线性化气体动力学模型 (2.8)~(2.10), 有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\rho_0 & 0 & U\\ U & 0 & a_0^2/\rho_0\\ 0 & U & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \rho_0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_0^2/\rho_0\end{pmatrix},\quad \text{其中 } \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\overline{u}\\ \overline{v}\\ \overline{\rho}\end{pmatrix}.$$

因此, $\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{A})=\lambda a_0^2U(\lambda^2+a_0^2-U^2)$, 且仅当 $U^2>a_0^2$ 时有 3 个实特征线. 当这个不等式成立时, 线性化得到的常状态为 *超音速*, 这种流的特征线为水平线 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$ 和所谓的 "Mach 线" $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\pm(U^2-a_0^2)^{1/2}$.

我们将寻找现实中有意义的或如第 3 章中更一般的特征线. 注意在 (2.25) 中仍隐含着很多信息. 由于 (2.21) 和 (2.25) 沿特征线是线性相关的, 沿这条曲线有进一步的关系式

$$P\dot{u}_1+Q\dot{u}_2=R\dot{x}, \tag{2.27}$$

其中 P, Q, R 是 $\boldsymbol{u}, x, y$ 的函数 (习题 2.7). 这表示 (2.21) 和 (2.25) 右端的相同的线性组合必为零.

注意 (2.27) 可以通过 Fredholm *二择性定理* 形式地得到, 在本书的后面将遇到很多这种形式, 这里给出简短的描述. 二择性定理产生于实线性代数方程

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{2.28}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是列向量, $\mathcal{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵. 设存在行向量[17] $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 使得

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}, \tag{2.29}$$

即零是 $\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值 (因此也是 $\mathcal{A}$ 的特征值), $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 是相应的左特征向量. 然后, 对 (2.28) 乘以 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$, 显然 $\boldsymbol{x}$ 仅当

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=0$$

时存在. 于是有二择性定理: 要么 $\mathcal{A}$ 是可逆的, 从而 $\boldsymbol{y}$ 必为零向量, 而 $\boldsymbol{x}$ 是唯一的; 要么 $\mathcal{A}$ 是不可逆的, 且如果 $\boldsymbol{x}$ 存在的话, 必存在非零向量 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b}$ 与所有这种 $\boldsymbol{y}$ 正交. 对于后一种情形, $\boldsymbol{x}$ 不是唯一的, 因为对 $\mathcal{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任意解, 即 $\mathcal{A}$ 对应于零特征值的任意右特征向量都可以加上去.

现在用一种以后非常有用的方法重新描述二择性定理. 暂时忘记矩阵是可以转置的, 而简单地假设存在一个矩阵 $\mathcal{A}^*$, 使得对所有的 $\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{w}$,

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}^*\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\boldsymbol{z}. \tag{2.30}$$

令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$. 由于 $\boldsymbol{z}$ 是任意的, $\boldsymbol{y}$ 满足 (2.29) 当且仅当 $\mathcal{A}^*\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$. Fredholm

17 这里及以后, 我们用上标 T 表示向量或矩阵的转置.

二择性说, 为确保存在性, $\boldsymbol{b}$ 必须正交于被 $\mathcal{A}^*$ 消除的向量. 当然, 矩阵 $\mathcal{A}^*$ 就是 $\mathcal{A}$ 的转置, 但作为 $\mathcal{A}^*$ 的定义 (2.30), 其优点是避免使用转置, 转置不易推广到线性偏微分算子. 但是, (2.30) 提供的二择性形式是第 4~6 章求解线性偏微分方程许多思想的基础.

条件 (2.27) 和 (2.26) 对应于标量情形中的特征方程组 (1.7), 但现在它们不再足以确定 u_1 和 u_2. 事实上, (2.27) 表示了两个未知函数 u_1 和 u_2 的一个方程, 它仅沿特征线 "可积"[18], 从而给出特殊情形下 u_1 与 u_2 的一种关系. 即使对线性问题, 由 (2.26) 积分可以得到实特征, P, Q 和 R 能够计算得到关于 t 的函数, (2.27) 一般仍不足以决定 u_1 和 u_2, 除非 $R=0$ 或者比例 Q/P 不依赖于 t. 对非线性方程组, P, Q 和 R 是 u_1 和 u_2 的函数, 而不是 x 和 y 的函数, 因此 (2.27) 可积当 $R=0$ 或者

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{P}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{Q}{R}\right).$$

关于 $\boldsymbol{u}$ 的函数沿特征线满足 (2.27), 称为 Riemann *不变量*. 它们的存在建立了在问题的结构中可供考虑的简单情形, 在某些特殊情形中, 它给出这类方程简单函数的解. 特别幸运的是, 这些情形包含了气体动力学方程组 (2.3)~(2.7) 许多与物理有关的解. 不过, 在一般情形下, (2.27) 的欠定性解释了为什么偏微分方程通常不能简化为一阶常微分方程组. 一般只有对仅含一阶导数的标量方程, 这种简化才有可能.

最后, 我们指出, 如 1.6 节, 方程组 (2.21) 的特征线的另一种定义是 (x,y) 平面中一条曲线, 越过这条曲线 $\partial\boldsymbol{u}/\partial x$ 和 $\partial\boldsymbol{u}/\partial y$ 可能是间断的. (1.16) 和 (1.17) 的推广是

$$\boldsymbol{A}\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right]_-^+ + \boldsymbol{B}\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\right]_-^+ = \boldsymbol{0} = \dot{x}\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}\right]_-^+ + \dot{y}\left[\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}\right]_-^+,$$

于是 (2.26) 容易被修正.

2.3 Cauchy-Kowalevskaja 定理

现在讨论关于一般的含有 n 个因变量和 2 个自变量的一阶拟线性方程组

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}=\boldsymbol{c}$$

解的存在性的最重要的定理. 在 $x=0$ 上给出 Cauchy 数据, 关键是这不是特征线. 在条件 (2.24) 中令 $x'=0$, 有 $\det(x'\boldsymbol{B}-y'\boldsymbol{A})\neq 0$, 则 $x=0$ 不是特征线的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的, 于是由方程组可解出 $\partial\boldsymbol{u}/\partial x$. 进一步, 两边乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$, 通过

18 (2.27) 积分的意义是一个有趣的问题, 特别是在考虑多个自变量方程的时候, 2.4 节和第 9 章还要回到这个问题.

引入两个新的因变量 (详见习题 2.5) 使方程组的维数变为 $n+2$, 从而可以去掉非齐次项 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{c}$, 同时使得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是自治的 (即不依赖于 x 和 y).

于是我们只需考虑齐次自治方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}, \tag{2.31}$$

其中 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{D}$ 是 $n\times n$ 矩阵[19]. 考察 (2.31) 在 $x>0$ (为确定起见) 满足 Cauchy 数据

$$\boldsymbol{u}(0,y)=\boldsymbol{u}_0(y) \tag{2.32}$$

的 Cauchy 问题 的解, 其中 $\boldsymbol{u}_0(y)$ 是 y 的可微函数. 边界设为 y 轴是不失一般性的; 如果 $\boldsymbol{u}$ 的分量给定在其他某些充分光滑的弧上, 可以作变量变换使这条弧变为 $x=0$, 当然只要它处处不平行于特征线, 于是 $\boldsymbol{u}$ 关于曲线的法向导数点点可以计算.

如果给定 $\boldsymbol{u}_0$, 直接微分可得 $\partial\boldsymbol{u}/\partial y(0,y)$, 于是由 (2.31) 可得 $\partial\boldsymbol{u}/\partial x(0,y)$. 类似地, 假设求导都是允许的, 可以用 $\boldsymbol{u}_0$ 的高阶导数及偏微分方程 (2.31) 计算出 $\boldsymbol{u}$ 的所有高阶导数. Cauchy-Kowalevskaja 定理给出了使二元 Taylor 级数展开在 $x=0$ 任意点上收敛且唯一的条件. 在给出证明的大意之前, 我们对定理的目的作一些注解, 着重指出其严重的局限性.

首先回顾一下常微分方程的类似定理是 Cauchy-Picard 定理, 它将问题重写为积分方程, 证明只需要相对弱的条件: 被积函数是 $\boldsymbol{u}$ 的 Lipschitz 连续函数. 这种积分方程形式对偏微分方程通常是行不通的, 我们只能指望对 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 加上更强的条件, 而得到比 Cauchy-Picard 定理所得到的定义域相应更弱的结果. 其次, 考察一个看上去很简单的例子

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

即

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

具初值

$$u(0,y)=f(y),\quad v(0,y)=0.$$

这是 Cauchy-Riemann 方程, $u+\mathrm{i}v$ 是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数, 于是解为

$$u+\mathrm{i}v=f(-\mathrm{i}z)$$

19 如引言所述, 一般的一阶标量方程可以化为拟线性方程组, 从而可化为 (2.31) 的形式, 这样可解得关于 x 的一阶导数. 这对 n 阶方程同样是正确的, 但如习题 2.4 所指出的, 方程组的维数可能会超过 n. 我们将看到在考虑解的存在唯一性时, (2.31) 比原始形式 $\boldsymbol{A}\partial\boldsymbol{u}/\partial x+\boldsymbol{B}\partial\boldsymbol{u}/\partial y=\boldsymbol{c}$ 更具优势.

(在 $x=0$ 上 $-iz=y$), $f(y)$ 是 y 的 *实解析函数*, 即有 Taylor 级数展开, 在 $y=0$ 的邻域中收敛于 f[20]. 然而, 如果 f 在一点不解析, 如 $f(y)=|y|$, 考虑 $y=0$ 附近的情形, 那么在原点的任一邻域中 Cauchy 问题都没有 *解析解*. 同样地, 例如, 如果 $f(y)=\varepsilon/(y^2+\delta^2)$, 其中 $\varepsilon,\delta>0$, 则

$$u+\mathrm{i}v=\frac{\varepsilon}{\delta^2-z^2}$$

且

$$u=\frac{\varepsilon}{2\delta}\left(\frac{\delta-x}{y^2+(x-\delta)^2}+\frac{\delta+x}{y^2+(x+\delta)^2}\right).$$

于是, 不管 ε 多么小, u 都不存在, 因为在 $y=0, x=\delta$ 上 u 趋于无穷大, 从而 u 的定义域的边界可以任意接近于 $y=0$. 这样, Cauchy-Riemann 方程组提供了 (2.24) 后面定义的不适定的一个典型例子.

这个例子着重于下面 Cauchy-Kowalevskaja *定理* 指出的 *解析* 和 *局部* 的概念.

Cauchy-Kowalevskaja 定理 若 $\boldsymbol{u}_0(y)$ 在 $y=0$ 解析, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ 在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0(0)$ 解析, 则 Cauchy 问题 (2.31) 和 (2.32) 在 $x=y=0$ 附近存在唯一的局部解析解[21].

局部地 一词是相当重要的, 它避免了定理涉及适定性问题.

我们仅给出概略的证明, 以避免烦琐的代数, 更详细的细节可参见 [12]. 先考虑标量情形, (2.31) 和 (2.32) 变成

$$\frac{\partial u}{\partial x}=d(u)\frac{\partial u}{\partial y},\quad u(0,y)=u_0(y), \tag{2.33}$$

暂时忽略 (2.33) 可以用第 1 章的方法显式求解的事实. 由于 d 和 u_0 是解析的, 因此可以写出收敛的 Taylor 展开

$$d(u)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nu^n,\quad u_0(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ny^n, \tag{2.34}$$

这里, 必要的话, 可从 u 中减去常数 $u_0(0)$. 我们的目的是证明 u 本身也有收敛的 Taylor 展开, 即寻求解

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{mn}x^my^n. \tag{2.35}$$

代入 (2.33), 得到 c_{mn} 是由 $\{d_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 唯一决定的多项式, 进一步它具有正整数系数, 这个事实是证明的核心.

20 这个结果很有趣, 因为它证明了 Cauchy-Riemann 方程组的解 u, v 可以看作是函数 $f(y)$ 在离开 y 轴处的 *解析延拓*. 我们要重申在一些复变理论书籍中指出的解析延拓是一个危险的过程.

21 注意这不排除 *非解析解* 存在且不唯一的可能性. 这个问题由 Holmgren 定理指出.

分别记 R_d 和 R_a 是 (2.34) 中级数的收敛半径. 取定两个数 $\rho_d < R_d$ 及 $\rho_a < R_a$. 由于 $\sum d_n\rho_d^n$ 收敛, $|d_n|\rho_d^n$ 关于 n 的上确界显然存在, $|a_n|\rho_a^n$ 的上确界也同样存在. 记它们为 M_d 和 M_a (它们可能相当大). 考察比较函数 U 满足

$$\frac{\partial U}{\partial x} = D(U)\frac{\partial U}{\partial y}, \quad U(0,y) = U_0(y), \tag{2.36}$$

其中 Taylor 级数

$$D(U) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n U^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_d}{\rho_d^n} U^n,$$
$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_a}{\rho_a^n} y^n$$

具有正系数. 若这个函数 U 有 Taylor 展开

$$U = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} x^m y^n, \tag{2.37}$$

可以看到 C_{mn} 与 D_n, A_n 的关系跟 c_{mn} 与 d_n, a_n 的关系相同. 因为这一关系是具正系数的多项式, 由三角不等式容易看到

$$|c_{mn}| < |C_{mn}| = C_{mn}.$$

而 (2.36) 为

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{M_d}{1 - U/\rho_d}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad U(0,y) = \frac{M_a y}{\rho_a(1 - y/\rho_a)}, \tag{2.38}$$

可以同 1.3 节一样显式求解, 并展开成 (2.37) 的形式. 这就给出了 (2.37) 的收敛性, 从而由比较原理, (2.35) 收敛于 Cauchy 问题的唯一的解析解. 当然, 问题 (2.38) 并未给出问题 (2.33) 真正的简化表示, 它们都可以同第 1 章一样进行求解. 然而, 当 (2.33) 是 $\boldsymbol{u}$ 的向量方程时, 上面的结论几乎没有变化, 此时 $\boldsymbol{u}$ 不能用第 1 章的方法求解. 在这种情形下, (2.38) 也变成 $\boldsymbol{U}$ 的向量方程, 但其结果是 $\boldsymbol{U}$ 的所有分量均相等, 从而 $\boldsymbol{U}$ 仍可像标量方程一样求显式解.

注意由定理保证的解的存在区域由 ρ_a 和 ρ_d 的大小及 U 的可能的破裂所限制; 后者在 M_a 和 M_d 大的时候可能会有很强的限制, 这强调了定理的局部性质 (见习题 2.6).

2.4 双 曲 性

我们不能过分强调 Cauchy-Kowalevskaja 定理所要求的对 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的限制, 也不能要求偏微分方程必须写成 $\partial\boldsymbol{u}/\partial x = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\partial\boldsymbol{u}/\partial y$. 但是, 即使所有这些限制全

都满足, 由于定理利用了 Taylor 级数展开, 它告诉我们的仅仅是 *局部的* 存在和唯一性, 并且 Cauchy-Riemann 方程组证实了局部存在结果可能是怎样的.

现在有两种方法可以对这些偏微分方程建立更加 *整体性* 的理论, 使其解可以在远离边界条件的边界曲线处存在. 我们可以寻找 $\partial\boldsymbol{u}/\partial x = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\partial\boldsymbol{u}/\partial y$ 满足不同于 Cauchy 数据 (2.32) 或比它限制弱的边界条件的解 (例如, 在边界上给出 $\boldsymbol{u}$ 的少于 n 个分量的条件), 或者可以要求在 $\boldsymbol{D}$ 上给出更进一步的限制, 使 Cauchy 问题是适定的, 从而有不局限在 y 轴的非常小的邻域中的解. 回忆一下第 1 章一阶标量方程对系数 $\boldsymbol{D}$ 不需要这种限制.

前一种方法导致椭圆和抛物型方程的初值和边值问题, 这将在第 5 和第 6 章中讨论. 后一种想法导出 *双曲性* 概念和 *双曲型方程*, 第 4 章对二阶标量方程进行详细叙述. 然而, 我们已经可以描述直观的框架, 回答如何限制 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ 使得一阶方程组的 Cauchy 问题是适定的.

2.4.1　2×2 方程组

在 2.2 节中我们看到, 在某些情形下, 二维方程组存在 Riemann 不变量, 于是沿任一特征线, 某些已知函数是常数. 假设对偏微分方程 $\boldsymbol{A}\partial\boldsymbol{u}/\partial x + \boldsymbol{B}\partial\boldsymbol{u}/\partial y = \boldsymbol{c}$, (2.26) 会产生两条不同的实特征线 C_1, C_2, 这样相容性条件 (2.27) 对两个 Riemann 不变量均可积. 例如, 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是常矩阵, 且 (2.26) 关于 $\dot{y}/\dot{x}$ 有两个不同的实根, 这种情形就会出现. 此时, 如果在处处不与 C_1, C_2 相切的边界 Γ 上给定 $\boldsymbol{u}$, 则可以在 P 点同时求解由 Riemann 不变量给出的 *代数方程*, 从而求出 $\boldsymbol{u}(P)$ (见图 2.6(a)). 我们立即可以断言在 P 处解存在, 唯一且连续依赖于数据, 除非这些代数方程的解是病态的. 因此, Cauchy 问题是适定的.

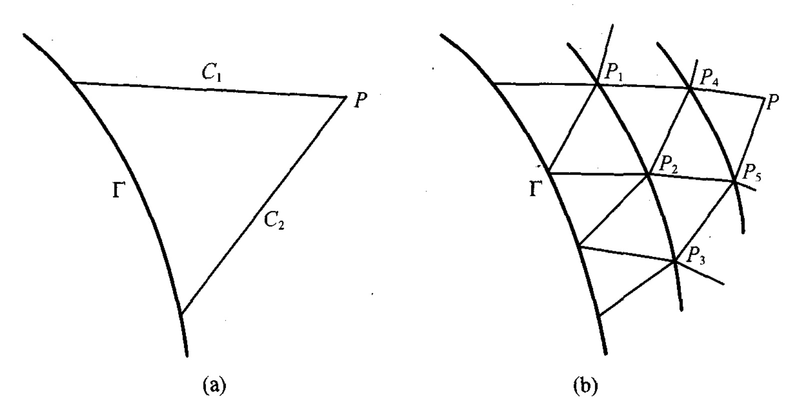


图 2.6　由特征线法得到的解: (a) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是常矩阵; (b) 当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的函数时的近似解

对更一般的情形, 我们可以想像在 Γ 附近给出一列点 P_i, 如图 2.6(b) 所示进行迭代, 在每步迭代中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 视为常矩阵. 于是, 即使当方程组 (2.26) 和 (2.27) 不能

积分; 我们猜想, 对二维一阶拟线性方程组, Cauchy 问题是适定的, 只要 (2.26) 在每个点 $(x, y, \boldsymbol{u})$ 上有两个不同的实根, 即在每点上存在两个特征方向. 这提供了定义二维 *双曲型方程组* 的动机, (2.26) 关于 $\dot{y}/\dot{x}$ 有两个不同的实根. 一般地, 这些实根依赖于解 $\boldsymbol{u}$; 即使对半线性情形, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 仅依赖于 x 和 y, 方程组可能仅在部分给定区域上是双曲的, 从而出现 *混合型* 问题. 对于标量方程 $a\partial u/\partial x + b\partial u/\partial y = c$ 问题必定是双曲的, 而对 2×2 向量情形 (2.21), 我们将分三种可能, 称为 *椭圆的*, *抛物的* 或 *双曲的*, 分别依赖于是否没有实特征线, 有一条实特征线或有两条实特征线. 这是第 3 章进一步讨论的基础, 在那里我们将看到抛物情形特别棘手. 事实上, 按照这一分类, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是恒等矩阵的情形是抛物的, 虽然方程组由两个标量双曲型方程组成.

2.4.2 n 维方程组

对具 n 个因变量, (2.26) 说明在一点上最多有 n 个特征方向. 根据前面的讨论, 类似于图 2.6 导出, 方程组在一点称为 *双曲的*, 如果 (2.26) 关于 $\lambda = \dot{y}/\dot{x}$ 有 n 个不同的实根.

为了考察 n 维方程组 Riemann 不变量存在的可能性, 定义对应于根 $\lambda = \dot{y}/\dot{x}$ 的左特征向量 $\boldsymbol{\ell}$, 满足

$$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}.$$

对偏微分方程乘上 $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}$, 得到

$$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}\right) = \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}.$$

如果 t 是特征线的参数化标量, (2.27) 的推广为

$$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\dot{x}. \tag{2.39}$$

同样地, 这是沿特征线关于 $\boldsymbol{u}$ 的 n 个分量的一个常微分方程. 如前面所说明的, 仅当 $n = 1$ 时, 它是 u 的一阶常微分方程, 对于线性情形, 这可化为求积分. 通常, 它不能积分, 除非是常系数方程, 此时沿特征线

$$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\int^{x}\boldsymbol{c}\,\mathrm{d}x'. \tag{2.40}$$

即使对 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ 的情形, 也可以马上看到, 当 $n = 3$ 时, 与 (2.39) 积分不同, 因为 Pfaffian

$$\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u} = P_1(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_1 + P_2(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_2 + P_3(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_3$$

与全微分 $\mathrm{d}\phi(\boldsymbol{u})$ 成比例当且仅当

$$\boldsymbol{P}\cdot\nabla\wedge\boldsymbol{P} = 0,$$

其中旋度是关于 $\boldsymbol{u}$ 的. 于是即使对 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的自治方程, 在 $n \geqslant 3$ 时也很少有 Riemann 不变量.

如果双曲型方程组存在 n 个 Riemann 不变量, 则在每条特征线上有一个关于 $\boldsymbol{u}$ 的 n 个分量的代数关系. 假设边界处处不平行于特征线, 其上 $\boldsymbol{u}$ 给定, 则可保证在边界的某邻域内 $\boldsymbol{u}$ 存在唯一. 不过, 当 $n>2$ 时, 在定义这个邻域时必须非常小心, 例如, 如果边界数据 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0(s)$ 仅给在初始曲线的一段 $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ 上, 那么显然存在区域限制在这样的区域内: 区域中每一点 P 的所有 n 条特征线与给定的边界线相交, 图 2.7 显示的是 $n=4$ 的情形.

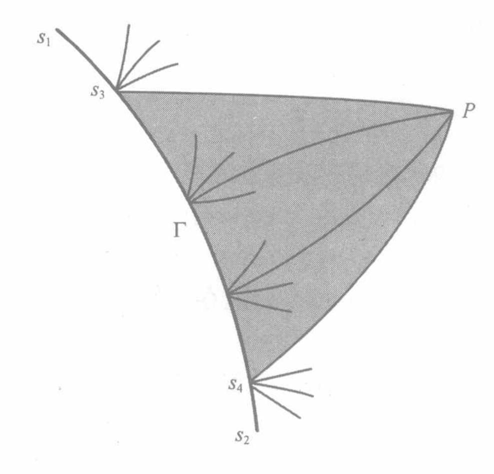


图 2.7　P 的依赖区域 (阴影区域)

如果 P 是过 $s=s_3$ 和 $s=s_4$ 在 Γ 一侧的最边上特征线的交点, 由边界和这些最边上特征线所围成的区域称为 P 的 *依赖区域*. 我们仅指出这个区域在图 2.7 中 Γ 的一侧, 因为对于大部分产生于物理现象的模型, 具两个自变量的双曲型问题, 其中一个变量是 "类时" 的; 即仅需要考虑这个变量从边界上 "初始" 数据开始增长的解[22]. P 处的解依赖于其依赖区域中的边界数据, 而与这个部分以外的边界数据无关. 同样地, 给定初始曲线上一点 Q 的 *影响区域* 由通过它的极端特征线所限定, 如图 2.8 所示; 即改变 Q 点的边界数据会改变影响区域中所有点的解, 但仅限于这一区域.

图 2.6 推广到 $n>2$ 的情形, 通过用直线近似特征曲线, 及用代数关系近似沿特征线的微分关系 (2.39), 解可以数值地构造. 图 2.9 显示 $n=4$ 时如何由初始曲线上 4 个不同点处的 $\boldsymbol{u}$ 得到 P 处的解. 通过不同的 P 得到新的初始曲线上的数据, 重复这个过程. 这个过程在两特征线平行时显然失效, 这种情形对应的问题不再是双曲的, 或者同一族特征线相交, 如 1.4 节中 $n=1$ 出现的情形.

22 2.6 节会对具有超过 2 个自变量的双曲型方程组给出类时变量更精确的定义.

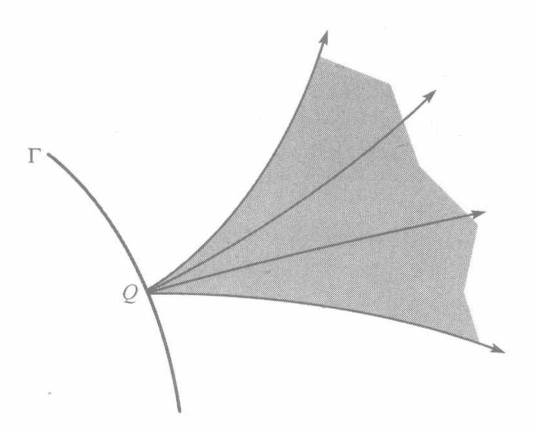


图 2.8 Q 的影响区域 (阴影部分)

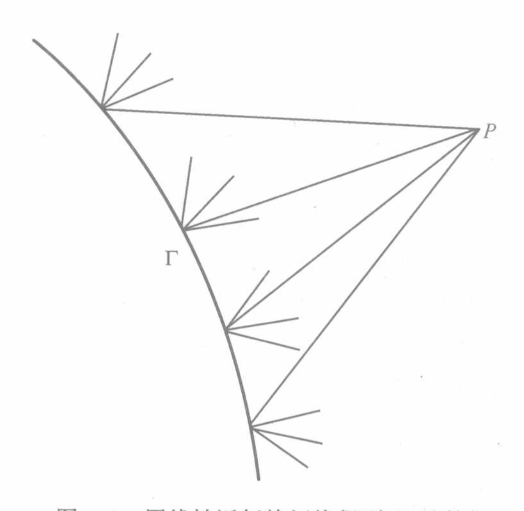


图 2.9 用线性近似特征线得到 P 处的解

如果 Riemann 不变量存在, 可能得到某些封闭形式的显式解. 以下例子 (对应于 2.1 节介绍的模型) 和注释说明了可能得到的这类信息.

2.4.3 例子

浅水理论

在这个由 (2.1) 和 (2.2) 描述的例子中, 我们将前面一般讨论中的 (x, y) 记为 (t, x), 有

$$\lambda = u \pm s, \quad \text{其中 } s = \sqrt{gh},$$

Riemann 不变量分别为 $u \pm 2s$. 方程组总是双曲的, 除非河干涸了, 但是非线性表明特征线可能相交, 对应于有 "眼" 或 "水压跳跃" 的情形. 在 4.8.1 节中我们将看

到如何利用这些 Riemann 不变量生成 (2.1) 和 (2.2) 一些有用的显式解.

这个例子说明 Riemann 不变量的存在并不是一阶方程组有显式解的必要条件, 因为特征线通常不能显式地确定. 在很多猜测显式解的 "技巧" 中, 对于如 (2.1) 和 (2.2) 的自治方程组, 可以互换因变量和自变量. 我们看到, 如果作 *速度图变换*

$$x = X(u,h), \quad t = T(u,h), \tag{2.41}$$

由链式法则得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial h},$$

等等, 并假设 Jacobi 行列式

$$\Delta = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial h} - \frac{\partial T}{\partial h}\frac{\partial X}{\partial u}$$

不为零, 于是得到 *线性方程组*[23]

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial h} - u\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{\partial T}{\partial u} = 0,\\ \frac{\partial X}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial u} + h\frac{\partial T}{\partial h} = 0,\end{aligned}$$

其中为了简单, 设 $g = 1$. 当然, 可以这样做是因为在原方程组 (2.1) 和 (2.2) 中没有无微分项, 但它有有趣的几何解释, 将在第 4 章中作进一步讨论.

一维不稳定气体动力学

将 (2.4) 重写为 (利用 (2.3) 式)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

仍用 (t,x) 代替 (x,y), 通过计算 (习题 2.10) 可知, 方程组总是双曲的, 其中

$$\lambda = u \quad 或 \quad \lambda = u \pm \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

是特征线的斜率, 其上分别有

$$\gamma p \mathrm{d}\rho - \rho \mathrm{d}p = 0, \quad \mp\sqrt{\gamma p\rho}\mathrm{d}u + \mathrm{d}p = 0.$$

于是在 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u$ 上, p/ρ^γ 是常数. 但是, Riemann 不变量在 3 族特征线上通常都不存在.

二维稳定气体动力学

在 2.2 节关于线性化方程组 (2.8)~(2.10) 的分析中已经指出, 当基本流是超音

23 关于气体动力学中相应方程组的讨论见 [30].

速流时, 存在 3 条不同的实特征线, 并且仅在这种情形下方程组是双曲的. 对于完全 (未作线性化) 方程组 (2.5)~(2.7) 会产生稍有不同的情形, 经过更长的代数处理 (习题 2.11) 得到

$$\lambda = \frac{v}{u}\ (2\ 重) \quad 或 \quad \lambda = \tan\left(\arctan\left(\frac{v}{u}\right) \pm \arcsin\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho(u^2+v^2)}}\right).$$

当 $u^2+v^2 > \gamma p/\rho$ 时, 有 4 个实根, 此时仍称其为超音速流. 然而即使当它是超音速流, 方程组仍不是严格双曲的, 因为有两个相等的特征值 $\lambda = v/u$. 不过在实际中, 解的性态通常与方程组是双曲的情形相像.

在以上两个例子中, 第二或第三族特征线的相邻成员通常会相交形成气体动力学的激波. 下一节将进一步讨论激波.

粒子材料流

在模型 (2.13) 中令 $h=1$, 与关于 τ, σ_x 和 σ_y 的关系式 (2.16) 一起, 经过很长的计算 (从习题 2.3 定义 ψ 开始, 习题 2.14 继续), 看到它总是双曲的, 其中

$$\lambda = -\cot\left(\psi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right),$$

Riemann 不变量分别为

$$\pm\cot\phi\log\left(-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + 2\psi.$$

注意这些特征线不是滑动平面, 这需要对模型列出方程.

液化和填料床

两个线性模型 (2.17), (2.18) 和 (2.19), (2.20) 显然都是双曲的, 后一个方程组的特征线由

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_a, v_b$$

给出, 前一个方程组的特征线 "速度" 为零. 然而无微分项的存在意味着没有显式的 Riemann 不变量, 除非 k 或 h 为零. 幸运的是, 如第 4 章中所看到的, 这些模型的线性性使我们能够绕过这个困难.

此外, 在 (2.19) 和 (2.20) 中设 $k=0$, 我们试图求解关于 c_a 和 c_b 的 Cauchy 问题, 其中 c_a 和 c_b 是 Riemann 不变量, 在非特征线 $t=0$ 上给出. 进一步假设我们对有限深度的液化床模型感兴趣, 我们不能确定 (通常应给出) 床的顶部和底部边界条件. 我们可以立即知道的是, 对于其上气体以速度 v_a 或 v_b 移动, 不能给床顶部的 c_a 或 c_b 确定值. 如果这些值给出, 它们几乎肯定会与从 Cauchy 数据来的 Riemann 不变量的值相抵触.

光纤模型

对于光纤模型 (2.11) 和 (2.12), 所用的变换不如速度图变换 (2.41) 那么显然. 对给定的 T, 方程组是双曲的 (不同于大多数低黏性流模型), 特征线 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u$, u 为流体的局部速度, 且 $t =$ 常数, 对应于不可压缩玻璃的无限传播速度. 然而, T 的存在意味着没有显式的 Riemann 不变量. 但是, 如果我们仍写出 "偏" 速度图变换

$$x = x(A, t), \quad u = u(A, t),$$

改变尺度使得 $\tau = \int_0^t T(t')\mathrm{d}t'$, 我们发现 (习题 2.15) x 满足线性方程

$$\frac{\partial^2 x}{\partial A^2} - c\frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \tau} = -\frac{1}{A}\frac{\partial x}{\partial A},$$

从而可以显式地解出 $\partial x/\partial A$. 这就证明了特征线不会相交.

寻找给定拟线性方程组是否有足够的对称性从而可以显式地积分, 依赖于连续变化的参数的群理论. 后面的某些场合会回到这个问题. 但是现在所有经常出现的激波都是双曲型方程组特征线相交的结果, 这应立即引起注意.

*2.5 弱解和激波

在 2.2 节最后我们看到, 对于双曲型方程组, $\boldsymbol{u}$ 的一阶导数越过特征线可能不连续, 第 1 章给出了若干例子, 其中特征线可能相交从而导致 $\boldsymbol{u}$ 本身不连续. 于是根据第 1 章中对标量方程弱解的讨论, 我们讨论对于方程组 $\boldsymbol{A}\partial \boldsymbol{u}/\partial x + \boldsymbol{B}\partial \boldsymbol{u}/\partial y = \boldsymbol{c}$ 在越过曲线 Γ 时, $\boldsymbol{u}$ 产生跳跃间断的可能性. 由于 Green 公式扮演了重要角色, 我们仅对守恒形式的双曲型方程组将 1.7 节提出的理论进行推广. 考察

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = \boldsymbol{c} \tag{2.42}$$

弱解的定义问题, 其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{u}$, x 和 y 的函数; 为了简单起见, 初始数据 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0(y)$ 在 $x = 0$ 上给出, 感兴趣的区域为 $x > 0$. 因 (2.42) 是双曲的, 矩阵 $(\partial v_i/\partial u_j)$ 必定有 n 个不同的实特征值. 如果对 (2.42) 式乘上试验函数 $\psi(x, y)$, ψ 在 $x > 0$ 处处可微, 且当 x 或 $y \to \infty$ 时, $\psi \to 0$ 非常迅速, 则利用 Green 公式, 在半平面 $x > 0$ 中有

$$\iint_{x>0}\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi \boldsymbol{c}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(0, y)\boldsymbol{u}_0(y)\mathrm{d}y. \tag{2.43}$$

(2.43) 推广了 (1.25), 并且对 ψ 行为的限制使我们具有方便的右端. 即使 $\boldsymbol{u}$ 不连续, 方程仍有意义, 于是定义 (2.42) 的弱解为对所有适当的试验函数 ψ, 函数 $\boldsymbol{u}$ 满足 (2.43). 如果弱解 $\boldsymbol{u}$ 连续, 显然遵循我们的步骤, (2.43) 意味着 (2.42), 因此经典

解是弱解. 然而, 弱解不一定要连续; 如果它越过 Γ 不连续, 则由导出 (1.27) 的讨论及对 (2.43) 在区域 $x>0$ 不包括 Γ 上运用 Green 公式, 得到

$$\int_{\Gamma}[\psi \boldsymbol{u}]_{-}^{+}\mathrm{d}y = \int_{\Gamma}[\psi \boldsymbol{v}]_{-}^{+}\mathrm{d}x. \tag{2.44}$$

由于 ψ 在越过 Γ 时连续, (2.44) 对所有这样的 ψ 均成立, 因此必然有

$$[\boldsymbol{u}]_{-}^{+}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = [\boldsymbol{v}]_{-}^{+}, \tag{2.45}$$

这是一般的守恒律双曲型方程组的跳跃或 Rankine-Hugoniot 条件.

对于半线性问题, $\boldsymbol{v}$ 等于 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$, 其中 $\boldsymbol{D}$ 是不依赖于 $\boldsymbol{u}$ 的矩阵, 于是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的特征值. 在这种情形下, $\boldsymbol{u}$ 在越过任一特征线时会出现不连续. 然而, 通常它们在所谓的 *激波* 上, 而决不是在特征线上.

当然, 上述过程继承了第 1 章中 $n=1$ 情形下遇到的所有不唯一的性质. 我们叙述两种可能解决不唯一性的方法.

2.5.1 因果律

先给出一个注释. 可以用跳跃条件 (2.45) 将经典解分片连接在一起构造弱解. 在激波的一点 P 处, 每边有 n 个特征方向, 图 2.10 是 $n=2$ 的情形. 这 $2n$ 条过 P 的特征线形成两类, 一类与 $x=0$ 相交, 一类不相交.

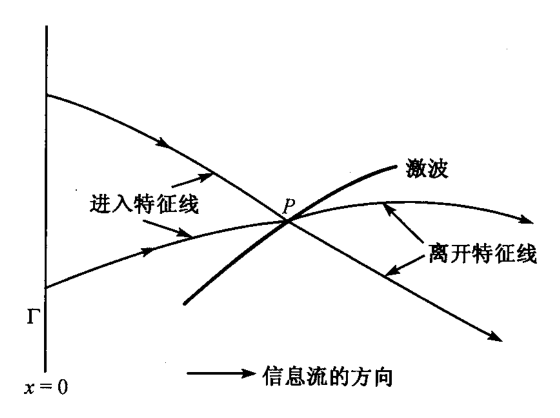


图 2.10 激波附近的进入和离开特征线; 因果律

某些有关边界数据 $u_0(y)$ 的信息在每一条与 $x=0$ 相交的特征线上传播; 特别当 Riemann 不变量在特征线上存在, 这样当接近于激波 (在图 2.10 中从左边) 时, 形成 $\boldsymbol{u}$ 分量之间的代数关系. 为唯一定义激波强度 $[\boldsymbol{u}]$ 及方向, 必须有正确数目的关系式以决定 $\boldsymbol{u}$ 到激波右边的值. 于是, 如果在 P 处有 k 条特征线 "离开", 即它们与 $x=0$ 不相交, 则有 $2n-k$ 个关系式与包括未知激波斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的 n 个

Rankine-Hugoniot 条件 (2.45) 一起来决定激波两边 $\boldsymbol{u}$ 的 $2n$ 个未知分量. 这样总共有 $3n-k$ 个关系式求 $2n+1$ 个未知量, 于是 $k=n-1$.

这个简单的结果形成了唯一定义弱解的 *因果律* 方法的基础: 任一物理上允许的激波在任一点上必须有 $n-1$ 条特征线离开此点[24].

为说明运用这个因果律方法, 考察 $n=1$ 和 $n=3$ 两个例子, 其经典解已讨论过.

例 2.2 (重回到方程 (1.14)) 在 1.5 节中已遇到方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=0, \tag{2.46}$$

可以看到在这种情况下, 它提供了描述一维气体动力学方程组 (2.3) 和 (2.4) 的近似, 其中 x 和 y 分别表示时间和空间. 在这种情形下, 一种称为 *激波管* 的实验设备可以归结为初始条件

$$u_0=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1, & y>0,\end{cases} \tag{2.47}$$

1.7 节中已求出两个解, 其中一个解是连续的. 不连续解是

$$u=\begin{cases}0, & y<x/2,\\ 1, & y>x/2,\end{cases}$$

在激波 $y=x/2$ 上特征方向的斜率在 $y<x/2$ 上为零, 在 $y>x/2$ 上为 1, 如图 2.11 所示. 于是它们都离开激波, 从而 $k=2>n-1$; 因果律条件拒绝这个解 (实际上我们可以构造出很多这种不允许的激波). 事实上, 这个结论可用于所有弱解, 我们要找满足 Rankine-Hugoniot 条件的非零强度的激波. 因此, 没有因果律的不连续解, 而连续解

$$u=\begin{cases}0, & y<0,\\ y/x, & 0\leqslant y\leqslant x,\\ 1, & x<y\end{cases}$$

自然是因果律的, 是 Cauchy 问题的唯一可接受的解.

现在看情形

$$u_0=\begin{cases}0, & y>0,\\ 1, & y<0.\end{cases} \tag{2.48}$$

满足 Rankine-Hugoniot 条件的解仅有

$$u=\begin{cases}0, & y>x/2,\\ 1, & y<x/2;\end{cases}$$

24 7.2.4 节将对标量方程的这种情形给出更多细节.

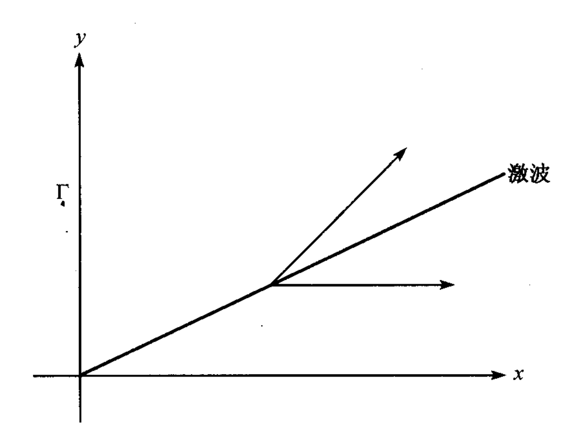


图 2.11 (2.46) 和 (2.47) 有太多离开的特征线的解

在激波上特征方向的斜率在 $y > x/2$ 上为 0, 在 $y < x/2$ 上为 1, 如图 2.12 所示. 它们都进入激波, 即都与 $x = 0$ 相交, 于是 $k = 0$. 因此 $k = n - 1$, 这确实是唯一适合因果律的解.

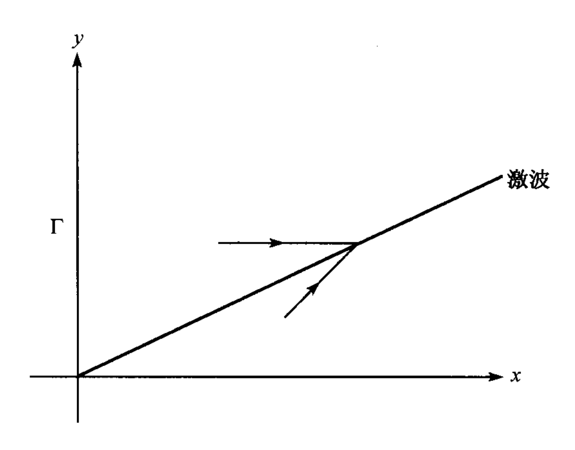


图 2.12 (2.46) 和 (2.48) 的因果律解

这个例子为气体动力学激波的更完整的讨论提供了方法. 模型 (2.3)~(2.7) 已经是守恒律形式, 由 (2.45) 式决定的跳跃条件表示气体动力学激波中熟知的 Rankine-Hugoniot 条件. 对以速度 V 移动的一维激波在 (2.3) 和 (2.4) 中运用 (2.45), 结果得到

$$\begin{gathered}[\rho(V-u)]_-^+ = 0, \quad [p + \rho(V-u)^2]_-^+ = 0, \\ \left[\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(V-u)^2\right]_-^+ = 0,\end{gathered} \tag{2.49}$$

分别对应于质量守恒、动量守恒和能量守恒 (见习题 2.17). 对激波的存在, $[p]_-^+ \neq 0$, 将 (x,t) 平面分为两个区域, 每个区域中流变量均为常数, 进一步可以证明流必定通过 "压缩激波", 如果它是因果律弱解, 越过它, p 和 ρ 会增加. 图 2.13 显示对 (2.3) 和 (2.4) (x,t) 平面对应于活塞 $x = Vt$ 在 $x > Vt$ 中推动气体. 对 $V > 0$, 我们有 $n = 3$, 因果律弱解有 $k = 2$. 然而当 $V < 0$, 这个 k 值无法得到, 于是在这种情形下, 不会出现 "疏散激波".

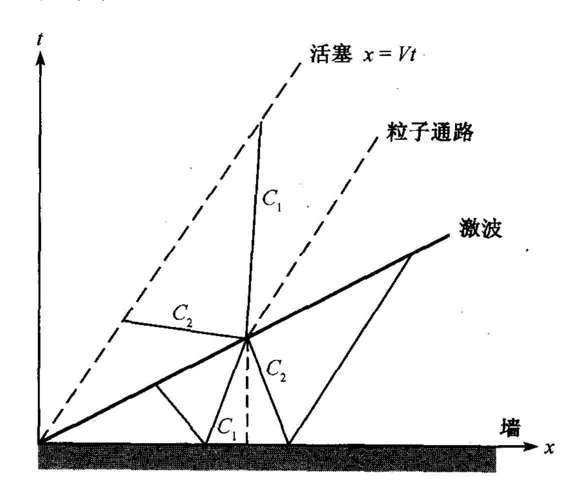


图 2.13　由活塞产生的激波的特征线 (粒子通路也是特征线)

对二维方程组 (2.5)~(2.7) 可以进行类似的讨论. 经过很长的代数运算, 会出现两个可能的 Rankine-Hugoniot 激波, 它会在角点附近 "折弯" 给定的超音速流, 如图 2.14 所示. 现在 $n = 4$ (其中一条特征线是二重的), 而合适的弱解应有 $k = 3$; 具

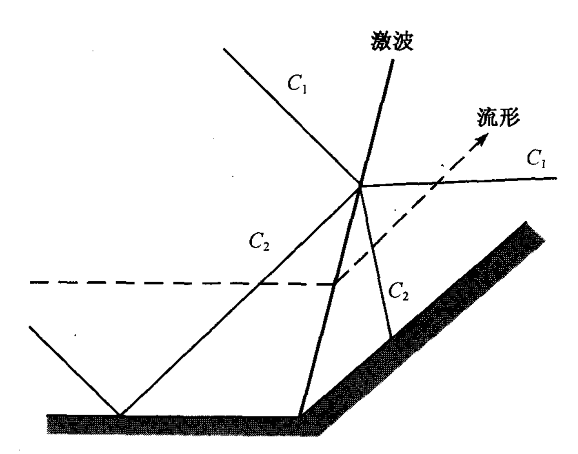


图 2.14　在角上的超音速气体流的特征线 (流线也是特征线)

小斜率的激波是物理中可接受的解, 正如风道中已经观察到的现象[25].

2.5.2 黏性和熵

因果律是用来使守恒律方程弱解唯一的一种数学过滤器. 其他两种为同样目的而提出的方法称为 "黏性" 和 "熵", 事实上这三种方法彼此是紧密联系的.

黏性方法可以由前面的例子 (1.14) 容易地说明, 仍然将它视为气体动力学情形. 从模型的讨论中可以看到, 第 6 章将给出更详细的细节, 在一维流模型 (2.3) 和 (2.4) 中增加一个黏性小量 ε, (1.14) 改写为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}u^2\right)=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.50}$$

至少是考虑非常小的扰动[26]. 如习题 2.18 所示, 这个方程称为 Burger *方程*, 它有行波解, 即 $u=U((y-Vx)/\varepsilon)$, $-\infty<y-Vx<+\infty$, 只要

$$V=\left[\frac{1}{2}U^2\right]_{-\infty}^{\infty}\Big/[U]_{-\infty}^{\infty};$$

这就是 u 在远离激波的 "上游" 和 "下游" 的近似值所满足的 Rankine-Hugoniot 条件. 在 $y-Vx$ 是 ε 量级的区域中, 由于黏性的存在, 激波被磨光了, 如图 2.15 所示.

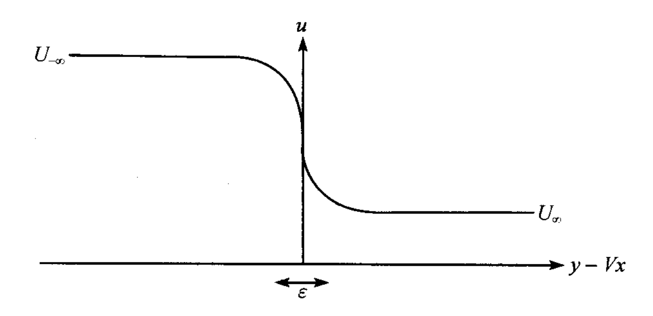


图 2.15 用黏性光滑化激波

引入黏性不仅可以回复到 Rankine-Hugoniot 条件, 还可以在 (2.50) 中包含更多的信息. 从习题 2.18 的分析可以看到, 行波解 U 必定是 $y-Vx$ 的递减函数. 在

25 注意有其他满足 Rankine-Hugoniot 条件的 "激波" 是可能的. 例如, 对 $[p]_-^+=0$, $[u]_-^+=0$, $u=U$ 及 $[\rho]_-^+\neq 0$, 可能满足 (2.49), 这称为 *接触不连续性*. 对二维方程组 (2.5)~(2.7), 类似的激波在密度和切速度上有跳跃, 称为 *涡流片*, 第 7 章将回到这个概念. 这些 "激波" 都是退化的, 与一条特征线的情形相一致.

26 注意到在守恒律方程右端引入黏性项, 根据模型假设, 结果依守恒律写出的方法而不同. 如果 (2.50) 式左边写为 $\partial/\partial x\left(\frac{1}{2}u^2\right)+\partial/\partial y\left(\frac{1}{3}u^3\right)$, 其解会有很大的不同. 因此, 黏性对特殊的弱解是有规定的, 这与模型的假设有关.

第 6 章可以看到它的物理解释, 波必是压缩的, 于是排除了 "疏散" 激波的情形, 与 (2.50) 式当 $\varepsilon = 0$ 时的因果律条件相似.

在这种情况下, 与因果律等价的另一个概念是, 如果 (1.14) 仍写为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(v(u)) = 0,$$

则凸函数 $v = \frac{1}{2}u^2$, 称为 *熵*, 是 *递增* 的, 这是因为激波通道的缘故, 而与激波速度的符号无关. 于是可以按因果律激波、黏性激波和越过激波凸函数递增进行分类. 后一种分类用到了源自于统计力学的熵的概念.

总结一下, 如果没有额外的信息, 双曲型守恒律方程的弱解理论是不完备的. 当这个信息以因果律、黏性或熵的形式引入时, 会产生在越过激波时满足 Rankine-Hugoniot 条件的唯一弱解. 与因果律或熵的概念相比, 黏性更强, 因为它甚至可以让我们预测 Rankine-Hugoniot 条件, 同时在黏性趋于零时选择唯一的极限解.

2.5.3 其他不连续性

有关偏微分方程间断解的更一般的讨论将在第 7 章给出. 那一章非常长, 主要是因为这个问题的精细本质, 除了气体动力学激波模型以外, 另一个例子是描述在间断附近存在的化学反应, 通常称之为 *爆炸*, 在这种情况下, (2.4) 的右端替换成局部源项, 表示从 (2.49) 到

$$\left[\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(V-u)^2\right]_-^+ = E$$

能量变化的 Rankine-Hugoniot 条件, 其中 E 表示在反应中单位质量释放的能量常数. 当 $E = 0$ 时, 如前面提及的, 可以得到不唯一的弱解, 其中 $[p]_-^+$, $[\rho]_-^+$ 和 $[u]_-^+$ 满足 Rankine-Hugoniot 条件 (2.49). 重新整理这些关系式为

$$\widetilde{p} = \frac{\gamma+1-(\gamma-1)/\widetilde{\rho}}{(\gamma+1)/\widetilde{\rho}-(\gamma-1)},$$

其中 $\widetilde{p}$ 和 $\widetilde{\rho}$ 分别是下游和上游压力和密度之比 (上游是指气体还没有经过间断点). 于是 $(\widetilde{p}, 1/\widetilde{\rho})$ 所在的双曲线称为 Chapman-Jouguet (C-J) 曲线, 如图 2.16(a) 所示, 其中点 $(1,1)$ 对应于上游的条件. 唯一的因果律弱解对应于 $\widetilde{p} > 1$, $1/\widetilde{\rho} < 1$, 这是为什么 C-J 曲线的下半段用虚线表示. 上半部分的所有点都表示允许的激波.

但是当 E 是正的, $\widetilde{p}$ 与 $\widetilde{\rho}$ 的关系式的分母在乘上正的 E 后会增加, 图 2.16(b) 显示了新的 C-J 曲线与原来曲线的相对关系, 其中点 $(1,1)$ 仍表示上游的条件. 曲线的中间是断开的, 因为从其他的 Rankine-Hugoniot 条件中容易看到, 当 $\widetilde{p} > 1$, $1/\widetilde{\rho} > 1$ 时, 气体从下游至上游经过不连续处的速度是错误的方向. 然而最重要的

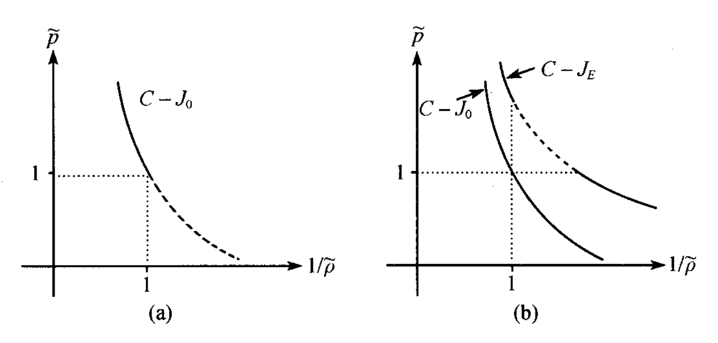


图 2.16 Chapman-Jouguet 曲线 (a) 没有能量释放, $E=0$, (b) 有能量释放, $E>0$

是, 当 $E>0$ 时, 我们不能再用熵或因果律的结论使 C-J 曲线下半部分上的点不成立. 压缩爆炸当然是存在的, 对应于图 2.16(b) 中曲线上面的连续分支. 然而, 扩张"燃烧", 对应于下面的连续分支, 也会出现, 虽然它们有不稳定的倾向, 正如人们所熟知的实验室爆炸.

*2.6 具有多于两个自变量的方程组

用与第 1 章同样的方法来结束本章, 本章的思想显然可以平凡地推广到多于两个自变量的方程组. 不过, 除了 Cauchy-Kowalevskaja 定理以外, 读者如果感到困难的话, 可以不要阅读以下内容而直接跳到第 3 章.

在试图将特征线的概念推广到具有多于两个自变量的方程时, 立即会遇到几何直观的困难. 这是因为, 如果考察一般的 $m\times n$ 方程组

$$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}=\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{u}=(u_j)\quad 对\ 1\leqslant j\leqslant n, \tag{2.51}$$

$\boldsymbol{u}$ 的初始数据在 $m-1$ 维流形上给定, 求其 Cauchy 问题的解. 如果我们问在什么样的 $(m-1)$ 维流形上 $\boldsymbol{u}$ 的法向偏导数无法定义, 最容易的方法是, 记这样的流形为

$$\phi(x_1,\cdots,x_m)=0,$$

于是将流形视为这族函数 ϕ 的水平集, ϕ 足够光滑, 从而可以将 ϕ 变为新的自变量. 于是 (2.51) 可以简化为

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{u} \tag{2.52}$$

等于 $\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{u}$ 关于曲面 $\phi=0$ 的切向导数的线性组合, 所以由 Cauchy 数据这是已

知的. 于是, 如果记

$$Q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial \phi}{\partial x_m}\right)=\det\left(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right),$$

则可定义特征曲面 $\phi=0$, 满足

$$Q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial \phi}{\partial x_m}\right)=0. \tag{2.53}$$

显然当 $m=2$ 及 $n=1,2$ 时, 上式可以分别简化为 (1.7) 的前两式和 (2.26). 在标量情形下, 方程 (2.53) 也可简化为 (1.32) 式, 且关于偏微分方程 (1.32) 的说明同样可以应用于 (2.53).

原则上, 容易推广 Cauchy-Kowalevskaja 定理来证明 Cauchy 问题解的存在唯一性, 只要数据给在非特征流形上, 且给出通常重要的局部性和解析性的要求.

另一方面, 当 $m>2$ 时, 我们不仅要求解关于 ϕ 的偏微分方程, 而且更困难的是将 (2.53) 对于曲面 $\phi=0$ 的含义直观地显示出来. 然而, 记住曲面的法向总是 $(\partial\phi/\partial x_i)=(\xi_i)$, 可以看到 (2.53) 是这些量的 n 次齐次表达式, 因此在 $\mathbb{R}^m$ 中每一点 P 上, 法向落在一个锥上, 称为 **法锥**. 几何上的最后一部分来自于如下事实, 当法翼环绕一条母线到另一条母线 (如图 2.17 所示), 对应于流形 $\phi=0$ 的小元素的包络构成 **对偶锥**. 如果无法弄清几何情形, 也容易解析地看出. 不失一般性, 将 P 作为原点,

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\xi_i=0 \tag{2.54}$$

关于 ξ_i 随 $Q(\xi_1,\cdots,\xi_m)=0$ 的变化的包络由

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\xi_j\right)-\mu\frac{\partial Q}{\partial \xi_i}=0\quad 对\ i=1,\cdots,m \tag{2.55}$$

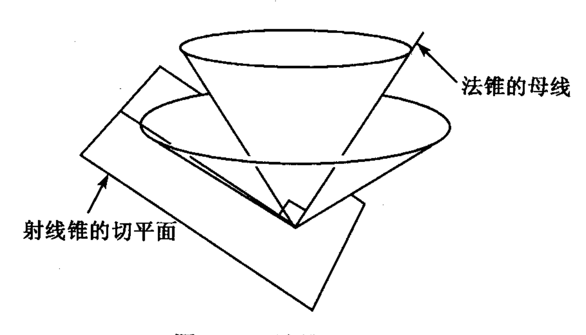


图 2.17　法锥和射线锥

给出, 其中 μ 是 Lagrange 乘子. 于是得到

$$x_i = \mu \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}, \quad Q(\xi_1, \cdots, \xi_m) = 0 \tag{2.56}$$

作为包络的参数表示. 显然在现在的坐标基底 x_i 下, 这是 n 次齐次表达式, 因此也表示一个锥, 称为 **射线锥**. 为了显示特征曲面, 我们想象一个在 $\mathbb{R}^m$ 中的由点围成的射线锥; 一个曲面是特征曲面如果它在每一点与射线锥相切. 对 $n=1$ 的标量方程, 射线锥退化为直线, 如图 1.2 所示.

一旦出现了这张图, 双曲性概念呈现出全新的内容, 因为我们不再有实际的或可作为标准的斜率 λ. 取而代之, 我们要考虑几何的法锥和射线锥, 并问它们是如何退化的. 例如, 如果 $Q(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 是正定的, 法锥的母线必是零向量. 我们希望锥有很好的 "结构", 显然这种锥有 n 叶, 彼此之间都是分开的; 当然, 有些叶可能是平的 (超平面) 或直线 (一维的).

令人惊奇的结果是, 通过对 $\boldsymbol{u}$ 的有界区域上的积分估计可以证实, 当法线锥和射线锥达到可能的最大结构时, 方程组 (2.51) 的 Cauchy 问题不再遵循 (2.24) 的定义为适定的. 精确地, Cauchy 数据必须在所谓的 **类空超曲面** 上给出. 这种超曲面仅在射线锥达到可能的最大叶数时存在. 进一步, 所有这些叶都彼此 "套" 在一起. 于是类空间超曲面在射线锥 "外" 叶的外面, 而指向这个外叶里面方向的称为 **类时向量**.

我们结合两个气体动力学模型说明这个思想, 不稳定一维模型 (2.3) 和 (2.4), 以及稳定的二维模型 (2.5)~(2.7), 如例 2.1, 关于匀速 $(U, 0)$ 作线性化得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + U\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = -\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + U\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} = -\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y}, \\
&\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + U\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x} + \rho_0 a_0^2\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

当 $U > 0$ 时, (x, y, t) 空间中的锥如图 2.18 和 2.19 所示; (x, y) 平面总是类空的, 而当 $U > a_0$ 时, 时间轴不再是类时的[27]!

当我们考察特征线的另一种定义, 当越过曲面时 $\partial \boldsymbol{u}/\partial x_i$ 有跳跃间断, 此时会出现另一种新的扭曲. 这仍可以很好地实现, 且带回到 (2.53), 因为

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right]_{-}^{+} = \boldsymbol{0} \tag{2.58}$$

27 同样的现象出现在相对论中, 当粒子在通过材料时比光速快, 它会放射出所谓的 Čerenkov 辐射.

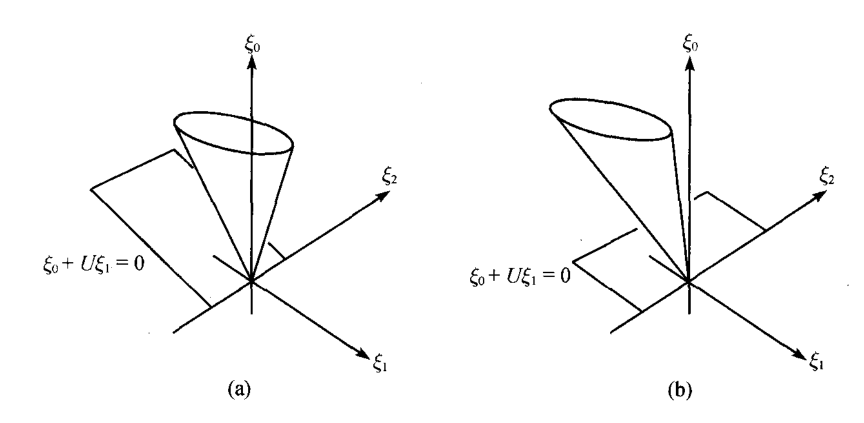


图 2.18 (2.57) 的法锥, 当 (a) $U < a_0$ 及 (b) $U > a_0$, 其中 $\xi_0 = t$, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, 满足 $(\xi_0 + U\xi_1)((\xi_0 + U\xi_1)^2 - a_0^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)) = 0$

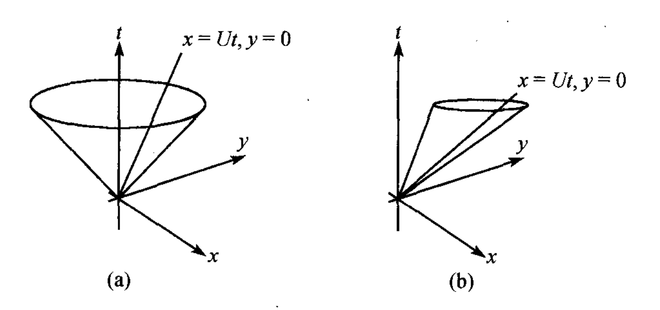


图 2.19 (2.57) 的射线锥, 当 (a) $U < a_0$ 及 (b) $U > a_0$, 且 $x = Ut$, $y = 0$, $(x - Ut)^2 + y^2 = a_0^2t^2$

和

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right]_-^+ \delta x_i = \mathbf{0}$$

对所有的 δx_i, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{m}\xi_i\delta x_i = 0$. 但这留下了特征曲面中间断解精确行为的公开问题. 从第 1 章中我们看到如果在特征曲面的任一点存在间断, 那么它在特征曲面上任何不存在病态的点上均非零. 将计算推广至现在这种情形是冗长的, 但记住 (2.58), 可以看到在越过特征曲面沿相切于这个曲面的方向 $\delta \boldsymbol{x}$ 变化时跳跃 $[\partial \boldsymbol{u}/\partial x_i]$ 的变化为

$$\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right]_-^+ \delta x_j.$$

然而, 偏微分方程给出

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{A}_j \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x_j \partial x_i}\right]_-^+ + \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i}\right]_-^+ \text{的线性项} = \boldsymbol{0}.$$

现在仅能利用适当的二阶导数的组合, 得到有关 $[\partial \boldsymbol{u}/\partial x_i]_-^+$ 的信息, 显然这给出了 $\partial \boldsymbol{u}/\partial x_i$ 的一些线性组合的跳跃的切向导数, 只有在采用沿着与曲面相切的射线锥母线的导数, 才能用这个跳跃表示出来. 这个结果推广了 (1.34) 式, 用那里介绍的术语, 由这些母线形成的曲线称为 *次特征线*. 直观地, 我们想像次特征线是特征流形上可以传送信息的曲线. 第 4 章将给出它的物理解释, 8.2.6 节叙述了如何构造次特征线.

对高维守恒形式方程的弱解可以写出 Rankine-Hugoniot 条件, 最简单的方程组是

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} + \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}, \tag{2.59}$$

其中 $\tilde{\nabla} = (\partial/\partial x_2, \cdots, \partial/\partial x_m)$, $\boldsymbol{u}$ 可以是标量也可以是向量, $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的向量函数或 $(m-1) \times n$ 矩阵函数. 对后一种情况, $\tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$ 可以解释为每行关于 $x_2, \cdots, x_m$ 的散度形成的列向量. 于是 (2.45) 推广为

$$\left[\boldsymbol{v} \cdot \tilde{\nabla}\Phi\right]_-^+ + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}[\boldsymbol{u}]_-^+ = \boldsymbol{0} \tag{2.60}$$

越过由 $\Phi(x_1, \cdots, x_m) = 0$ 定义的激波流形.

我们对 3 个或多个自变量的 *非解析* 偏微分方程给出一个令人惊奇的否定注解. 回忆一下, 在 Cauchy-Riemann 方程组中已经指出两个自变量的方程在一点具非解析 Cauchy 数据, 在此点的邻域中没有解. 将此结果转到非齐次 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = f'(x), \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$
$$u = v = 0 \quad \text{在 } y = 0 \text{ 上} \tag{2.61}$$

在 $y=0$ 的邻域中没有解析解, 除非 f 是实解析的. 为了看到这一点, 注意 $u - f + \mathrm{i}v$ 是解析函数, 其实部在 $y=0$ 上是 $-f$, 虚部在 $y=0$ 上是零.

这已经是一个显著的结果, 但它仅保证 (2.61) 在 $y=0$ 附近不存在解. 然而, 这是 H. Lewy 下述结论的出发点, 即使 $f(x,y,t)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中点点 C^∞, 线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} - 2\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,t)$$

无解, 除非 f 是解析的. 详细细节太长, 在这里不再赘述. 有兴趣去见识构建偏微分方程的无所不包的理论是多么徒劳的读者可参见 [23], [36].

习 题

2.1. 如果 $\gamma=2$, p/ρ^2 为常数, 证明气体动力学方程组 (2.3) 和 (2.4) 简化成浅水方程组 (2.1) 和 (2.2), 其中 (2.3) 和 (2.4) 中的 ρ 与 (2.1) 和 (2.2) 中的 h 成比例.

2.2. 将 (2.8) 前面提出的变换用于 (2.5)~(2.7), 且忽略带横杠的量的平方项, 证明

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0\overline{u}+U\overline{p})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_0\overline{v})=0,\quad U\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}=-\rho_0\frac{\partial\overline{p}}{\partial x},\quad U\frac{\partial\overline{v}}{\partial x}=-\rho_0\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}.$$

同时证明在这个近似下

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}\left(1+\left(\frac{\overline{p}}{p_0}-\gamma\frac{\overline{\rho}}{\rho_0}\right)\right),$$

于是可得 (2.8)~(2.10).

2.3. 在粒子材料中, 设面积为 $\delta x\delta y$ 的矩形边上的应力, 在正交于 x 轴的边上为 $(\sigma_x,\tau)\delta y$, 在正交于 y 轴的边上为 $(\tau,\sigma_y)\delta x$, 如图 2.20 所示. 证明斜边上的应力为

$$\boldsymbol{\sigma}\delta s=(\sigma_x\delta y+\tau\delta x,\sigma_y\delta x+\tau\delta y),$$

于是

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_x\cos\theta+\tau\sin\theta,\sigma_y\sin\theta+\tau\cos\theta).$$

定义

$$p=-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},\quad \tan 2\psi=\frac{2\tau}{\sigma_x-\sigma_y}.$$

证明沿着 $\boldsymbol{n}$ 和垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分量分别为

$$\sigma_n=-p+\tau\frac{\cos 2(\psi-\theta)}{\sin 2\psi},\quad \tau_\theta=\tau\frac{\sin 2(\psi-\theta)}{\sin 2\psi}.$$

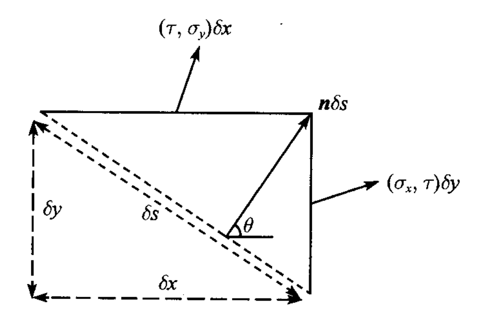


图 2.20 粒子中间单元的应力

推出

$$(\sigma_n + p)^2 + \tau_\theta^2 = \tau^2 \text{cosec}^2 2\psi,$$

这个关系式是已知的 (σ_n, τ_θ) 平面中的 Mohr 圆 (见图 2.21). 在图中所标识的区域中相应的摩擦力约束 $|\tau_\theta/\sigma_n| \leqslant \tan\phi$, 证明极限平衡点为

$$\tau = p\sin\phi\sin 2\psi, \quad \sigma_x = -p(1 - \sin\phi\cos 2\psi), \quad \sigma_y = -p(1 + \sin\phi\cos 2\psi),$$

于是当 $p > 0$ 时推出 (2.16).

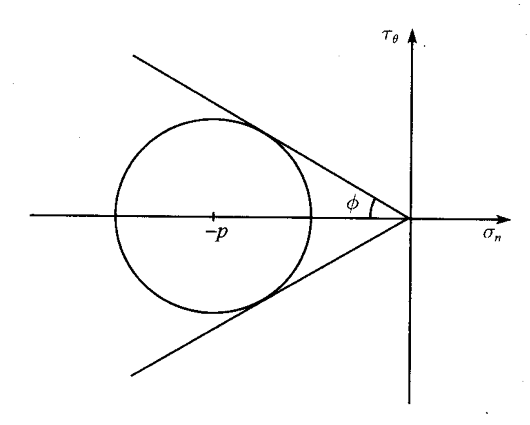


图 2.21　Mohr 圆

2.4. (i) p. 41 上的讨论等价于设

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -v,$$

将

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

写成 2 维的一阶方程组.

能否将

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \phi = 0$$

写成 2 维的方程组?

(ii) 证明, 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是常矩阵, 且

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{0}$$

可以写成 u_1 或 u_2 的二阶标量方程. 对于非常系数 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方程组还对吗?

2.5. 考虑非齐次非自治 Cauchy 问题

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u},x,y)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y}+\boldsymbol{d}(\boldsymbol{u},x,y)$$

具

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \quad \text{在 } x=0 \text{ 上}.$$

设

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=0 \quad \text{且} \quad \eta=y \quad \text{在 } x=0 \text{ 上}$$

及

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{且} \quad \xi=0 \quad \text{在 } x=0 \text{ 上},$$

并令

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix},$$

证明 $\boldsymbol{v}$ 满足齐次自治 Cauchy 问题

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{v})\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}$$

具

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0 \quad \text{在 } x=0 \text{ 上},$$

其中

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & 1\\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{且} \quad \boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ 0\\ y\end{pmatrix}.$$

2.6. (i) 证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u\frac{\partial u}{\partial y}$$

具 $u(0,y)=y$ 的解为 $u=y/(1-x)$.

(ii) 在这个例子中, 用 2.3 节的记号, $d(u)=u$, $u_0(y)=y$, R_a 和 R_d 是什么? 令 $\rho_a=\rho_d=\rho>0$, 证明 $M_a=M_d=\rho$. 推出 $D(U)=\rho^2/(\rho-U)$, $U_0(y)=\rho y/(\rho-y)$, 于是 $\partial U/\partial x=D(U)\partial U/\partial y$ 的解可以由

$$y=\frac{-\rho^2 x}{\rho-U}+\frac{\rho U}{\rho+U}$$

显式地给出. 推出 U 在抛物线

$$y = \frac{\rho}{2}(1 - x \pm 2\sqrt{x})$$

的下半分支上破裂. 这条曲线到原点的最近点的距离控制了 (2.35) 的收敛半径; 这个距离如何依赖于 ρ?

2.7. 设

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{c},$$

且 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的. 又设行向量 $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}(\dot{y}\boldsymbol{I} - \dot{x}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}, \tag{2.62}$$

其中 $(\dot{x}, \dot{y})$ 满足 $(x(t), y(t))$ 是特征线. 证明 $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{c}\dot{x}$, 即 (2.27) 式成立.

2.8. 设双曲型方程组可按照 Riemann 不变量 r_1, r_2 写成

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1(r_1, r_2)\frac{\partial}{\partial y}\right) r_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2(r_1, r_2)\frac{\partial}{\partial y}\right) r_2 = 0.$$

证明 x, y 满足 **线性方程组**

$$\frac{\partial y}{\partial r_2} = \lambda_1(r_1, r_2)\frac{\partial x}{\partial r_2}, \quad \frac{\partial y}{\partial r_1} = \lambda_2(r_1, r_2)\frac{\partial x}{\partial r_1}.$$

2.9. 将方程组

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{0}$$

的形式, 证明它是双曲的, 在特征线上 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \lambda = \pm 1, 3$. 求 $\boldsymbol{B}$ 的左特征向量 (译者注：原文写的是左特征值), 得到 Riemann 不变量 $3u - v - w$, $u - v + w$ 及 $u + 3v + w$.

*2.10. 将 (2.3) 和 (2.4) 重写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的形式, 并写成 $\boldsymbol{A}\partial\boldsymbol{u}/\partial x+\boldsymbol{B}\partial\boldsymbol{u}/\partial y=\boldsymbol{0}$, 证明方程组是双曲的, 特征线速度 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\lambda$ 满足 $\lambda=u$ 或 $\lambda=u\pm a$, 其中 $a^2=\gamma p/\rho$ (a 是音速). 乘上适当的行向量 $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}}(\dot{y}\boldsymbol{I}-\dot{x}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$, 分别得到特征线上的关系式

$$\gamma p\dot{\rho}-\rho\dot{p}=0,\quad \pm\gamma p\dot{u}-a\dot{p}=0,$$

推出只有一个 Riemann 不变量, 即在 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u$ 上 p/ρ^{γ}.

假设 p/ρ^{γ} 处处为同一常数; 验证 $u\pm 2a/(\gamma-1)$ 在 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=u\pm a$ 上分别为常数.

*2.11. 对方程组 (2.5)~(2.7) 重复习题 2.10, 将方程组重写为 $\boldsymbol{A}\partial\boldsymbol{u}/\partial x+\boldsymbol{B}\partial\boldsymbol{u}/\partial y=\boldsymbol{0}$ 的形式, 其中 $\boldsymbol{u}=(\rho,u,v,p)^{\mathrm{T}}$ 且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}u&\rho&0&0\\0&u&0&1/\rho\\0&0&u&0\\0&\gamma p&0&u\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}v&0&\rho&0\\0&v&0&0\\0&0&v&1/\rho\\0&0&\gamma p&v\end{pmatrix}.$$

推出特征方向由 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\lambda$ 给出, 其中 $\lambda=v/u$ (二重) 或

$$\lambda=-uv\pm\frac{a\sqrt{u^2+v^2-a^2}}{a^2-u^2},\quad a^2=\frac{\gamma p}{\rho}.$$

证明这些结果与 2.4.3 节一维不稳定气体动力学例子中 λ 的公式一致. 还可得到 $\lambda=v/u$ 上的关系式

$$\gamma p\dot{\rho}-\rho\dot{p}=0\quad 且\quad u\dot{u}+v\dot{v}+\frac{\dot{p}}{\rho}=0$$

及在其他特征线上

$$\gamma p(\lambda\dot{u}-\dot{v})+(v-\lambda u)\dot{p}=0,$$

如果存在的话, 求 Riemann 不变量.

2.12. 将方程组

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=v^{1/2}u,$$
$$v\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=u^{1/2}v$$

写成

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial y}=\boldsymbol{c}\tag{2.63}$$

的形式.

设 u 和 v 都是严格正的, 证明特征方向由 $\lambda = \dot{y}/\dot{x} = \pm(uv)^{-1/2}$ 给出. 同时证明相应于习题 2.7 的左特征向量是 $(v^{1/2}, \pm u^{1/2})$, 且当 $\lambda = 1/\sqrt{uv}$ 时, (2.27) 变成

$$v^{1/2}\dot{u} + u^{1/2}\dot{v} = 2(uv)^{1/2}\dot{x}.$$

证明对 (2.27), 条件

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{R}\right)$$

成立, 最后在这条特征线上有

$$u^{1/2} + v^{1/2} = x + \text{常数}.$$

2.13. 当 h 与 v^2 成比例时, 方程组 (2.1) 和 (2.2) 可写成

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\
&2\frac{\partial v}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

证明方程组是双曲的, 特征方向为 $\lambda = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = u \pm v$, 相应的 Riemann 不变量为 $u \pm 2v$.

若 $u(0,y) = 0$ 且 $v(0,y)$ 连续, 当 $y < 0$ 时为 1, 证明假设没有激波形式, 在 $x + y < 0$, $x > 0$ 上 $u = 0$, $v = 1$. 同时证明 $x + y$ 为正且充分小,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{3u}{2} - 1\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

在 $x + y = 0$ 上 $u = 0$. 验证

$$u = \frac{2(x+y)}{3x}$$

满足方程.

$v(0,y)$ 在 $y > 0$ 上必须满足什么与解相关的性质?

*2.14. 为减少习题 2.3 的计算, 设 $\phi = \pi/2$, $p = -(\sigma_x + \sigma_y)/2$. 利用关系式

$$\tau = p\sin 2\psi, \quad \tan 2\psi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y},$$

证明

$$\sigma_x = -p(1 - \cos 2\psi), \quad \sigma_y = -p(1 + \cos 2\psi),$$

于是

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{0},$$

其中 $\boldsymbol{u} = (p, \psi)^{\mathrm{T}}$ 且

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\psi - 1 & -2p\sin 2\psi \\ \sin 2\psi & 2p\cos 2\psi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \sin 2\psi & 2p\cos 2\psi \\ -(1+\cos 2\psi) & 2p\sin 2\psi \end{pmatrix}.$$

推出方程组有两重特征线

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lambda = -\cot\psi,$$

其上 ψ 是常数. (若 $\phi < \pi/2$, 可以证明特征线分成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\cot\left(\psi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right)$$

且 Riemann 不变量为 $\psi \pm \dfrac{1}{2}\cot\phi \log p$.)

2.15. 设 A 和 τ 与 x 和 t 的关系为

$$A = A(x,t) \quad \text{和} \quad \tau = \int_{t_0}^{t} T(t')\mathrm{d}t'.$$

由链式法则

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial A}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to T\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial}{\partial A},$$

证明

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 1\bigg/\frac{\partial x}{\partial A} \quad \text{且} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -T\frac{\partial x}{\partial \tau}\bigg/\frac{\partial x}{\partial A}.$$

于是在 (2.11) 和 (2.12) 中消去 u, 证明

$$\frac{\partial^2 x}{\partial A^2} - c\frac{\partial^2 x}{\partial A \partial \tau} = -\frac{1}{A}\frac{\partial x}{\partial A}.$$

2.16. 方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial (h^2)}{\partial t} + \frac{\partial (h^2 v)}{\partial x} = 0$$

是轴对称无黏性薄液体流束的近似模型, 半径为 $h(x,t)$, 轴向速度为 $v(x,t)$, 与 x 轴对齐. 证明, 如果 x 和 t 视为 v 和 h 的函数, 方程组变成

$$\frac{\partial x}{\partial h} - v\frac{\partial t}{\partial h} - \frac{1}{h^2}\frac{\partial t}{\partial v} = 0, \quad \frac{h}{2}\frac{\partial t}{\partial h} - v\frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

进一步证明消去 x 得到

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(h^3\frac{\partial t}{\partial h}\right) + 2\frac{\partial^2 t}{\partial v^2} = 0.$$

2.17. 方程组 (2.3) 和 (2.4) 由物理守恒律

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

得到, 其中

(i) $P=\rho$, $Q=\rho u$;

(ii) $P=\rho u$, $Q=p+\rho u^2$;

(iii) $P=p/(\gamma-1)+\dfrac{1}{2}\rho u^2$, $Q=u\Big(p/(\gamma-1)+\dfrac{1}{2}\rho u^2\Big)+pu$.

证明以速度 V 移动的激波的 Rankine-Hugoniot 条件为 $[Q]_-^+=V[P]_-^+$, 于是由 (i) 可得 $[\rho u]_-^+=V[\rho]_-^+$. 将它用于 (ii) 和 (iii) 得到 (2.49) 的其他条件.

2.18. 对方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{n}u^n\right)=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\quad 对\ -\infty<z<\infty$$

求行波解 $u(x,y)=U(z)$, 其中 $z=(y-Vx)/\varepsilon$. 证明

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{n}U^n-VU+常数,$$

推出 $V=\left[\dfrac{1}{n}U^n\right]_{-\infty}^{\infty}/[U]_{-\infty}^{\infty}$. 同时证明, 当 $n=2$ 时, 若 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}z<0$, 当 $z\to\pm\infty$ 时, U 只能趋于 $U(\pm\infty)$.

第 3 章　二阶标量方程引论

3.1　绪　　论

第 2 章我们试图用尽可能最简单的术语, 描述任意的偏微分方程 Cauchy 问题解的存在性唯一合理的一般框架. 现在可以花费较多的笔墨来解释这个框架的更多细节, 而将对经常出现的三类 *二阶标量方程* 的分析放到第 4~6 章. 这使我们不仅可以尽可能简单地阐述当求解 "非双曲" 方程时所产生的微妙之处, 而且使我们可以看到第 2 章提出的想法在更具体的问题中所起的作用.

在开始考虑第 4~6 章特殊的二阶方程时, 很快就会遇到很大的技术困难. 因此, 本章着重说明第 4~6 章所需要的主要思想.

在开始之前, 先考察一个足够简单的二阶标量方程, 说明会出现的情况. 它来自于 Fourier 分析, 可以看到二阶偏微分方程 Cauchy 问题解的性质与二阶常微分方程初值问题有很大的不同. 在后一种情形中, Cauchy-Picard 定理保证了存在性、唯一性及数据的连续依赖性, 只要假设适当的 Lipschitz 连续. 然而, 偏微分方程具更光滑的数据也会丢失关于 Cauchy 数据的连续依赖性. 这个事实是对偏微分方程进行分类的基本动机之一. 考虑两个问题的解

(i)
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

(ii)
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

在 $y>0$ 上, 并有数据

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\quad 对\ -\infty<x<\infty. \tag{3.3}$$

假设 a_n 使得 $u(x,0)$ 有连续的二阶导数, 显然这需要 $a_n=o(n^{-2})$, 当 $n\to\infty$ 时.

分离变量法可以给出相应的解为

(i)
$$u=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-n^2y}\cos nx, \tag{3.4}$$

(ii)
$$u=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{n^2y}\cos nx. \tag{3.5}$$

对 $y>0$, 级数 (3.4) 比 (3.3) 具有更好的收敛性, 而级数 (3.5) 甚至不能收敛, 除非当 $n\to\infty$ 时, a_n 下降得非常快. 例如, 即使 $a_n=\mathrm{e}^{-n^2}$, 当 $y\to 1$ 时 (3.5) 也会破裂 (如果 $a_n=\mathrm{e}^{-\varepsilon n^2}$, $\varepsilon>0$, 不管它多么小, 在 $y=\varepsilon$ 时解会破裂, 而如果 $a_n=O(\mathrm{e}^{-\varepsilon n})$, 如同一般对周期解析函数, 它将无解).

类似地, 考虑问题

$$\text{(iii)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.6}$$

$$\text{(iv)}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.7}$$

对 $y>0$, 例如

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0, \tag{3.8}$$

Fourier 级数解分别为

$$\text{(iii)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos ny\cos nx, \tag{3.9}$$

$$\text{(iv)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n\cosh ny\cos nx, \tag{3.10}$$

可与 (3.4) 和 (3.5) 作类似的对照分析.

从 (3.6) 到 (3.7) 的转换在实际中很容易出现, 如前面 p. 38 已考虑过的. 假设方程组 (2.8)~(2.10) 描述线性化稳定气体动力学, 其有一个 "无旋" 解, 使得 $(\overline{u},\overline{v})=\nabla\phi$. 消去 $\overline{p}$ 得到

$$\left(1-\frac{U^2}{a_0^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0; \tag{3.11}$$

根据 Mach 数 U/a_0 大于 1 还是小于 1, 可分别得到 (3.6) 或 (3.7). 事实上, 当 U/a_0 非常接近于 1 时, (3.11) 的导数破裂, 对某些 "跨音速" 流合适的模型是

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0. \tag{3.12}$$

类似于 (2.41), 可以作速度图变换

$$x=X(U,V),\quad y=Y(U,V),$$

其中

$$U=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad V=\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

得到

$$U\frac{\partial^2 Y}{\partial V^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial U^2}=0. \tag{3.13}$$

这个方程称为 Tricomi 方程; 它比 (3.6) 或 (3.7) 更微妙, 我们后面会回到此.

对 (3.6) 和 (3.7) 的对照进行研究的最后一个动机来自于玻璃制造模型 (2.13)~(2.15). 当我们想预测中心曲面 $z=H(x,y)$, 必须考虑图 2.4 中 *侧向力* 平衡, 可以得到

$$\sigma_x\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+2\tau\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\sigma_y\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0, \tag{3.14}$$

其中 σ_x, σ_y 和 τ 由 (2.14) 拉伸速度 (u,v) 给出. 为尽可能简单, 仅考虑最简单的速度分布, 即关于位置是线性的, $u=\alpha x$, $v=\beta y$; 得到

$$(2\alpha+\beta)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+(\alpha+2\beta)\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0. \tag{3.15}$$

于是, 依赖于系数的符号, 我们再一次遇到区分 (3.6) 和 (3.7) 不同的基本重要性.

记住这个结论, 现在考虑二阶标量方程的 Cauchy 问题. 从具两个自变量的半线性情形开始是最容易的, 而将真正的拟线性方程放到本章结束时再考虑.

3.2 半线性方程的 Cauchy 问题

考虑具线性主部的二阶标量方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{3.16}$$

其中 a, b, c 是 x 和 y 的函数. 同第 2 章一样, 当方程的右端不依赖于 u 时, 可用变换 $u_1=\partial u/\partial x$, $u_2=\partial u/\partial y$ 将方程化为二维方程组 (否则方程组是 3×3 的). 如果可以这么做, 合适的 Cauchy 边界数据应在 (x,y) 平面中的曲线 Γ 上给出 u_1 和 u_2 的值. 然而, 即使当 f 依赖于 u, (3.16) 式合理的 Cauchy 边界数据应为

$$x=x_0(s),\quad y=y_0(s),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=p_0(s),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=q_0(s)\quad 对\ s_1\leqslant s\leqslant s_2. \tag{3.17}$$

沿 Γ 积分, 意味着差一个常数 $u=u_0(s)$ 是给定的, 如果已知这个常数, 等价的[28]数据集合为

$$u=u_0(s),\quad \frac{\partial u}{\partial n}=v_0(s)\quad 对\ s_1\leqslant s\leqslant s_2, \tag{3.18}$$

28 这是因为当 s 为弧长参数时, $\mathrm{d}u_0/\mathrm{d}s=p_0\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s+q_0\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}s$ 及 $\partial u/\partial n=-q_0\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s+p_0\mathrm{d}y_0/\mathrm{d}s$.

这就是 (3.16) 传统的 Cauchy 数据. 几何上, Cauchy 数据表示解曲面 $u = u(x,y)$ 不仅应通过投影为 Γ 的边界曲线, 而且给定了它在该曲线上的切平面, 从而给出了这个曲面的 "边界条".

(3.16) 解存在的一个必要但不一定充分的条件是边界数据 (3.18) 在边界曲线上唯一定义了二阶导数 $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial x\partial y$, $\partial^2 u/\partial y^2$.[29] 进一步对

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

沿 Γ 微分, 有这些导数必满足

$$\begin{aligned} p_0' &= x_0'\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y_0'\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \\ q_0' &= x_0'\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y_0'\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

于是条件为

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x_0' & y_0' & 0 \\ 0 & x_0' & y_0' \end{vmatrix} \neq 0,$$

化简为

$$a{y_0'}^2 - 2bx_0'y_0' + c{x_0'}^2 \neq 0. \tag{3.19}$$

这是 (1.5) 对二阶方程的推广, 在 (3.16) 可以视为 2×2 方程组的情况下, 它等价于 (2.23).

3.3 特 征 线

如第 1 和第 2 章, 定义 (3.16) 的特征线为 (x,y) 平面中的曲线, 其上 Cauchy 数据不能唯一定义二阶导数. 于是在特征线上给定 $x(t)$, $y(t)$, $\partial u/\partial x(t)$ 及 $\partial u/\partial y(t)$, 则由前面得到的结论, 有

$$a\dot{y}^2 - 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0. \tag{3.20}$$

这在一点上定义了两个特征方向

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

29 当然, 它没有给出 u 的更高阶导数.

但它们不一定是实的或不同的特征方向. 进一步, 若对二阶导数存在 (不唯一), 在特征线上进一步成立[30]

$$\begin{vmatrix} a & f & c \\ \dot{x} & \dot{p} & 0 \\ 0 & \dot{q} & \dot{y} \end{vmatrix} = 0,$$

其中我们用了标准记号 $p = \partial u/\partial x$, $q = \partial u/\partial y$. 上式可化为

$$a\dot{y}\dot{p} + c\dot{x}\dot{q} = f\dot{x}\dot{y}, \tag{3.21}$$

但作为常微分方程, 这个方程只是难得地关于 t 是可积的. 不过, 如果我们幸运地沿实特征线可积, 则 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的线性组合沿这条特征线是已知的, 这就是 p. 40 上所谓的 Riemann 不变量. 因此, 如果我们知道一族特征线上的 Riemann 不变量, 二阶偏微分方程就简化为一阶方程.

更好地, 如果存在两个不同的实特征线族, 每个特征线族上有一个 Riemann 不变量, 则可能可以计算出 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$, 于是从两个 Riemann 不变量的关系式中可以代数地求得 u, 这是下面定义的关键动机. 注意到, 当 $f = 0$ 时, (3.20) 和 (3.21) 意味着在特征线上有

$$a\dot{p}^2 + 2b\dot{p}\dot{q} + c\dot{q}^2 = 0. \tag{3.22}$$

注意, 如同 (1.17), 重新定义特征线为越过曲线, u 的二阶导数可以不连续, 可立即导出 (3.20), 而不是 (3.21).

当我们决定特征线在 (3.16) 边值问题的求解中起什么作用时, 我们注意到在 3.1 节讨论的模型问题中, 方程 (3.6) 和 (3.7) 具数据 (3.8) 虽然都是 Cauchy 问题, 但其解彼此之间具有非常不同的性质, (3.6) 有实特征线, 而 (3.7) 没有. 同时注意到 (3.1) 和 (3.2) 具有 Cauchy 问题的特性, 有与偏微分方程 y 导数同样多的数据, 有重合的实特征线 $y =$ 常数. 如何对方程, 例如 (3.16), 进行分类的问题出现了. 如果可能的话, 改变坐标系, 使方程的左端写成简单的 "标准形式", 而不改变其分类特性, 这可确证对 (3.16) 发生了什么. 因此, 我们考虑一一变换 $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, 其 Jacobi 行列式 $|\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)|$ 有界且非零. 由链式法则可得

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = g\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \tag{3.23}$$

30 这是 Fredholm 二择性的另一个结果.

对某些函数 g, 其中

$$\alpha = a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \tag{3.24}$$

$$\beta = a\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}, \tag{3.25}$$

$$\gamma = a\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2. \tag{3.26}$$

于是, 在新坐标系下, 特征方程 (3.20) 的判别式为

$$\beta^2 - \alpha\gamma = (b^2 - ac)\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right|^2,$$

其中 $b^2 - ac$ 是在原坐标系下的判别式. 因此, (3.16) 的特征线是否是实的在变换下是不变的.

这是最终的依据促使我们对形如 (3.16) 的方程作如下的分类:

• 如果 $b^2 > ac$, 这是 *双曲的*. 此时存在两条不同的实特征线. 根据 (3.9), Cauchy 问题的解是 “好的”. 第 4 章将对这种情况进行更详细的讨论.

• 如果 $b^2 < ac$, 这是 *椭圆的*. 此时没有实特征线. 根据 (3.10), Cauchy 问题的解至少是不可预测的. 第 5 章将对这种情况进行更详细的讨论.

• 如果 $b^2 = ac$, 这是 *抛物的*. 此时有一个 “二重” 的实特征线. 根据 (3.4) 和 (3.5), 所谓 Cauchy 问题的解可能好也可能不好. 显然这是三种情形中最精细的, 但也是应用中最常见的, 至少是工业中最感兴趣的模型. 这是为什么第 6 章考虑抛物型问题细节时这么长的原因.

这种分类告诉我们应当能够找到适当的坐标系, 以判断任何形如 (3.16) 的方程的类型, 很快我们会找到这种*标准型*. 不过让我们先离开这一问题, 而注意 3.1 节提到的几个实际例子所指出的有些模型具有*混合型*的特性, 即在 (x, y) 平面的某些区域中是双曲的, 在另一些区域中是椭圆的. 事实上, 一个平凡的习题可以证明 Tricomi 方程 (3.13) 的特征线如图 3.1 所示 (见习题 3.5(b)); 它仅在 $U < 0$ 时是双曲的, 这个区域可以视为超音速流的区域, 以*声线* $U = 0$ 为界限. 同样地, 如果在 (3.15) 中假设 α 和 β 是位置的函数, 那么方程的双曲性依赖于局部扩展和压缩区域有多大. 这给我们三个明显的信息: 第一, 我们期望任何数学解在越过从椭圆型变为双曲型的声线时, 其物理意义会发生戏剧性的改变; 第二, 我们对适定问题提出的任何边界数据在任何与声线相交的边界上会有突然的变化; 第三, 我们可能使用的任何离散数值方法必须反映这种行为的变化. 进一步, 混合型问题具有我们已经掩盖的另一个重要方面. 在 Tricomi 模型 (3.13) 和玻璃薄片模型 (2.15) (*译者注: 原书中为* (3.15)) 中, 声线的位置是事先知道的. 对 Tricomi 方程, 这是速度图变换

的结果; 对玻璃模型, 这是流体速度不耦合问题的结果. 然而, 在应用中, (3.16) 左端的系数通常以某些方式包含因变量, 方程组极易发生类型变化, 比如从双曲型变成椭圆型, 这些方式无法显示如 (3.10) 的病态行为. 但是, 这个讨论使我们离开了我们要讨论的半线性情形, 仍没处理标准型问题.

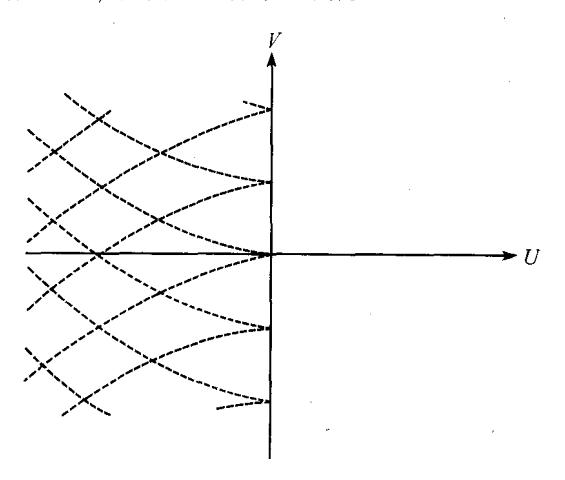


图 3.1　Tricomi 方程 (3.13) 的特征线

3.4　半线性方程的标准型

3.4.1　双曲型方程

当方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

是双曲型时, 在每一点上存在两个实的特征方向, 定义了两个不同的特征线族. 假设 a, b, c 是 Lipschitz 连续的, 特征条件 (3.20), $a\dot{y}^2-2b\dot{x}\dot{y}+c\dot{x}^2=0$, 是一对常微分方程, 其积分必定存在, 虽然不一定可以显式写出. 于是可以定义两个 **特征变量**, 一个变量为常值给出一族特征线, 第二个变量为常值给出另一族特征线. 这种定义不是唯一的, 因为任何特征变量的适当的函数都可定义为特征变量, 于是在应用中, 这种变量经常选择得比较美观. 在 (3.23) 中选择 ξ 和 η, 使得 $\xi(x,y)=$ 常数和 $\eta(x,y)=$ 常数是特征方程的积分曲线[31]. 这样, 在 $\xi(x,y)=$ 常数上, $(\partial\xi/\partial x)\dot{x}+(\partial\xi/\partial y)\dot{y}=0$, 对 $\eta(x,y)=$ 常数有类似的关系式. 代入 (3.20) 式, 可以看到 $(\partial\xi/\partial x)/(\partial\xi/\partial y)$ 和 $(\partial\eta/\partial x)/(\partial\eta/\partial y)$ 是

$$a\lambda^2+2b\lambda+c=0 \tag{3.27}$$

31 这个区别与 1.8 节和 2.6 节中我们所讨论的特征线的表达式有关.

的两个不同的实根. 于是, 在 (3.24)~(3.26) 中, $\alpha=\gamma=0$. 同时

$$2\beta=a\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2b\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

它的值不为零, 因为 (3.27) 只有两个根 λ. 于是双曲型方程有 *标准型*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=G\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{3.28}$$

特征变量的不同选择仅导致方程的右端项不同.

例 3.1 (*波动方程*) 对 (3.28) 研究得很充分的例子是

$$a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),\quad a_0=\text{常数}, \tag{3.29}$$

当 $f=0$ 时, 称为 *波动方程*. 特征线为 $a_0^2\dot{y}^2=\dot{x}^2$, 问题是双曲的. 特征变量的一种选择为 $\xi=x-a_0y$ 及 $\eta=x+a_0y$. 容易验证 $\alpha=\gamma=0$ 及 $\beta=2a_0^2$, 从而标准型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{4a_0^2}f\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\eta-\xi}{2a_0}\right)=g(\xi,\eta). \tag{3.30}$$

这个例子说明将方程写成标准型所带来的好处, 它使我们可以用显式积分得到 (3.30) 的通解, 称为 d'Alembert *公式*

$$u=\iint g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+h_1(\xi)+h_2(\eta), \tag{3.31}$$

其中 h_1 和 h_2 是任意函数, 由边界条件决定. 此外, 我们可以对 (3.29) 沿特征线积分得到这个公式, 从而得到 Riemann 不变量

$$\pm a_0\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\int f\mathrm{d}y\quad \text{在 } x\mp a_0y=\text{常数上}. \tag{3.32}$$

例 3.2 通常问题不那么简单, 如考虑

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{3.33}$$

特征线由 $y\dot{y}=\pm x\dot{x}$ 给出; 方程除了在我们不感兴趣的坐标轴 $x=0$ 或 $y=0$ 以外是双曲的. 特征变量为 $\xi=y^2-x^2$, $\eta=x^2+y^2$, 两族特征线如图 3.2 所示; 注意它们与坐标轴相交.

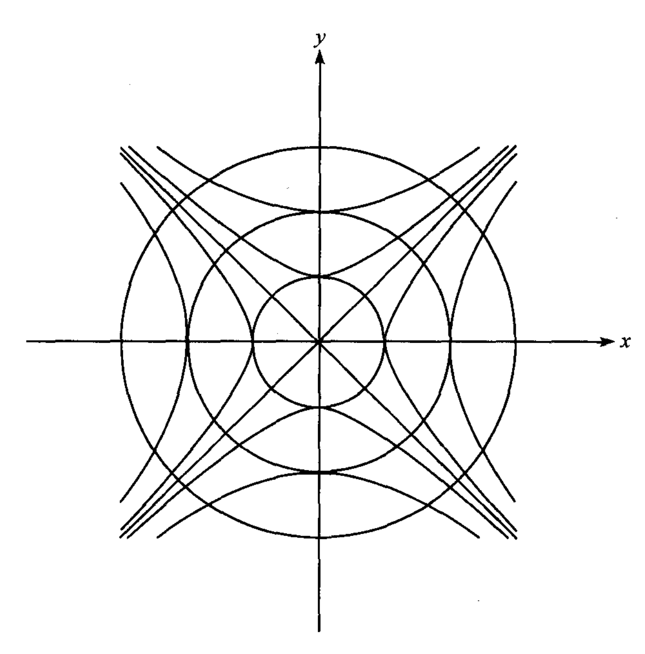


图 3.2 方程 (3.33) 的特征线

经过冗长的计算得到标准型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{2(\eta^2-\xi^2)}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial u}{\partial\xi}\right), \tag{3.34}$$

但此时没有 Riemann 不变量, 也不能对 (3.34) 显式地积分.

3.4.2 椭圆型方程

在椭圆型的情形下, 实特征变量不再存在, (3.20) 的积分是函数 $y(x)$ 的共轭复函数对. 令 ξ 和 η 为复积分的实部和虚部, 使得 "复" 特征线为 $\xi \pm \mathrm{i}\eta =$ 常数, 及 $(\partial\xi/\partial x \pm \mathrm{i}\partial\eta/\partial x)\dot{x} + (\partial\xi/\partial y \pm \mathrm{i}\partial\eta/\partial y)\dot{y} = 0$. 代入 (3.23), 取实部和虚部得到 $\alpha = \gamma \neq 0$ 且 $\beta = 0$. 所以标准型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{3.35}$$

当 $G = 0$ 时, 这个方程称为 Laplace *方程*. p. 41 上的 Cauchy-Riemann 方程组及例 (3.7) 和 (3.8) 都表明当 $G = 0$ 时, 如果 (3.35) 是适定的, Cauchy 边界数据是不合适的. 在这种情况下, 我们重申 2.3 节中提到的有关解析延拓的危险; 事实上这个结论对所有半线性或其他的椭圆型方程都是正确的. 因此, 第 5 章首先决定什么数据对椭圆型方程是适合的. 且不说施加 Cauchy 数据太强这样明显的结论, 仅对

(3.35) 在 $G=0$ 时作一般的观察. 与 (3.31) 类似有

$$u = h_1(\xi + \mathrm{i}\eta) + h_2(\xi - \mathrm{i}\eta), \tag{3.36}$$

其中 h_i 必是解析函数, 使得导数存在. 由于我们要找实解[32], 最好将 (3.36) 写成

$$u = \mathrm{Re}h(\xi + \mathrm{i}\eta),$$

它是 Laplace 方程的 "通解", 虽然我们可以同样地写为 $u = \mathrm{Re}h(\xi - \mathrm{i}\eta)$. 注意到与 (3.31) 的相比, (3.31) 的通解包含两个二次可微函数, 而不是一个解析函数. 复变函数理论与 $\mathbb{R}^2$ 中 Laplace 方程的解紧密相关, 这并不令人吃惊, 第 5 章提供了几个例子说明如何将这个理论运用于实际应用中.

3.4.3 抛物型方程

在抛物型的情形下, 特征方程 (3.20) 有一个重根, 从而只有一个实特征变量. 若令 η 为这个变量, 于是 $(\partial\eta/\partial x)\dot{x} + (\partial\eta/\partial y)\dot{y} = 0$, 则代入 (3.26) 后, $\gamma = 0$. 对 ξ 的选择总是有自由度的, 若 $a \neq 0$, 可以方便地取 $\xi = x$, 使得 $\alpha = a$ (若 $a = 0$, 由于这时 $c \neq 0$, 可取 $\xi = y$). 而 $\gamma = (a\partial\eta/\partial x + b\partial\eta/\partial y)^2/a = \beta^2/a$, 于是 $\beta = 0$. 这样标准型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{3.37}$$

比较抛物型方程 $\partial^2 u/\partial\xi^2 = 0$ 和 $\partial^2 u/\partial\xi^2 = \partial u/\partial\eta$ 说明这种情形的微妙性. 前者虽然是平凡的, 它很像双曲型方程, 因为其通解为 $\xi f(\eta) + g(\eta)$, 其中 f 和 g 是任意的, 于是这个解由任意非特征线, 即除了 $\eta =$ 常数[33] 以外的任意直线上的 Cauchy 数据唯一定义. 后者, 称为 *扩散方程* 或 *热传导方程*, 非常复杂, 在第 6 章占据了很多篇幅.

注意, 如应用数学中经常发生的, 退化情形可以用非退化情形的极限来帮助理解. 这里, 抛物型方程应该用什么数据的想法, 可以从双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{3.38}$$

取 $\varepsilon \to 0$ 时的极限得到. 这个方程是第 4 章研究的一个例子, 称为 *电报方程*; 其特征线是 $\eta \pm \varepsilon\xi =$ 常数, 我们希望有适定的数据, 例如在非特征线 $\eta = 0$ 上给定

$$u = f(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\xi).$$

---

32 有趣的是, 当实部 $u(\xi,\eta)$ 已知, 我们总能写出解析函数 $h(\xi+\mathrm{i}\eta)$, 公式是

$$h(\xi + \mathrm{i}\eta) = 2u\left(\frac{\xi + \mathrm{i}\eta}{2}, \frac{\xi - \mathrm{i}\eta}{2\mathrm{i}}\right) + 常数.$$

33 回忆一下我们在 2.4.2 节和 2.4.3 节所看到的, 具重特征线的方程组可表现出双曲型方程组的结构.

然而, 如图 3.3 所示的特征线, 表明 u 沿 η 方向的变化比 ξ 方向快得多. 事实上, 如果在 (3.38) 中忽略 ξ 的导数, 可得到近似解[34]

$$u \approx f(\xi) - \varepsilon^2 g(\xi) \mathrm{e}^{-\eta/\varepsilon^2},$$

表明, 当 η 比 ε 大得多, 解 "忘记" 了 $g(\xi)$, 仅记住数据 $u = f(\xi)$. 第 6 章将验证对 $\eta \geqslant 0$ 的扩散方程, $u = f$ 是正确的 Cauchy 数据, 虽然, 如例 3.2 所示, 对 "反向" 扩散方程 $\partial^2 u/\partial\xi^2 = -\partial u/\partial\eta$, $\eta \geqslant 0$, 它是不正确的.

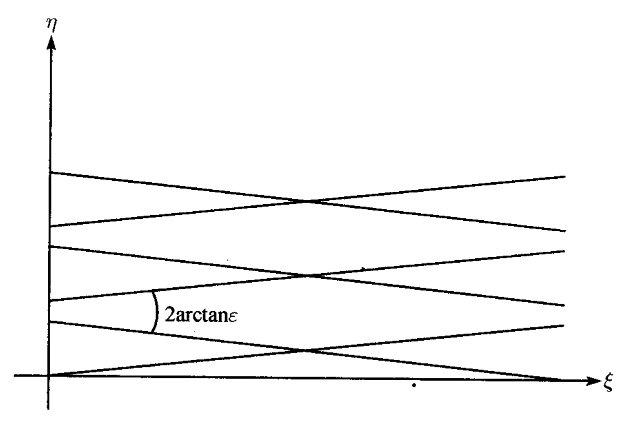


图 3.3 电报方程的特征线

3.5 一些一般注记

拟线性方程

当 (3.16) 中系数 a, b 或 c 依赖于 u 和 (或) 其一阶导数时, 上面给出的分类不能精确地求出来. 除非我们非常幸运, (3.20) 恰好是可积的, 那么我们可以做的是在那些假设已知精确值的某些点或 (x, y) 平面上的某些区域内 "冻结" 这些系数, 于是可将 (3.16) 视为常系数方程. 事实上, 如已经提及的, 当我们对跨音速流建立模型 (3.13) 和对玻璃层建立模型 (3.15) 时, 已经隐含地采用了这种方法. 然而由此得到的信息可能是非常有价值的, 不仅因为它揭示了局部解的行为范围, 而且, 对双曲型问题, 它提供了在图 2.6 和图 2.9 中直线上近似迭代方法的基础. 基于 "局部化" 近似带来的固有危险与其说来自于对实际情况或是特征线的不当解释, 不如说是由于没有注意到非线性导致的奇异性发展. 事实上, 在 1.4 节中已经看到, 即使对一阶方程也会发生这种情况.

Goursat 问题

3.2 节仅考虑了 Cauchy 问题, 如我们所知, 这对双曲型方程是适定的. 然而, 在

34 技巧性地, 在 $\eta = 0$ 上有一个 "边界层".

某些产生双曲型方程的应用问题中, Cauchy 数据不是给出非特征线 Γ 上 u 和 $\partial u/\partial n$ 的值, 而仅给出这种曲线 Γ 上 u 的值. 不过作为补偿, u 还在特征线 (比如 $\xi=\xi_0$) 上给出, 使得不会破坏在特征线上满足方程 (图 3.4). 这称为 Goursat 问题. 容易猜测, 它是适定的, 只要简单地数一下沿通过 P 点的特征线的信息数, 如图 2.6 和图 2.7. 例如, 如果我们显式地知道两个独立的 Riemann 不变量, Γ 上的数据决定它们之间的一个函数关系, 而 $\xi=\xi_0$ 上的数据决定另一个关系[35]. 第 4 章将回到这个问题.

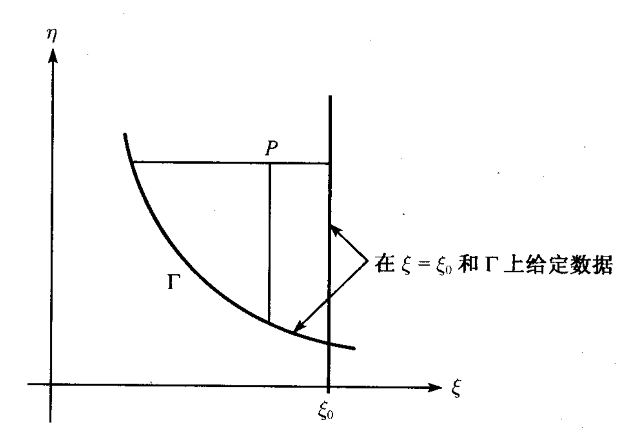


图 3.4 Goursat 问题通过 P 的特征线

子特征线

如电报方程 (3.38), 当求二阶方程解时, 作为近似, 在某些或所有主部乘上小参数, 此时有些术语经常会用到: 这类问题属于 **奇异值摄动** 理论的范畴, 在如 [3], [22], [25] 中有很好的描述. 特别地, 会出现一种现象, 当主部完全忽略时, 通常剩下一阶标量方程, 这种方程总有单参数实特征线族. 这些曲线有时称为 **子特征线**, 它们显然含有全部解的很多重要信息. 遗憾的是, 在边界附近, 它们经常会有不好的性质, 尤其当方程的主部是椭圆的或当它们与边界 "接触" 时. 习题 3.9 和 3.10 给出了这两种行为的例子.

多自变量

当有三个或更多自变量时, 不经过类似于第 2 章结束时的讨论, 我们说不出更多的结论. 然而, 可以考虑对 (3.6) 和 (3.7) 在 m 维的推广, 考虑常系数方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sum_{i=1}^{m-1} c_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

35 这种情形特别有兴趣的例子是考虑 Tricomi 方程 (3.13) 的 Goursat 问题, 其中 Γ 是越过声线 $U=0$ 的曲线.

仅当对所有 i, $c_i > 0$ 时, Cauchy 数据

$$u|_{y=0} = \sum_{n_1,\cdots,n_{m-1}=0}^{\infty} a_{n_1\cdots n_{m-1}} \cos(n_1 x_1)\cdots\cos(n_{m-1}x_{m-1}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

的 Fourier 级数解可以写成

$$u = \sum_{n_1,\cdots,n_{m-1}=0}^{\infty} a_{n_1\cdots n_{m-1}} \cos(ny)\cos(n_1 x_1)\cdots\cos(n_{m-1}x_{m-1}),$$

其中 $n^2 = \sum_{i=1}^{m-1} c_i n_i^2$. 经过更精致的分析可以得到, 对大多数实"波数" n_i, 解关于 y 指数增长, 除非实二次型

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$$

(即 (3.19) 式左端的推广) 秩为 m, 正负符号差为 $m-1$. 二次型的这个特征在 3.4 节中的变量变换下是不变的, 这是任意数目自变量的二阶方程双曲性推广定义的基础. 但是, 它需要与相应的二次型的秩和正负符号差的可能情形一样多的形容词来描述非双曲型方程. 不过, 当秩和符号差均为 m 时, 通常用椭圆型这一词. 如 2.6 节所解释的, 双曲型方程的特征线是 $m-1$ 维流形, 在点 (y, x_i) 附近是单叶的锥形式, 包括"类时" y 方向.

习　题

3.1. 设 a, b, c 为常数, 考虑两个方程

$$L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - b\frac{\partial u}{\partial \eta} - cu = 0, \quad L_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - b\frac{\partial u}{\partial \eta} - cu = 0.$$

写出含有 ξ 和 η 的两个独立的任意函数的通解

(a) 对 L_1, 当 $c=0$, a 或 b 为零时;

(b) 对 L_2, 当 b 为零时.

用分离变量法证明每种情形都可找到 ξ 和 η 的指数形式的解.

3.2. 设 $D_j = a_j\partial/\partial x + b_j\partial/\partial y + c_j$, $j = 1,\cdots,4$, 其中 a_j, b_j, c_j 是常数, 且

$$D_1 u + D_2 v = 0,$$
$$D_3 u + D_4 v = 0.$$

证明 u 和 v 满足二阶标量方程, 其类型依赖于

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\right) = 0$$

的根.

3.3. 证明方程

$$\text{(i)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{(ii)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u, \quad \text{(iii)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{(iv)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

可以写成 $\boldsymbol{u} = (u, v)^{\mathrm{T}}$ 的一阶方程组, 其中 $v = \partial u/\partial x$, 其形式为

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} + \boldsymbol{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{c},$$

其中对情形 (i)~(iii)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

而对情形 (iv)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

进一步证明, 当 λ 满足 $\det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{A}) = 0$ 时, 有 $\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{A}$ 在情形 (i)~(iii) 下有两个线性无关的左特征向量, 而对情形 (iv) 只有一个. 同时证明 (i)~(iii) 通常可满足 Cauchy 数据, 而 (iv) 不能.

3.4. 通过变换变成标准型, 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x+y) = 0$$

的通解为 $u = f(x-3y) + g(y-3x) + \dfrac{3}{16}\sin(x+y)$, 其中 f 和 g 是任意的.

3.5. 证明 Tricomi 型方程

(a) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

(b) $-y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

(c) $-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

在 $x < 0$ 或 $y > 0$ 且 $x \neq 0$ 时都是双曲的, 特征坐标为

(a) $\xi = y + 2(-x)^{1/2}, \quad \eta = y - 2(-x)^{1/2},$

(b) $\xi = 3x + 2y^{3/2}, \quad \eta = 3x - 2y^{3/2},$

(c) $\xi = y + \log|x|, \quad \eta = y - \log|x|$.

对每种情形画出特征线, 并证明相应的标准型为

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi} - \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right) \Big/ 2(\eta - \xi)$,

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi} - \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right) \Big/ 6(\xi - \eta)$,

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta} - \dfrac{\partial u}{\partial\xi}\right) \Big/ 4$.

3.6. 证明, 如果

$$(x + \alpha y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

其中 $\alpha \neq 0$, 特征线由

$$(z \pm \alpha)^2 \mp 4\alpha z + 2\alpha^2 \log(z \pm \alpha) + x = \text{常数}$$

给出, 其中 $z^2 = x + \alpha y$. 证明, 对小的 z, 过原点的特征线为

$$\mp(x + \alpha y)^{3/2} = \frac{3\alpha x}{2}.$$

当 $\alpha = 0$ 时情况如何?

3.7. 证明方程

$$2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8x\frac{\partial u}{\partial x} + 5y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

是双曲的, 特征坐标为 $\xi = x^2/y$, $\eta = y^2/x$. 证明标准型为

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\xi} = 0,$$

于是通解为 $u(\xi,\eta) = f(\xi)/\eta + g(\eta)$, 其中 f 和 g 是任意的. 当 $u(1,y) = y^2$, $\partial u/\partial x(1,y) = 1$ 时, 证明

$$u(x,y) = \frac{1}{6}\left(2 - \frac{2}{x^3} + \frac{7y^2}{x} - \frac{y^2}{x^7}\right).$$

3.8. 证明, 当 $u(x,0) = u_0(x)$, $\partial u/\partial t(x,0) = v_0(x)$ 时, d'Alembert 公式 (3.31) 为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x - at) + u_0(x + at)) + \frac{1}{2a_0}\int_{x-a_0t}^{x+a_0t} v_0(s)\mathrm{d}s.$$

3.9. 证明可以选取常数 a, b, 使得 $u = ay + by\mathrm{e}^{-x/\varepsilon}$ 满足

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{对 } -1 < x < 1,$$

具 $u(1,y)=y$, $u(-1,y)=-y$. 验证, 当 $\varepsilon\to 0+$ 时, u 在子特征线 $y=$ 常数上为常数, 且满足一个边界条件, 但不满足另一个. 当 $\varepsilon\to 0-$ 时情况如何?

3.10. 设 $u(x,y,t)$ 满足 **椭圆型方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad 对\ 0<y<1,$$

具

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0,t)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1,t)+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,1,t)=0.$$

证明幂级数

$$u=u_0(x,y,t)+\varepsilon^2 u_1(x,y,t)+\cdots$$

满足方程和边界条件直到 $O(\varepsilon^2)$ 项, 如果

$$u_0=u_0(x,t),$$

其中 u_0 满足 **双曲型方程**

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=0.$$

这个例子是潮汐的一个简单模型, 证明椭圆型方程的解有时可以用双曲型方程的解一致近似.

第4章　双曲型方程

4.1　引　　言

从 Cauchy 问题的观点来分类, 双曲型方程是最简单的二阶标量方程. 它们在实际应用中经常出现, 这从第 2 章的模型可以看出, 例如流体动力学. 在第 3 章中我们已经提到一大类的二维稳态超音速气流可以通过双曲型方程 (3.11), 即 $(1-U^2/a_0^2)\partial^2\phi/\partial x^2+\partial^2\phi/\partial y^2=0$ 来建立模型. 然而, 对浅水模型 (2.1) 和 (2.2) 或者非稳态气体动力学模型 (2.3) 和 (2.4) 这样的发展模型, 交叉微分项是不可能出现的, 除非在通常 *音速极限* 内, 在此范围内流体几乎处于静态或均匀运动中. 这样, 我们可以实行如 p. 59 的线性化过程. 例如, 当假设 (2.1) 和 (2.2) 中的 u 及 $h-h_0$ 或 (2.3) 和 (2.4) 中的 u, $\rho-\rho_0$ 及 $p-p_0$ 充分小, 使得它们的平方可以忽略时, 可以得到 *一维波动方程*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=a_0^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\tag{4.1}$$

其中 $a_0^2=gh_0$ 或 $a_0^2=\gamma p_0/\rho_0$. 这里 ϕ 是 (2.1) 和 (2.2) 中的 u, $h-h_0$ 或 (2.3) 和 (2.4) 中的 u, $\rho-\rho_0$, $p-p_0$ 中的任意一个变量, 其余变量经过简单的线性变换化成与 ϕ 有关. 同样地, 回热器及液化床模型 (2.17)~(2.20) 可以化成含有交叉微分项的常系数方程的形式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}+d\right)u=eu,\tag{4.2}$$

显然这是双曲的且为 3.4.3 节中提到的电报方程的形式, 可以通过令 $u=e^{\alpha x+\beta t}v$ 并选取适当的 α 和 β 得到.

这种二阶标量线性方程的多维空间形式与实际问题更相关. 事实上, 大量的线性音速问题在二维或三维空间中遵循[36]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^2\nabla^2 u,\tag{4.3}$$

---

36 这里及以后我们用应用数学的记号

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

其中 x, y, z 表示空间坐标.

我们将在 4.6 节讨论这种双曲型方程是如何依赖于维数的. 而更有趣的是 (4.3) 的向量形式, 按照第 2 章的方法分类. 不过, 对 3.4 节的讨论加以推广, 就足以研究如 Maxwell 方程和 4.7 节中线性弹性方程之类的方程组.

这一章的首要任务是如何很好地利用两个自变量的二阶标量线性方程理论. 由于我们知道这种方程的 Cauchy 问题是适定的, 我们可以立即得到解的表达式, 而这种表达式是有意义的且连续依赖于数据的. 这是本书首次给出解的表达式的通用方法, 但不是最后一次, 所以, 4.2 节对可能的方法作细致的阐述. 而且, 我们还介绍一种解析方法, 即特征函数展开法, 在 4.4 节中我们还要复习它, 因为在本章和以后的章节中这个方法非常重要. 本章其余大部分主要致力于求线性方程的显式解, 我们把一些关于非线性双曲问题解的表达式留在 4.8 节.

4.2 线性方程: Cauchy 问题的解

首先考虑经过变换后转化为特征变量 (x, y) 的线性方程, 所以我们只需求解

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + p\frac{\partial u}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y} + ru = f, \tag{4.4}$$

其中 p, q, r 和 f 是 x 和 y 的函数, 但与 u 及其导数无关. 给定 u 和 $\partial u/\partial n$ (或等价的 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$, 至多差一个常数) 在某个开曲线 Γ 上的值, 该曲线与特征线 x 轴和 y 轴不平行. 为确定起见, 我们只寻求该曲线一侧的解, 比如, y 增加的一侧, 如图 4.1 所示.

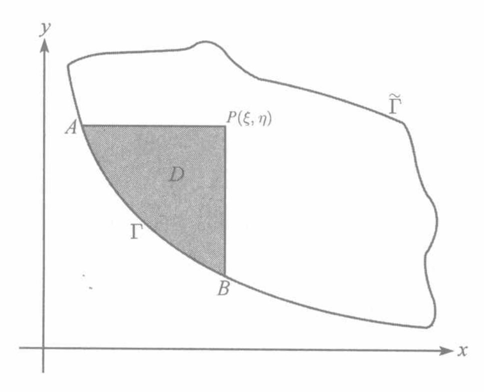


图 4.1 $u(\xi, \eta)$ 的 Cauchy 问题

对这个一般的 Cauchy 问题解的表达式, 可以用两种不同的方法给出, 我们把它留给读者去决定选择哪条路线; 在 4.2.2 节末可以看到它们是一致的.

4.2.1 Riemann 函数的特定求法

根据 3.3 节和 3.4.1 节, 我们自然要问 d'Alembert 公式 (3.31) 是否可以推广到 (4.4). 导出 (3.31) 式的关键步骤是先关于 x 然后关于 y 直接积分, 这是在如图 4.1 区域 D 上求二重积分的多种方法之一. 根据这种观察及 p. 39 对转置 (伴随) 矩阵的讨论, 定义算子 $\mathcal{L}^*$, 称为 $\mathcal{L}$ 的 *共轭算子*, 使得 $u\mathcal{L}v - v\mathcal{L}^*u$ 是散度形式的, 即具有 $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ 的形式, 无论 u 和 v 是什么函数. 这样能够使 D 上的二重积分用边界 ∂D 的线积分代替. (4.4) 式表明唯一可能的是定义

$$\mathcal{L}^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(pv) - \frac{\partial}{\partial y}(qv) + rv, \tag{4.5}$$

从而可以利用 Green 公式得到

$$\iint_D (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} \left(puv + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - quv\right)\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

现在我们希望选择 v, 使得由此公式可以确定解在 P 点处的值 $u(\xi,\eta)$. 我们看到如果 v 满足

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^*v = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中}, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} = qv \quad \text{在 } AP\ (y=\eta) \text{ 上}, \\ &\frac{\partial v}{\partial y} = pv \quad \text{在 } BP\ (x=\xi) \text{ 上}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

就能去掉所有未知项, 因为沿着 AP 和 BP 的积分可以显式地计算出来, 必要时分部积分即可. 这样就有

$$[uv]_B^P = \iint_D vf\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_A^B \left(puv + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - quv\right)\mathrm{d}x. \tag{4.8}$$

同样可以得到 $[uv]_A^P$, 两者都只与从 A 到 B 的分部积分有关. 最后, 注意到 v 有一个乘积常数未加定义, 如果 v 存在, 可设其在 P 点处等于 1.

函数 v 称为所研究问题的 Riemann *函数*, 如果我们能够确信它存在, 那么 (4.8) 式就给出了我们所期望的 Cauchy 问题解的表达式. 事实上, 当 (4.5) 可以转化为线性 Volterrra 积分方程时, 它的存在性是没有问题的. 例如, 如果 $p = q = 0$, 当

$$v(x,y) = 1 - \int_\eta^y \int_\xi^x r(x',y')v(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',$$

如同常微分方程 Picard 定理的证明, 容易得到序列 "$v_{n+1} = 1 - \iint rv_n$" 收敛到唯一的 $v(x,y)$.

即使没有 Riemann 函数 v 的显式公式，基本结果 (4.8) 包含了有关双曲型方程的一些有价值的信息，我们将在本节末再来讨论它. 然而，我们首先介绍一个关于 Riemann 函数更复杂但更系统化的方法，对那些急于尽可能快地得到显式表达式的人可以略过. 不过，我们还是敦促那些想了解本章和以下几章之间的关联的人注意一下为好.

4.2.2 Riemann 函数的基本原理

首先回顾 2.2 节遇到的矩阵方程

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4.9}$$

的 Fredholm 二择性定理，其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是列向量，$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 是 $n \times n$ 矩阵. 如果解存在，可以将其简写为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}\boldsymbol{b}$. 然而，我们可以用较为方便的方式来写出它，如果向量 $\boldsymbol{y}_k$ 满足[37]

$$\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}, \quad \text{即 } \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{e}_k, \tag{4.10}$$

其中 $\boldsymbol{e}_k$ 是第 k 个标准基向量，那么 $\boldsymbol{x}$ 的第 k 个分量 $\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 可以写为

$$(\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{A}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}.$$

于是将 (4.9) 式与 $\boldsymbol{y}_k$ 作内积，(4.10) 式与 $\boldsymbol{x}$ 作内积，两者相减，从而得到 $\boldsymbol{x}$ 的第 k 个分量，这里所需要的是恒等式

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x}.$$

这为定义各种线性微分算子的逆算子提供了可重复使用的统一模式. 例如，假设我们考虑二阶线性常微分方程的初值问题，形如

$$\mathcal{L}u = f(x), \quad \mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + q(x) \quad \text{对 } x > 0, \tag{4.11}$$

不失一般性，$u(0) = \mathrm{d}u/\mathrm{d}x(0) = 0$. 利用上述讨论，将 $\mathcal{L}$ 视为 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$，u 替换 $\boldsymbol{x}$，f 替换 $\boldsymbol{b}$. 我们试着去定义 $\mathcal{L}^*$，δ，R 和内积 $(\cdot,\cdot)$，从而可以作下面的类比：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad &\leftrightarrow \quad \mathcal{L}u(x) = f(x), \quad u(0) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(0) = 0;\\
\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{e}_k \quad &\leftrightarrow \quad \mathcal{L}^*R(x,\xi) = \delta(x-\xi);\\
\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k \quad &\leftrightarrow \quad (R(x,\xi),\mathcal{L}u(x)) = (u(x),\mathcal{L}^*R(x,\xi));\\
\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad &\leftrightarrow \quad (R(x,\xi),f(x)) = (\delta(x-\xi),u(x)).
\end{aligned}$$

37 当然，$\boldsymbol{y}_k^{\mathrm{T}}$ 就是 $\boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1}$ 的第 k 行.

上式左边最后一行给出了 $\boldsymbol{x}$ 的各个元素而右边的最后一行给出了 $u(\xi)$ 在所有可能 ξ 点的值. 如果我们按照如下步骤进行, 这些类比是行得通的.

1. 定义 $(u(x), v(x)) = \int_0^X u(x)v(x)\mathrm{d}x$, 对某些适当的 $X > \xi$. 这样做的缘由如下: 如果将积分区域划分成 N 个宽度为 h 的小区间, 用每个小区间上的函数近似 $u(x)$ 和 $v(x)$, 这些函数可由向量值 $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_N)$ 和 $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_N)$ 来表示. uv 的积分可用 $\sum u_i v_i h = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}h$ 来近似, 它在适当的条件下变成 $\int uv\mathrm{d}x$, 当 $N \to \infty$ 时.

2. 定义

$$\mathcal{L}^* R = \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pR) + qR,$$

使得 $u\mathcal{L}^*R - R\mathcal{L}u$ 成为精确的微分形式, 此外, 指定 $R(X) = \mathrm{d}R/\mathrm{d}x(X) = 0$.

3. 定义 $\delta(x-\xi)$ 为所谓的 δ 函数, 即性质好的函数序列的极限, 这些函数除了 $x-\xi$ 的较小值外, 均趋于零, 而在包含 $x=\xi$ 的任意区间上的积分是 1. 例如, 定义为

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon^2}. \tag{4.12}$$

对这个近似序列的积分取极限, 只要 $X > \xi$, 可得类推的最后一行的重要结果 $(\delta(x-\xi), u(x)) = u(\xi)$. 特别地, 对像 (4.12) 这样的近似序列取极限可以证实.

上述最后一点就是定义 *分布* 或 *广义函数* [37], [42] 的主要意图之一. 在这种方法中, 通过将 δ 函数和它相关的表达式定义为线性泛函, 这些泛函把适当光滑的 *试验函数* 映射到实数, 那么所有的 ε 就会消失[38]. 我们将这个映射定义为内积 $(\cdot,\cdot)$; 于是由于 δ 函数和任意性质好的试验函数 $\psi(x)$ 的内积为 $\psi(0)$, 我们可以定义 δ 为

$$\delta(x) : \psi \mapsto \psi(0).$$

按照这种方式, 任意性质好的函数 $f(x)$ 可定义为

$$f(x) : \psi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

对所有的试验函数 ψ, 当然假定试验函数使得积分存在. 由分部积分公式可以进一步定义分布的微积分, 如

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\psi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi'(x)\mathrm{d}x,$$

假设当 $x = \pm\infty$ 时; ψ 充分快地趋于零. 于是定义 $\delta'(x)$ 为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\psi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi'(x)\mathrm{d}x,$$

38 基本原理与出现激波的情况下双曲型方程的弱解理论紧密相关, 相关讨论见 1.7 节.

从而

$$\delta'(x): \psi \mapsto -\psi'(0);$$

直观地, 显然有

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(\xi)\mathrm{d}\xi = H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \tag{4.13}$$

其中 $H(x)$ 称为 Heaviside 函数, 其结果

$$H'(x) = \delta(x)$$

符合这个规则. 可以证明 δ 函数像所有分布一样, 满足通常的微积分法则, 特别是对分布和光滑函数乘积的分部积分法则. 进一步, 定义两个自变量的分布也是件简单的事情. 例如, 可以将 $\delta(x)\delta(y)$ 定义为[39]

$$\delta(x)\delta(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/\varepsilon^2}$$

或将试验函数 $\psi(x,y)$ 映射到 $\psi(0,0)$ 的泛函.

最后, 将分布的微积分与上述类比结合起来, 得到如下形式的 (4.11) 的解

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \int_0^X u\mathcal{L}^* R\mathrm{d}x = \int_0^X u(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^X R\mathcal{L}u\mathrm{d}x = \int_0^X R(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

这里的核心是利用 Green 公式 (此处为分部积分) 将 $u\mathcal{L}^*R$ 和 $R\mathcal{L}u$ 的积分联系起来, 尽管 R 有奇性且 $\mathcal{L}R$ 甚至可能不是通常意义下的函数. 进一步, 注意到在 $\xi < x < X$ 中 R 满足线性齐次方程 $\mathcal{L}^*R = 0$, 且在 $x = X$ 处, $R = \mathrm{d}R/\mathrm{d}x = 0$, 可见, $R \equiv 0$, 对 $x > \xi$. 于是有

$$u(\xi) = \int_0^{\xi} R(x,\xi)f(x)\mathrm{d}x.$$

作为术语, 满足 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ 的算子 $\mathcal{L}$ 称为 **自共轭** 的, 而 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ 且 R 满足和 u 一样的边界条件的问题称为 **自共轭问题**. 双曲型方程的 Cauchy 问题不属于这一类, 即使 $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, 但椭圆型方程问题属于, 我们将在第 5 章看到. 同样, 自共轭实矩阵, 即对称矩阵, 有实特征值和正交的特征向量, 那么自共轭实微分算子也有实特征值和正交的特征函数.

39 证明 $\delta(x)\delta(y)$ 与保持区域的局部坐标变换无关是有趣而且重要的 (见习题 4.1).

过程 (4.5)~(4.8) 现在有显然的推广. 只要定义

$$\mathcal{L}^*R(x,y;\xi,\eta)=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta).$$

p. 89 的类比方式的好处就是, 如果 R 上的边界条件取为 Cauchy 数据, 在区域 D 外的任何曲线 (如图 4.1 的 $\widetilde{\Gamma}$) 上

$$R=\frac{\partial R}{\partial n}=0,$$

我们立即得到 (4.8), 其中 $v=R$, $\mathcal{L}^*$ 如 (4.5) 定义, 内积

$$(u(x,y),v(x,y))=\iint_D uv\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们还注意到在图 4.1 中 $\widetilde{\Gamma}$ 和 D 之间的非阴影区域中 $R\equiv 0$, 因为 R 在 $\widetilde{\Gamma}$ 上满足齐次 Cauchy 数据.

然而, 上述结论对 Riemann 函数的性质提出了更微妙的问题. 由于 R 描述了双曲型方程在 $x=\xi$, $y=\eta$ 点的 "脉冲" 的响应, 关于特征线的一般结论导致我们期望 R 除了在 $x<\xi$, $y<\eta$ 外都是零, 且在 $x=\xi$, $y<\eta$ 和 $y=\eta$, $x<\xi$ (即图 4.1 中的 BP 和 AP) 上具有某类间断. 但是我们怎么看待这些间断? 这是一个难以回答的问题, 其答案要求我们首先考察在 $x=\xi$, $y=\eta$ 附近的 R. 在此, 我们期望 $\mathcal{L}^*R$ 中最大的项是最高阶导数 $\partial^2R/\partial x\partial y$, 直接积分并利用 (4.13) 有

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta),$$

这意味着

$$R=H(\xi-x)H(\eta-y),$$

即在 $x=\xi$, $y=\eta$ 附近, R 在 $x<\xi$, $y<\eta$ 象限内为 1, 在其外为零. 注意, 这证实了当从区域 D 内趋于 P 时, R 趋于 1, 这与 (4.8) 后的结果一致.

由于 P 点附近 R 在越过 $x=\xi$ 和 $y=\eta$ 时有跳跃, 由 1.6 节所述, 我们期望这些跳跃会持续下去, 尽管它们在强度上可能会变化, 取决于 $\mathcal{L}$ 的形式. 要寻求这些变化, 比如说, 经过 $x=\xi$, 注意到当沿着 BP 对 $\mathcal{L}^*R=0$ 关于 x 积分时, 我们得到

$$\left[\frac{\partial R}{\partial y}\right]_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}-[pR]_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}=0.$$

而在 $x=\xi+0$ 上, $R\equiv 0$, 所以, 当我们从 D 内趋于 $x=\xi$ 时,

$$\frac{\partial R}{\partial y}-pR=0,$$

与 (4.7) 一致. 在 AP 上有同样的结论.

因此, 我们得到 Riemann 函数的构造性方法和 4.2.1 节的方法是完全一致的. 而 4.2.1 节的方法似乎更容易, 但我们将会发现这一节所做的工作在以下的几章中, 尤其是在第 9 章末将体现出它的好处来.

4.2.3 Riemann 函数表达式的含义

从现在起我们用记号 R 表示 Riemann 函数, 于是 (4.8) 式变成

$$u(P)-u(B)=\iint_D Rf\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_A^B\left(puR+R\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}y+\left(u\frac{\partial R}{\partial x}-quR\right)\mathrm{d}x. \quad (4.14)$$

记住, 我们可以类似地写出 $u(P)-u(A)$ 的公式并利用 (4.14) 得到 d'Alembert 公式 (3.31). 对一般的双曲型方程 (4.4) 我们无法写出 R 的显式表达式, 尽管下面给出的例子有可能有显式表达式. 不过, 由于这种函数 R 不依赖于边界数据, 而只依赖于微分算子, 它的存在性给出了 (4.4) 解的非常有价值的定性信息, 我们总结如下.

1. 解只依赖于 A 和 B 之间的 Cauchy 数据和 D 中的 f 值, 其中 A 和 B 为通过点 P 的特征线与边界曲线的交点, D 为通过 P 的两条特征线和边界曲线之间的区域. 这个区域称为 P 的 *依赖区域*, 如图 4.1 的阴影部分.

2. 边界曲线上 C 点的 Cauchy 数据只影响图 4.2 中阴影部分的解, 称为 C 的 *影响区域*.

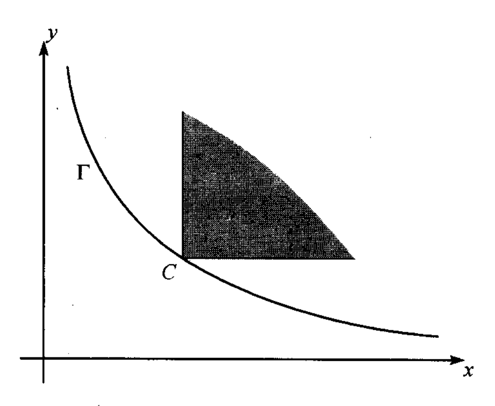


图 4.2 C 的影响区域

性质 1 和性质 2 从 (4.14) 是显而易见的, 它们是第 2 章双曲型方程组相应定义的特殊情况.

3. 在 AB 上的 Cauchy 数据定义了图 4.1 中 $\triangle APB$ 中的唯一解, 对应于 2.4 节讨论的一阶方程组的定义域. 这一点也容易从 (4.14), 假定 Riemann 函数存在, 通过考虑两个可能解的差满足同样的方程和边界条件得出.

4. 解 u 在 P 点连续依赖于 f, p, q, r 和边界数据, 即在边界曲线 Γ 上 $\partial u/\partial x$ 或 $\partial u/\partial y$ 有微小变化, 或 Γ 的形状有微小变化, 导致 u 在 P 点的值有微小变化. 这条性质在第 2 章中我们就已经期望了, 现在从 (4.14) 通过利用适当的不等式可以得到, 假定 f, p, q 和 r 是光滑函数, 且证明了 Cauchy 问题是适定的.

5. u 的边界数据的二阶导数的跳跃间断沿着经过间断点的特征线传播. 然而, u 的一阶导数或 u 本身在边界上的跳跃间断如何沿着经过间断点的特征线传播还不是很明显, 没有弱解形式的引入, 就无法讨论. 下一节对波动方程进行讨论.

对 Riemann 函数有用的显式形式几乎对波动方程和电报方程都是一样的.

例 4.1(*波动方程*)　波动方程 (4.1) 的标准型为

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f.$$

则共轭方程为

$$\mathcal{L}^* R = \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} = 0,$$

所以 $\mathcal{L}$ 是自共轭的. 而且在 $y=\eta, x=\xi$ 上 $R=1$, 从而 $R\equiv 1$ (这意味着在整个平面上 $R=H(\xi-x)H(\eta-y)$, 其中 $H(\cdot)$ 是 Heaviside 函数); 把 (4.14) 和 d'Alembert 公式 (3.31) 作一下比较, 就能很清楚地看到这一点.

例 4.2(*电报方程*)　电报方程的标准型为

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = f.$$

如 4.1 节提到的, (4.2) 式的一阶导数可以通过 u 乘以关于 x 和 t 的指数函数消去. 这个算子也是自共轭的, 且 $\partial^2 R/\partial x\partial y + R = 0$, 其中

$$R = 1 \quad \text{在 } x=\xi, y\leqslant\eta \text{ 和 } y=\eta, x\leqslant\xi \text{ 上}.$$

我们可以把原点变换成 (ξ,η), 并注意到 "对称性", 即如果 $R=F(x-\xi, y-\eta)$ 是一个 Riemann 函数, 那么 $F(\lambda(x-\xi), \lambda^{-1}(y-\eta))$ 也是 Riemann 函数, 其中 λ 为任意常数. 于是, R 仅是*相似变量*[40] $(x-\xi)(y-\eta)=s$ 的函数, 比如记成 $F(2\sqrt{s})$, 处理会比较方便. 于是 F 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} + F = 0 \quad \text{对 } s>0,$$

且 $F(0)=1$. 因此, $F(s)=J_0(s)$ (第一类零阶 Bessel 函数), Riemann 函数为

$$R = J_0\left(2\sqrt{(\xi-x)(\eta-y)}\right). \tag{4.15}$$

另外, 还需要乘上 $H(\xi-x)H(\eta-y)$ 使之在整个平面上有定义. 4.5 节给出 (4.15) 式更直接但更繁琐的推导.

40 我们将在第 6 章详细介绍这种情况.

4.3 无 Cauchy 数据的波动方程

实际中我们希望给标量双曲型方程所加的数据可能不同于指定的 Cauchy 数据, 比如说, 在初始时刻. 特别地, 可能既要有边界条件也要加初始条件, 而且数据中可能有奇性, 这会使 Riemann 函数表达式 (4.14) 的推导失效. 我们已经遇到一个非 Cauchy 问题, 即在 3.5 节中的 Goursat 问题. 另一个经常出现的情形是波动方程 (4.1) 的 "初 – 边值问题", 比如说, 我们在建立有限长的弦的波动模型.

我们回顾前面章节所述, 给定函数 u 和它在初始曲线 Γ 上的法向导数, Γ 处处不与特征线相切, 那么对线性双曲问题有唯一解. 进一步, 对一阶标量情形, 边界曲线 Γ 和特征线之间的任何相切意味着问题容易是病态的. 因此, 一个明显的问题是对二阶双曲型方程在与特征线切于一点的边界上应加什么样的数据. (4.1) 的初 – 边值问题, 形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

在 $t=0$, $x>0$ 上给定 Cauchy 数据, 并在 $x=0$, $t>0$ 上给定边界数据 (见图 4.3), 这是极端的情形; 如果这个边界曲线的拐角处光滑, 就会与特征线 $x+a_0t=$ 常数有一个切点.

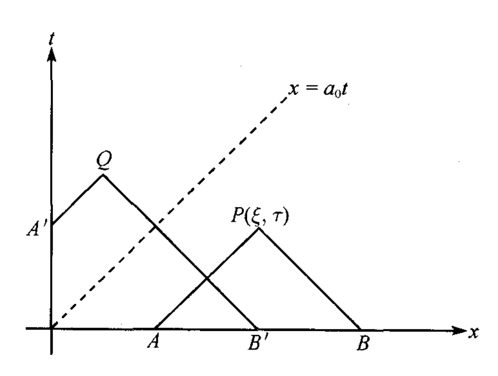


图 4.3 波动方程的初 – 边值问题

这个例子处理起来尤其方便, 因为波动方程有这样有用的性质: Riemann 不变量 $\partial u/\partial t \pm a_0 \partial u/\partial x$ 在特征线 $x \pm a_0 t =$ 常数上分别为常数. 于是, 在 $t=0$ 的数据使我们能立即找到点 $P=(\xi,\tau)$ 处的解, 其中 $\xi > a_0\tau$ (见图 4.3). 进一步, 如果要求解 u 和它的一阶导数经过特征线 $x=a_0t$ 是连续的, 那么在每个 "负" 特征线 (其上 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-a_0$) 进入 $0<x<a_0t$ 时, Riemann 不变量 $a_0\partial u/\partial x + \partial u/\partial t$ 由 u 在 $x>a_0t$ 的值给定. 由于每个这样的特征线都与边界 $x=0$, $t>0$ 相交, 一般不可能同时指定 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial t$ 在此处的值. 事实上, 它们之间只有一个关系可以给

出, 通常可接受的线性边界条件有标量形式

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma u=\delta, \tag{4.16}$$

其中系数是 t 的函数满足 $\alpha-a_0\beta$ 和 γ 对任意的 t 不同时为零. 当且仅当最后的条件满足时, 我们可以确定 $\partial u/\partial x$ 及 $\partial u/\partial t$ 在 $x=0, t>0$ 上的值, 因此从 Riemann 不变量沿着 QA' 和 QB' 的值可得到解 u 在图 4.3 中 Q 点的值. 当然, 由此构造的解在跨过特征线 $x=a_0t$ 时二阶导数通常会有间断. 避免这种间断的一种方法是“放宽”在 $x=0$ 上 Cauchy 数据的条件. 事实上, 若仅指定 u 或 $\partial u/\partial n$ 在 $x=0$ 上, 对所有的 t 及在 $t=0$ 上, 对所有的 x 的值, 我们就能找到和数据一样光滑的解, 3.5 节中的 Gaursat 问题就是这样的例子.

上述讨论说明这样一个事实, 如果边界曲线与特征线相交, 那么只能在切点的一侧给定 Cauchy 数据. 然而, 这个问题多少关于 x 和 t 对称, 因此看来在哪一侧给出 Cauchy 数据并不重要; 在我们的例子中, 这个数据可能都是在 $x=0, t>0$ 上给出的, 而在 $t=0, x>0$ 上只有一个条件. 然而, 在这种情况下, 斜率为 $-a_0$ 的特征线将信息 $\partial u/\partial t+a_0\partial u/\partial x=$ 常数沿时间 *反向* 传播, 这样的模型可以称作是违反因果律的. 因此, 如果我们把相应时间增加方向的特征线联系起来, 就会导向适定的初 – 边值问题的特征线上去. 对这样的问题, Cauchy 数据是在斜率 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的模总是大于 a_0 的曲线上给定的, 而像 (4.16) 的单一条件是在斜率的模总是小于 a_0 的曲线上给定的.

尽管对一个空间变量还没有引入因果律的数学理由, 但 *类时方向* 的概念有时可以根据物理背景将其他的二阶双曲型方程引入进来. 上述讨论说明我们需要类时变量 t 和 *类空变量* x 及沿着每个变量方向 (其时间增加的方向可以确定) 的两族特征线[41]. 那么, 因果律使我们能够定义 *类空边界*, 使得在正的时间方向上所有点处的两族特征线指向同一侧, 如图 4.4(a) 或图 4.3 中的 $t=0, x>0$. 同样地, *类时边界* 将正的时间方向的特征线分离开来, 如图 4.4(b), 或图 4.3 中的 $x=0, t>0$. 我们需要 Cauchy 数据, 包括类空边界上两个边界条件, 但在类时边界上只允许一个条件, 如 (4.16), 这个条件不能与 Cauchy 数据沿特征线之一传播的信息矛盾.

*4.3.1　强间断的边界数据

当双曲型方程的边界数据不光滑时, 我们可能需要推广由什么构成解的概念. 在 2.5 节中, 我们引入了一阶拟线性双曲型方程组弱解的概念, 现在我们把这些想法用于更简单的波动方程的情形

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

41 严格地讲, 由相关矩阵特征值定义的方向锥内的方向是“类时”的, 而在此锥外的曲面是“类空”的 (见 2.6 节).

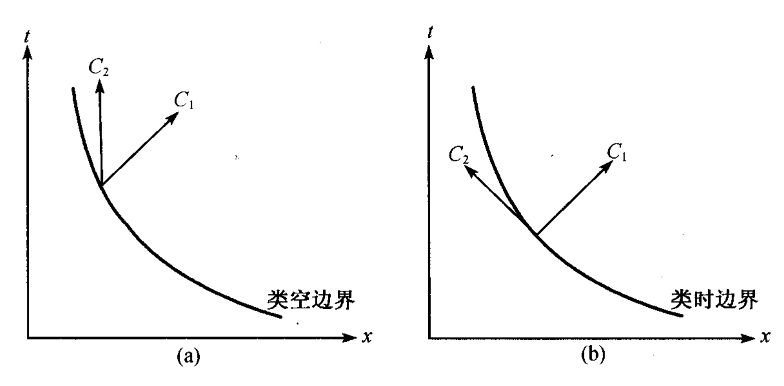


图 4.4 类空和类时边界

如果 u 的一阶导数只在 $t=0$ 的一点间断, 比如说, $x=0$, 那么 Riemann 函数表达式定义了一个除 $x=\pm a_0 t$ 外有连续导数的解. 按照 1.7 节所讨论的一阶标量方程弱解的思想, 弱解就是满足恒等式

$$\iint_{t>0} u\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-a_0^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}\mathrm{d}x \tag{4.17}$$

的函数 u, 其中 ψ 是二次可微的试验函数, 当 $x\to\pm\infty$ 及 $t\to\infty$ 时适当快地趋于零. 如果 u 是二次可微的, 对 (4.17) 分部积分, 容易证明它在 $t>0$ 时处处满足波动方程. 然而, 我们要强调 (4.17) 是数学上的结论, 而不像诸如 (1.24) 的守恒律那样有物理基础.

另一方面, 如果 u 是连续的, 但 ∇u 经过 "激波" 曲线 C 是间断的, 那么经过 C 有 $[\partial u/\partial x]\mathrm{d}x+[\partial u/\partial t]\mathrm{d}t=0$[42], 且利用在得到 Rankine-Hugoniot 条件 (1.27) 时的同样阐述, 得到

$$\int_C \psi\left(a_0^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]\mathrm{d}t+\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\right)=0$$

对任何试验函数 ψ 成立, 从而

$$a_0^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]\mathrm{d}t+\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\mathrm{d}x=0. \tag{4.18}$$

于是, 正如我们所预期的, C 是通过 $x=t=0$ 的一条特征线, 其斜率为 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\pm a_0$; 经过 C, 有 $a_0[\partial u/\partial x]\pm[\partial u/\partial t]=0$, 且我们得到了在 $-a_0 t<x<a_0 t$ 中定义唯一解的必要的跳跃条件. 对波动方程来说, 这些跳跃性条件意味着 Riemann 不变量在与间断线 C 相交的特征线族上是连续的, 这正是图 4.3 中所发生的情形. 由于适当的 Riemann 不变量是连续的, d'Alembert 解仍然能够给出 (4.1) 的弱解.

42 这里符号 $[\cdot]$ 的含义与第 1 章相同, 表示从激波的一侧到另一侧的跳跃.

如果 u 本身在边界上不连续, 我们仍然可以利用 (4.18) 来定义弱解, 但回到一阶保守方程组来处理更容易更安全些, (4.1) 就是从上述方程组导出的, 并利用了第 2 章的思想. 最终这表明 2×2 的线性双曲型方程组的因变量的跳跃仅能沿着特征线传播.

4.4　变换和特征函数展开

任何不熟悉偏微分方程的人都应当注意那些能用于得到显式解的特殊方法的对称性质. 事实上, 我们已经看到波动方程 (4.1) 很简单, 其通解可以写成两个任意函数的形式. 然而, 选择这些函数使之满足初始条件和 (或) 边界条件可能是困难的.

幸好, 有一个避开这个困难的强有力的方法, 它依赖于线性方程的叠加原理. 由基本解合成解的基本思想是通过 "Fourier 表达式", 或 "变量分离", 或 "变换法", 这个想法很简单. 如果任意线性偏微分方程, 不一定是双曲的, 都有 "谱" 解 u_λ, 它依赖于 x 和 y, 对任意离散的或连续的参数 λ 可以分离为

$$u_\lambda = X(x,\lambda)Y(y,\lambda), \tag{4.19}$$

那么对 λ 求和或积分, 可能使任意的初始和 (或) 边界条件得到满足. 例如, 如果方程是常系数的, 这总是可能的, 因为 X 和 Y 分别是 x 和 y 的指数函数.

求和的工具可能是复杂的, 但可用下面两个结果作为例子. 它们都与经常出现的情形有关, 其中 $X(x)$ 满足

$$\mathcal{L}X = \frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = \lambda X, \tag{4.20}$$

从而 λ 是 $\mathcal{L}$ 的特征值. 本质上, 有两种基本的可能性.

离散谱

当我们求解 (4.20) 在区间 $(-L,L)$ 上具周期边界数据时, 特征值为 $\lambda=-n^2\pi^2/L^2$. 那么, 多个特征函数 X 的和导出了定义在 $(-L,L)$ 并作周期延拓的适当的实函数的 Fourier 级数的基本结果. 任何这样的函数可以写成 (4.20) 具周期边界条件的特征函数的和, 形如

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi x/L},\quad 其中\ c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi x/L}\mathrm{d}x. \tag{4.21}$$

连续谱

当要求 (4.20) 对所有的 x 成立, 且当 $|x|\to\infty$, X 有界时, (4.20) 的特征值为 $\lambda=-k^2$ (k 是实数), 所以谱是连续的, 从而得到 Fourier 变换的基本结果. 这个结

果是从 (4.21) 式记 $n\pi/L = k$, 把和视为 Riemann 积分, 通过取极限 $L \to \infty$ 导出的; 在极限中, 将 $2Lc_n$ 替换为

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{4.22}$$

(称为 f 的 Fourier 变换), 而逆

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi s/L}\mathrm{d}s \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi x/L}$$

成为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{4.23}$$

称为 Fourier *逆变换公式*. 这些结果概括为

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{4.24}$$

只用于性质足够好, 使得积分收敛的函数.

更一般的情况出现在离散谱和连续谱混合的情形; 这些结论背后深刻而细致的理论参见 [44].

这些结果促使我们将变换方法/特征函数展开法的关键因素概括如下; 以下 6 页包括我们需要知道的关于 Fourier 变换和分布的所有内容的浓缩形式, 而我们在第 5 章将给出特征函数展开的更多内容.

• *更一般的算子*. 对具有离散谱 λ_n 和实特征函数 $\phi_n(x)$ 的自共轭常微分算子 $\mathcal{L}$, 我们期望任何实函数 $f(x)$ 有展开式

$$f(x) = \sum c_n\phi_n(x), \quad \text{其中 } c_n = \int f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x, \tag{4.25}$$

只要 ϕ_n 形成一个完备正交集; 和本节中其他关于 x 的积分一样, 区域上的积分是求解方程所要求的. 当特征值问题是在有限区间上且 $\mathcal{L}$ 中的系数没有奇性时, 可以证明有上述展开式; 这就是 Sturm-Liouville *理论*. 进一步, 当区间是无穷的或半无穷的, 或者当 $\mathcal{L}$ 的系数有奇性, 且特征值 λ_k 的下标 k 是连续参数, 相应的正交特征函数是 $\phi(x,k)$, 我们需要考虑连续变换

$$\widehat{f}(k) = \int f(x)\phi(x,k)\mathrm{d}x, \quad f(x) = \int \widehat{f}(k)\phi(x,k)\mathrm{d}k, \tag{4.26}$$

其中 k 的积分范围不总是显然的 (注意, 当我们将指数标准化, 即在 (4.22) 中乘上 $1/\sqrt{2\pi}$, 而逆变换 (4.24) 的因子 $1/2\pi$ 替换为 $1/\sqrt{2\pi}$ 时, (4.21) 和 (4.24) 几乎就

是 (4.25) 和 (4.26) 的特殊情况, 唯一的差别是指数上的辐角的符号. 我们后面再来求解它). 当我们利用 (4.25) 和 (4.26) 来描述任意特定的偏微分方程时, 我们不能过分强调 x 的导数对构成自共轭算子 $\mathcal{L}$ 是多么重要. 只有当方程 $\mathcal{L}f = \lambda_k f$ 乘上 $\phi(x,k)$ 并对 x 积分, 才有内积关系

$$(\phi, \mathcal{L}f) = (\mathcal{L}\phi, f) = \lambda_k(\phi, f), \tag{4.27}$$

因此 $\mathcal{L}f$ 的变换可以写成 f 的变换形式. 在上面的 Fourier 变换例子中, $\lambda_k = -k^2$, 每个特征值对应两个值, 正交特征函数为 $\mathrm{e}^{\pm ikx}$.

• *复特征函数*. 算子 $\mathcal{L} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 是最简单的自共轭算子, 在离散的情形, 特征值是 $-n^2\pi^2/L^2$, 在连续的情形, 特征值是 $-k^2$, 它们都是实数. 而对周期边界条件, 它的特征函数是正交的正弦和余弦函数, Fourier 级数 (4.21) 常写成这些实函数形式; 然而, 将它们结合起来转换成复指数形式, 不仅可以节省空间, 而且从概念上会有所帮助. 现在我们可以看到为什么 (4.21) 和 (4.24) 的标准化形式并不完全与 (4.25) 和 (4.26) 一致. 差别在于 (4.25) 和 (4.26) 只是在 $\phi_n(x)$ 和 $\phi(x,k)$ 都是实函数时才可以用; 当它们是复函数时, 内积需要推广为 $(f,g) = \int f\overline{g}\mathrm{d}x$, 其中 $\overline{g}$ 是 g 的复共轭. 而且, 我们需要标准化使得 $\int \phi_n(x)\overline{\phi}_n(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int \phi(x,k)\overline{\phi}(x,k)\mathrm{d}x$ 为 1, 而 (4.25) 和 (4.26) 相应地替换为

$$f(x) = \sum c_n\phi_n(x), \qquad \text{其中 } c_n = \int f(x)\overline{\phi}_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$f(x) = \int \widehat{f}(k)\phi(x,k)\mathrm{d}k, \quad \text{其中 } \widehat{f}(k) = \int f(x)\overline{\phi}(x,k)\mathrm{d}k.$$

• Laplace *变换*. 回顾 4.3 节中的因果律, 能够表示对负的时间 (此处表示为 $x<0$) 值为零的函数是非常有用的. 此时, 为方便起见, 记 $k = \mathrm{i}p$, $\widehat{f}(k) = \widetilde{f}(p)$ 就形式上得到 Laplace *变换* 和它的逆变换

$$\widetilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int \widetilde{f}(p)\mathrm{e}^{px}\mathrm{d}p. \tag{4.28}$$

我们故意留下 p 的积分范围不定义, 因为和 Fourier 变换及其逆变换一样涉及收敛性问题. 事实上, 前者甚至对 $f(x) = 1$ 都行不通. 这是 Fourier 分析最困难和最令人困惑的一面, 这可以通过下面两种方法来处理.

• *复* Fourier *变换*. 第一种方法是利用标准形式 (4.22) 的 Fourier 变换, 参考文献 [8] 详细说明了这个方法. 如 (4.28), 先考虑 $x<0$ 时为零的函数, 然后假设当 $x \to +\infty$ 时, 它们按 $\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\alpha > 0$ 增长 (但不按照 $\mathrm{e}^{\alpha x^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ 增长). 我们不去寻求 $\widehat{f}(k)$, 而是考虑 $f(x)\mathrm{e}^{-\beta x}$, $\beta > \alpha$ 的 Fourier 变换. 如同将 (4.22) 中的 k 复数化

一样引入 β, 在 $\mathrm{Im}k > \alpha$ 中选择围道, 作围道积分 (见习题 4.9). 主要结果是逆变换要在复 k 平面中取一个围道, 使之位于 $\widehat{f}(k)$ 所有奇点的上方. 当把这些结果合并成 Laplace 逆变换公式时, 积分需要从 $\gamma - \mathrm{i}\infty$ 到 $\gamma + \mathrm{i}\infty$, 其中实数 γ 充分大, 使得 $\widetilde{f}(p)$ 的所有奇点都位于复 p 平面的左边.

这个过程可等价地用于当 $x \to -\infty$ 时指数增长, 且 $x > 0$ 时为零的函数. 将习题 4.9 的结论作推广, 可以考虑更一般的函数. 然而, 当 $|x| \to \infty$ 时, 增长比 $\mathrm{e}^{\alpha x}$ 还快的函数在 (4.22) 中的围道积分要作更基本的改变. 当我们面对函数, 比如 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, 定义它的变换为

$$F(\zeta) = \int_\Gamma \mathrm{e}^{\zeta x}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x,$$

其中 Γ 是起点于无穷大且 $5\pi/4 < \arg x < 7\pi/4$ 而终止于无穷大且 $\pi/4 < \arg x < 3\pi/4$ 的任意围道. 我们很快会发现 $F(\zeta) = \mathrm{i}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\zeta^2/4}$ 且逆变换公式为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\widetilde{\Gamma}} \mathrm{i}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\zeta^2/4}\mathrm{e}^{-\zeta x}\mathrm{d}\zeta,$$

其中仍选择 $\widetilde{\Gamma}$ 使得积分存在. 事实上, 表达式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\widetilde{\Gamma}} \mathrm{e}^{-\zeta x}F(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

对求解某些常微分方程是非常有用的方法 (见习题 4.10).

• Fourier *变换和分布*. 第二种方法是允许像 (4.21) 的级数和如 (4.22) 的积分在通常意义下发散, 而将它们解释为广义函数或分布, 如 p. 90 所讨论的. 例如, 周期延拓函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -L < x < 0, \\ 1, & 0 < x < L, \end{cases}$$

有 Fourier 级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}.$$

假设在 $-L < x < L$ 中 $f'(x) = 2\delta(x)$ (δ 函数来源于在 $x = 0$ 处发生跳跃的导数), 这样就有

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{L}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{L} = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta(x - nL).$$

幸好, 这个看起来令人厌恶的表达式易于说明其合理性. 如果数项级数 $\sum(D_n, \psi)$ 对任何试验函数 ψ 在通常意义下收敛, 则称分布的级数 $\sum D_n$ 是收敛的. 因为 $\sum(D'_n, \psi) = -\sum(D_n, \psi')$, 逐项微分是合理的, 且如果 ψ 是试验函数, ψ' 也是, 所

以右端是收敛的. 那么有关 "通常" 的级数收敛的困难也就消失了, 因为假设试验函数是充分光滑的.

这种通过将广义函数转换成试验函数来定义其性质的想法可以进一步用于定义分布的 Fourier 变换. 这里的关键是对函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 作形式观察,

$$\begin{aligned}(\widehat{f},g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right)g(k)\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x \\ &= (f,\widehat{g}),\end{aligned}$$

只要改变积分次序 (这称为 Parseval 等式). 这样我们将分布 D 的 Fourier 变换定义为 $\widehat{D}(k)$, 其中

$$(\widehat{D},\psi) = (D,\widehat{\psi}),$$

相应的逆 $\check{D}(x)$ 的公式为

$$(\check{D},\psi) = (D,\check{\psi}),$$

其中 $\check{\psi}$ 是如 (4.24) 给出的 ψ 的 Fourier 逆变换. 有了上述定义, 我们就有了较完善的理论, 大多数有用的分布就能恰当地定义自己的 Fourier 变换. 这个理论使我们容易证实这样的结果, 如

$$\widehat{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\delta(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \widehat{1} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k),$$

由此得到 $\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ 的逆变换

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\mathrm{d}z\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(z)\delta(x-y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y, \qquad (4.29)\end{aligned}$$

即所谓的*卷积公式*; 最后的积分常记成 $f * g$.

- *多维 Fourier 变换*. 我们可以将 (4.22) 形式地推广到函数 $f(x,y)$, 定义

$$\widehat{f}(k_1,k_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (4.30)$$

从而 (4.23) 式为

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2, \tag{4.31}$$

显然上式可以推广到更多的变量. 能够显式地写出逆变换的情况甚至比一个变量的函数更稀少, 而且收敛问题变得更复杂. 不过, 我们将会看到 (4.30) 或 (4.31) 中积分的简单变量变换, 有时会给我们更有价值的启示. 考虑一个有意思的例子, 当 $\widehat{f}$ 是 k 和 θ 的函数时, 其中 $k_1=k\cos\theta$, $k_2=k\sin\theta$, $\widehat{f}$ 等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\cos\theta+y\sin\theta)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

利用坐标轴旋转, 有

$$x=r\cos\theta-t\sin\theta,\quad y=r\sin\theta+t\cos\theta,$$

从而有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}f(r\cos\theta-t\sin\theta,r\sin\theta+t\cos\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}t.$$

因此, 作为 k 和 θ 的函数, $\widehat{f}$ 等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}f_R(r,\theta)\mathrm{d}r,$$

其中

$$f_R(r,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}f(r\cos\theta-t\sin\theta,r\sin\theta+t\cos\theta)\mathrm{d}t. \tag{4.32}$$

此式称为 $f(x,y)$ 的 Radon 变换, 它是 CAT 扫描层析照相分析的基础. 假设用一细束 X 射线沿 θ 角度照射一个二维物体; 那么传输强度由沿射线的吸收系数 $f(x,y)$ 的积分决定, 这就是对 f 沿此方向的 Radon 变换. 对每个横向坐标的值以同一角度 θ 沿平行光束重复扫描, 然后对所有 $0\leqslant\theta<\pi$ 再作扫描, 我们就找到了 $f_R(r,\theta)$. 为了反求 $f(x,y)$, 我们要做的就是对 $f_R(r,\theta)$ 中的 r 作 Fourier 变换, 变换到笛卡儿坐标系, 再求 $\widehat{f}$ 的逆.

我们必须强调在多元 Fourier 变换时对分布的利用有一个严格的限制. 这就是我们可以很容易地将 $\delta(x)\delta(y)$ 的 Fourier 变换定义为两个一维变换的乘积 (从而等于 1), 但对 $\delta(x)\delta(x)$ 却没有令人满意的定义. 这个注解可用于任何同一 “自变量” 分布的乘积, 除非它们是通常意义下的函数.

• *看成积分方程的积分变换*. 我们可以考虑另一种方法, 从函数的变换来恢复函数. 我们不是利用逆公式, 而是对给定的变换 $\widehat{f}(k)$ 通过求解 $f(x)$ 的积分方程

$$\int f(x)\phi(x,k)\mathrm{d}x=\widehat{f}(k)$$

来求 $f(x)$. 熟悉积分方程理论的读者知道第一类 Fredholm 方程

$$\mathcal{K}[f](t)=\int_a^b K(x,t)f(x)\mathrm{d}x=g(t) \tag{4.33}$$

对给定的 $K(x,t)$ 和 $g(t)$ 通常是不适定的. 一个简单的理由是, 如果 K 是可分的, 使得 $K(x,t)=\sum_1^N \alpha_n(x)\beta_n(t)$, 其中 $N<\infty$, 则除非 $g(t)$ 是 $\beta_n(t)$ 的线性组合, 否则 (4.33) 不可能有解. 而且, 如果存在函数 $f_e(x)$, 使得 $\int_a^b K(x,t)f_e(x)\mathrm{d}x=0$, 那么, 即使 $f(x)$ 存在, 其线性组合也不可能确定出解. 更一般地, 如果 K 是不可分的, 且 $\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$, 则只要 a 和 b 是有限的, 就存在特征值的无穷序列 λ_n 及完备的特征函数序列 $f_n(x)$, 使得

$$\lambda_n\int_a^b K(x,t)f_n(x)\mathrm{d}x=f_n(t),$$

而且, 当 $n\to\infty$ 时, $\lambda_n\to\infty$. 由于这些特征函数是完备的, 每个性质好的函数都可以展开成关于 f_n 的广义 Fourier 级数. 现在假设 $f(x)=\sum a_nf_n(x)$, 那么算子 $\mathcal{K}$ 满足

$$\mathcal{K}[f](t)=\sum\frac{a_n}{\lambda_n}f_n(t),$$

其中级数的系数按模比原来的小得多, 从而表示了比输入 $f(x)$ 要 "小" 的函数 (由于这个原因, 这样的算子称为 紧 的). 于是, 如果我们通过展开 $g(t)=\sum b_nf_n(t)$, 比较系数相等, 对紧算子 $\mathcal{K}$ 求解 (4.33), 可以得到 $a_n=\lambda_nb_n$. 即如果 f 没有 g 光滑, 我们只能希望对可能的右端函数 $g(t)$ 加以限制去找到一个解; 这意味着另一种不适定性.

这些观察可能使我们怀疑 (4.24); 最后, 我们要指出 Fourier 逆变换是不适定的! 然而, 我们可以确信核函数 $\phi(x,k)=\mathrm{e}^{ikx}$ 是不可分的, 相应的算子 $\mathcal{K}$ 没有零空间, 更重要的是, $\mathcal{K}$ 不是紧的 (要说明这一点, 考虑 "小" 函数 $f(x)=\varepsilon\mathrm{e}^{-\varepsilon|x|}$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时一致收敛于零; 它的 Fourier 变换是 $\widehat{f}(k)=2\varepsilon^2/(\varepsilon^2+k^2)$, 但不一致趋于零).

4.5 对波动方程的应用

从实际的观点来看, 前面的讨论显示: 线性偏微分方程 (双曲型或其他方程) 足够 "对称", 可以通过广义 Fourier 方法求得频谱解 (4.19); 求解方法依赖于我们手中的问题; 关于收敛问题可能会遇到技术上的困难. 记住这一点, 我们现在来考虑一些简单的双曲问题.

4.5.1 一维空间的波动方程

考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 对\ t > 0. \tag{4.34}$$

我们已经在 (3.31) 和习题 3.8 中给出了具 $t=0$ 数据的 Cauchy 问题的 d'Alembert 解, 但 (4.34) 的常系数也使之适用 Fourier 分析. 例如, 如果

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0(x) \quad 在\ t = 0, -\infty < x < \infty\ 上,$$

自变量各自的范围表明对变量 x 作 Fourier 变换, 或对 t 作 Laplace 变换 (或同时作变换). 前者的结果为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widehat{u}}{\mathrm{d}t^2} + a_0^2 k^2 \widehat{u} = 0,$$

所以有

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka_0 t} + \widehat{g}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka_0 t} \tag{4.35}$$

对某些 $\widehat{f}$ 和 $\widehat{g}$; 由初始数据得到

$$\widehat{u}(k,t) = \frac{\widehat{v}_0(k)}{a_0 k} \sin a_0 kt, \tag{4.36}$$

由此得

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{v}_0(k)}{2\mathrm{i}k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(a_0 t - x)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(a_0 t + x)} \right) \mathrm{d}k, \tag{4.37}$$

对 v_0 和 $\widehat{v}_0$ 的性态作适当的假设. 我们又可以将之写成

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a_0} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(s + a_0 t - x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(s - a_0 t - x)}}{2\mathrm{i}k} \mathrm{d}k \right) \mathrm{d}s,$$

当 ν 为实数时, 利用围道积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu k}}{k} \mathrm{d}k = \pm \mathrm{i}\pi$$

分别对 $\nu > 0$ 和 $\nu < 0$ (两种情形都将围道变成 $k = 0$), 证明关于 k 的积分为零, 除非 $x_0 - a_0 t < s < x + a_0 t$ 时, 它为 π. 因此, (4.37) 与 d'Alembert 解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(u_0(x - a_0 t) + u_0(x + a_0 t)) + \frac{1}{2a_0} \int_{x - a_0 t}^{x + a_0 t} v_0(s) \mathrm{d}s \tag{4.38}$$

是一致的, 此处利用了 $u(x,0) = u_0$ 和 $\partial u/\partial t(x,0) = v_0$. 于是, 我们通过一种冗长但更强有力的方法有效地修正了 (3.31) 式. 而且 (4.37) 阐明了诸如影响区域、依

赖区域等概念如何在 Fourier 表达式中自然表示; 另一方面, 在影响区域外解可以由围道积分表示, 由于围道内无奇点, 所以此积分为零.

注意到 (4.37) 是 Fourier 变换应用的一个非常典型的结果. 在 Cauchy 问题情形下, 这个方法是根据任意函数 u_0 和 v_0 寻求波动方程通解的有效方法. 当然, 像 (4.37) 的 Fourier 表达式满足波动方程具任意初始和边界条件, 但经常不容易将关于 k 的任意函数引入任意特定问题具初始/边界数据的 Fourier 表达式中.

Laplace 变换法更为繁杂: 我们有

$$a_0^2\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{u}}{\mathrm{d}x^2}-p^2\widetilde{u}=-v_0(x),$$

其适当的解为

$$\widetilde{u}_0(x,p)=\frac{1}{2a_0p}\left(\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{p(\xi-x)/a_0}v_0(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{x}^{\infty}\mathrm{e}^{-p(\xi-x)/a_0}v_0(\xi)\mathrm{d}\xi\right),\quad \mathrm{Re}p>0.$$

注意到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{p(\xi-x)/a_0}\mathrm{e}^{pt}\frac{\mathrm{d}p}{p}=\begin{cases}0, & x-\xi>a_0t,\\ 1, & x-\xi<a_0t,\end{cases}$$

其中 $\mathrm{Re}\gamma>0$, 利用标准的 Laplace 逆变换给出 d'Alembert 解 (4.38) 满足 $u_0=0$.

初/边值问题具

$$u=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=v_0(x),\quad 0<x<1, \tag{4.39}$$

图 4.3 中给出的两个边界条件, 如在 $x=0$ 和 $x=1$ 上, $u=0$, 或者可以通过 x 的 Fourier 级数 (因为 $X(x,\lambda)=\sin(\sqrt{-\lambda}\pi x)$) 或者通过 t 的 Laplace 变换来处理. 将 (4.21) 用于奇函数, 使之满足边界条件[43], 得到

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x\sin n\pi a_0t, \tag{4.40}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{n\pi a_0}\int_0^1 v_0(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,$$

有时这比 (4.38) 更方便描述解, 图 4.5 中包含了所有可能沿 “之” 字形特征线传播的间断. 注意图 4.5 的左下角就是图 4.3.

43 换一种说法, 如同 (4.20) 一样寻找 $\mathcal{L}$ 和 X, 满足 $X(0)=X(1)=0$.

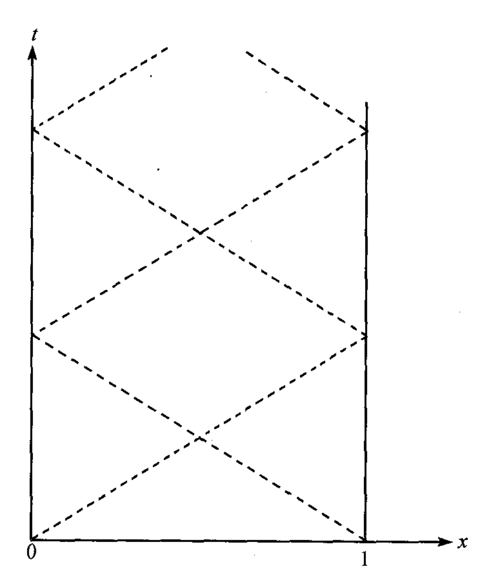


图 4.5 波动方程的两点边值问题

我们还注意到通过叠加 $\delta(x-a_0t)$ 和 $\delta(x+a_0t)$ 两种形式的基本解可以得到 (4.34) 的通解. 不利用 (4.35), 我们就得到

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}(\delta(x-x'-a_0t)f(x')+\delta(x-x'+a_0t)g(x'))\mathrm{d}x' \\ &= f(x-a_0t)+g(x+a_0t), \end{aligned} \tag{4.41}$$

其中 f 和 g 是任意的; 这个公式在习题 4.8 中通过另一个途径给出, 我们后面会回到这个表达式.

4.5.2 圆和球对称性

下一节我们将更细致地处理多维波的传播, 但当二维空间中有圆对称性时, 波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right). \tag{4.42}$$

如果将 2.1 节的浅水模型加以推广并像 4.1 节中关于静止状态作线性化, 我们可以说明这建立了在浅水池塘表面上产生的波模型, 例如, 将石子投进池塘中. 对 Cauchy 问题有

$$u=u_0(r),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=v_0(r)\quad 在\ t=0,\ 0<r<\infty\ 上, \tag{4.43}$$

我们仍然可以用 t 的 Laplace 变换. 然而, 当 u 是时间 Laplace 的频率为 ω, 即

$u = \mathrm{Re}(R(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$ 时, 关于空间变量的有关特征值问题为

$$\mathcal{L}R = \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \lambda R, \tag{4.44}$$

其中 $\lambda = -\omega^2/a_0^2$ 且当 $r = 0$ 及 $r \to \infty$ 时, R 有限, 而且不是自共轭的. 根据 (4.25) 式后面的结论, 我们首先必须通过将 (4.42) 重新写成

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2} = a_0^2\left(r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = a_0^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{4.45}$$

来调整空间特征值问题为自共轭的. 那么, (4.44) 变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = \lambda r R,$$

当 λ 是负实数时, 在 $r = 0$ 处有性质好的解. 记 $\lambda = -k^2$, 则 R 与第一类零阶 Bessel 函数 $J_0(kr)$ 成比例. 由 (4.26), 适当的空间变换是所谓的 Hankel 变换

$$\widehat{u}(k,t) = \int_0^\infty r u(r,t) J_0(kr)\mathrm{d}r.$$

该变换的逆公式容易由函数 $U(x,y,t)$ 关于 x 和 y 的二重 Fourier 变换找到, 即

$$\widehat{U}(k_1,k_2,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x + k_2 y)} U(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{4.46}$$

由 (4.31) 有

$$U(x,y,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1 x + k_2 y)}\widehat{U}(k_1,k_2,t)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2.$$

当 $U(x,y,t) = u(r,t)$ 时, (4.46) 成为

$$\begin{aligned}\widehat{U}(k_1,k_2,t) &= \int_0^\infty r u(r,t)\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r, \quad 其中\ k^2 = k_1^2 + k_2^2,\\ &= 2\pi\widehat{u}(k,t),\end{aligned}$$

因为由直接微分可验证

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}\mathrm{d}\theta = J_0(kr). \tag{4.47}$$

类似地,

$$u(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty k\widehat{u}(k,t)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\phi}\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}k,$$

所以[44]

$$u(r,t)=\int_0^\infty k\widehat{u}(k,t)J_0(kr)\mathrm{d}k.$$

为简单起见, 如果取 $u_0=0$, 可得

$$u(r,t)=\frac{1}{a_0}\int_0^\infty \widehat{v}_0(k)J_0(kr)\sin a_0kt\mathrm{d}k; \tag{4.48}$$

这个公式有重要的影响, 我们后面还要讲到.

在三维空间中, (4.42) 式变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{4.49}$$

且有 "对称性". 记 $u=rv$, 得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a_0^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},$$

我们回到了一维空间. 因此, 对双曲问题, 多自变量有时处理起来比少自变量更容易, 下一节我们作进一步讨论.

*4.5.3 电报方程

利用 4.2.3 节末提到的指数变换, 电报方程总可以写成以下形式

$$a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-cu=0, \tag{4.50}$$

其中在实际问题中 $c>0$, 且在 $t=0$ 时, 对所有的 x 给定 u 及 $\partial u/\partial t$ 的 Cauchy 问题适合利用 Fourier 变换. 当 u 初始为零时, 类似 (4.36) 有

$$\widehat{u}=\frac{\widehat{v}_0(k)}{\sqrt{a_0^2k^2+c}}\sin\left(\sqrt{a_0^2k^2+c}\right)t, \tag{4.51}$$

表面上看来在 $k=\pm\mathrm{i}\sqrt{c}/a_0$ 的分支点是迷惑人的 (可去的). (4.51) 的 Fourier 逆变换和 4.2.3 节中导出的解的 Riemann 函数表达式的详细证明在习题 4.12 中给出, 但我们不是利用导出 (4.15) 的猜测法, 而是给出一个较为快速的方法. 取 $\xi=\eta=0$, 我们直接寻求 Riemann 函数, 满足

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+R=\delta(x)\delta(y),$$

并在 $x\leqslant 0, y\leqslant 0$ 中 R 非零. 那么, R 关于 x 的 Fourier 变换满足

$$\frac{\partial\widehat{R}}{\partial y}+\frac{\mathrm{i}\widehat{R}}{k}=\frac{\mathrm{i}}{k}\delta(y),$$

44 我们将在第 5 章用另一种方法推导这个 "变换对".

所以

$$\widehat{R}=-\frac{\mathrm{i}}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y/k}H(-y),$$

其中 H 是 Heaviside 函数. 因此

$$R(x,y)=-\frac{\mathrm{i}H(-y)}{2\pi}\int_{\mathrm{Im}k\,=\,常数\,<\,0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx-\mathrm{i}y/k}\frac{\mathrm{d}k}{k},$$

如 4.4 节所述选取逆围道. 通过在 $\mathrm{Im}k<0$ 中选取围道, 当 $x>0$ 时上述积分显然为零, 而当 $x<0$ 时, 可以将它写为

$$R(x,y)=-\frac{\mathrm{i}H(-y)}{2\pi}\int_{\mathrm{Im}k'\,=\,常数\,<\,0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{xy}(k'+1/k')}\frac{\mathrm{d}k'}{k'}.$$

现在我们将围道变形为包含原点的单位圆, 使得当 x 和 y 均为负时,

$$R(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sqrt{xy}\cos\theta}\mathrm{d}\theta=J_0(2\sqrt{xy}).$$

现在回忆一下 4.2.2 节末有关 Riemann 函数间断传播的讨论是很有趣的. 对波动方程, 由微分, 在 $x\leqslant 0,\ y\leqslant 0$ 中, $R\equiv 1$, 这意味着 u 恰好是 $x=0$ 及 $y=0$ 上的 δ 函数的和的解法是可能的. 然而, 对电报方程, 这样的 δ 函数只有在特征线 $x=0$ 及 $y=0$ 上存在非零波场时才能传播. 我们将在下节及习题 4.12 中作进一步讨论.

*4.5.4 周期介质中的波

研究

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_0^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tag{4.52}$$

的解对许多实际问题是重要的, 其中 a_0 关于 x 是周期的. 例如, 电磁波在半导体这样的晶体中传播. 当 u 关于时间是频率为 ω 的谐波, 相应的空间特征值问题是

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\omega^2}{a_0^2(x)}X=0,\tag{4.53}$$

其中 ω 是实的, 所以对这样的问题几乎没有显式解. 不过 (4.53) 可以被 Floquet 理论[2] 所接受, 该理论大致认为 ω 随着 X 定性性态的交替改变而增加; 当 ω 位于某些区间, 称作*停止带*, (4.53) 的两个自变量的解当 $|x|\to\infty$ 时, 或者增长或者衰减, 但当 ω 位于互补的 "通行带" 时, 这些特征解关于 x 都是拟周期的, 因此实际上是可接受的, 而 (4.52) 在 $-\infty<x<\infty$ 中成立. 仅在通行带和停止带之间的边界, X 是周期的. 因此, 即使没有显式解, 我们也能看到双曲型方程所出现的新现象: 波能够沿着特征线传播, 但当频率位于某个带中, 它们的空间渗透力可能要比其他问题

强. 事实上, 这种 弥散 性质是相当普遍的, 因为即使对具常系数的电报方程 (4.50), 频率为 ω 的波的波长为

$$k=\sqrt{\frac{\omega^2}{a_0^2}-c},$$

因此, 当 $|\omega|<a_0\sqrt{c}$ 时, 解是指数衰减或增长的.

*4.5.5 一般注记

继续将这样的例子分类会引导我们更深地进入问题的特定技巧中. 然而, 我们给出的所有例子都揭示出与预测的 Riemann 函数表达式 (4.14) 一致. 它们都有依赖区域和影响区域, 在这方面唯一能使我们暂停而稍加思考的例子就是电报方程 (4.50). 这个方程的允许解的形式为

$$u=\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-Vt)},$$

其中

$$V=\sqrt{a_0^2+\frac{c}{k^2}},\tag{4.54}$$

而且, 在实际中 $c>0$, 这似乎预计了波传播得要比特征线的速度 a_0 快. 然而, 对于实际初值问题, 比如 $t=0$ 时的 Cauchy 数据是紧支集 (即在 x 有限范围外为零) 的情况是波长为 k 的各个 Fourier 分量会发生弥散, 即会以大于 a_0 的速度重使自身落入 Cauchy 数据的影响区域中; 表达式 (4.14) 表明这种调整没有落入影响区域的外面. 对此另一种看法是在影响区域边界上发生间断是不可避免的, 这种现象可通过 k 很大来描述, 这时从 (4.54) 知边界上的传播速度为 a_0.

这就提出了关于在 Cauchy 数据的影响区域内解自身分类方法的一般问题. 从习题 4.22 我们可以看到, 对一维波动方程 (4.1)(对三维径向对称方程 (4.49)), u 具 $\partial u/\partial t(x,0)=0$ 的任何初始局部数据给出了解在特征线 $x=\pm a_0t$ 附近从源发出的变化的响应. 关于影响区域的结论使我们期望在 $x>a_0t$ 或 $x<-a_0t$ 没有扰动, 但是, 它没有揭示在这些特征线之间存在 "寂静带", 在此带中 u 是零 (在三维中, u 在 $0\leqslant r<a_0t$ 为零). 然而, 当我们考虑圆对称的波动方程 (4.42) 或带有局部 Cauchy 数据的电报方程 (4.50) 时, 可以证明解在 $0\leqslant r<a_0t$ 中 (几乎) 处处 不为零 (将石头投入池塘附近时, 漂浮叶子的运动可以证实这一点). 4.5.3 节末已经暗示了这一点, 我们将在下节再来探讨它.

4.6 多于两个自变量的波动方程

对于具三个以上自变量的波动方程, 有两个相关思想我们已经接触过, 但我们希望在给出更一般的双曲性概念框架之前先在本节作更深入的探讨.

4.6.1 降维法和 Huygens 原理

这节的思想可由熟知的三维空间中的声学模型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \nabla^2 u \tag{4.55}$$

得到最好的说明, 通过 (4.49) 可以证明一般的径向对称的进入解和离开解分别为

$$u = \frac{1}{r} F(r \pm a_0 t), \tag{4.56}$$

其中 r 是球极坐标. 这些解都随着 r 的增加而递减 ($r \pm a_0 t$ 固定), 反映了在三维空间中声波沿球面传播; 它们在 $r = 0$ 都有奇性, 代表了聚焦的可能性, 这在一维问题中是不会发生的. 在二维空间中没有像 (4.56) 那样简单的表示, 其原因马上会看到. 然而, 我们可以利用 (4.56) 得到一般 Cauchy 问题[45]的显式解, 其中

$$u = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0(\boldsymbol{x}) \quad 在\ t = 0, \tag{4.57}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. 正如 (4.41), 我们对 (4.56) 形式的解作加权叠加, 其中 F 是局部化的, 由因果律, 我们只取离开波, 即写成

$$u(x, y, z, t) = \iiint \frac{\delta(r - a_0 t)}{r} f(x', y', z') \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \mathrm{d}z', \tag{4.58}$$

其中 $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, 显然对任意的权函数 f 满足 (4.55). 积分中 δ 函数的存在保证我们只需考虑 f 在以 (x, y, z) 为球心以 $a_0 t$ 为半径的球面上的值. 因此, 变为球极坐标 (r, θ, ϕ) 并对 r 积分, 得到半径为 $a_0 t$ 的球面上的积分. 注意曲面微元是 $a_0^2 t^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$, 我们有

$$u = 4\pi a_0 t \mathcal{L} f,$$

其中

$$\mathcal{L} f = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(x + a_0 t \sin\theta\cos\phi, y + a_0 t \sin\theta \sin\phi, z + a_0 t \cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi. \tag{4.59}$$

对这种 *推迟势* 解, 直接积分显然有

$$u = 0 \quad 在\ t = 0 \quad 及 \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 4\pi a_0 \mathcal{L} f|_{t=0} = 4\pi a_0 f(x, y, z).$$

因此, 设 $f = v_0/(4\pi a_0)$, 当 $u_0 = 0$ 时, 得到 (4.57) 的解. 然而, 如果 u 满足 (4.55), 那么 $\partial u/\partial t$ 也满足, 我们就能求解完整的 Cauchy 问题. 于是, 对所有的 $t > 0$,

45 可以通过与习题 4.13 类似的能量方法证明此问题有唯一解.

$\partial/\partial t(t\mathcal{L}f)$ 是 (4.55) 的解, 而且如上所述, 在 $t=0$ 处的值是 $4\pi a_0 f$; 简单地取 $f=(1/4\pi a_0)u_0$ 就能使 (4.57) 的第一个条件得到满足. 最后, 注意到 $\partial^2/\partial t^2(t\mathcal{L}f)=a_0^2 t\nabla^2\mathcal{L}f$, 由于 $t\mathcal{L}f$ 满足 (4.55), 因此在 $t=0$ 时为零. 于是, 我们求出了 Cauchy 问题如下形式的解

$$u=t\mathcal{L}v_0+\frac{\partial}{\partial t}(t\mathcal{L}u_0).$$

为解释解的表达式, 注意到在积分 (4.59) 中 v_0 的值只出现在球心为 (x,y,z) (在图 4.6 中记为 P) 半径为 $a_0 t$ 的球面 $S_P(t)$ 上. 因此, 如果 u_0 和 v_0 仅在有限区域 D_0 中非零且 P 不在 D_0 中, 那么所得到的解为零, 除非 t 充分大, 比如 $t>t_{\min}$, $S_P(t)$ 与 D_0 相交为止. 对充分大的 t, 比如 $t\geqslant t_{\max}$, $S_P(t)$ 不再与 D_0 相交, 从而 D_0 整个在球 $S_P(t)$ 的内部, 解又为零. 所以, 解只在 D_0 中, 且 $t_{\min}<t<t_{\max}$ 中非零. 在 $t=0$ 时, D_0 中的扰动随着不同的波前面和波后面传播, 这就是所谓的 Huygens *原理* 的表现形式.

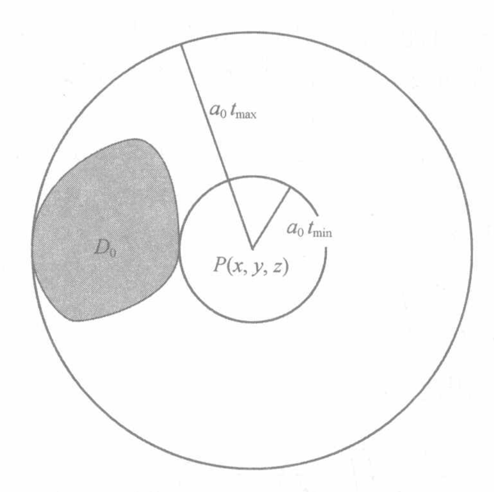


图 4.6 Huygens 原理

如 4.5.1 节一样, 把这种方法与 Fourier 变换进行比较, 仍然针对特殊情况

$$u(\boldsymbol{x},0)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)=v_0(\boldsymbol{x}).$$

我们立刻可以看到 $u(x,y,z,t)$ 的 Fourier 变换为

$$\widehat{u}(k_1,k_2,k_3,t)=\widehat{v}_0(k_1,k_2,k_3)\frac{\sin a_0 kt}{a_0 k},$$

其中 $k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2$. 而 (4.58) 是 (4.41) 在三维中的推广, 类似 (4.37) 相应的表达式为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+k_2y+k_3z)}\widehat{v}_0(k_1,k_2,k_3)\frac{\sin a_0kt}{a_0k}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3. \tag{4.60}$$

进一步, 用 v 替换 $\widehat{v}_0$ 得到 (4.58) 的修正形式

$$\begin{aligned}&u(x,y,z,t)\\&=\frac{1}{8\pi^3a_0}\iiint v_0(x',y',z')\left(\iiint \sin a_0kt\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr\cos\theta}k\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z',\end{aligned}$$

其中 $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, (k,θ,ϕ) 是球心为 $k_1=k_2=k_3=0$ 的球极坐标. 因此, 关于 θ 和 ϕ 积分有

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)&=\frac{1}{4\pi^2a_0}\iiint v_0(x',y',z')\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin a_0kt\sin kr}{r}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\\&=\frac{1}{4\pi a_0}\iiint v_0(x',y',z')\frac{\delta(r-a_0t)}{r}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'.\end{aligned}$$

为得到二维初值问题的解, 我们对 (4.59) 的结果利用 **降维法**. 如果假定 u_0 和 v_0 不依赖于 z, 且 D_0 是母线为 z 方向的无限长圆柱, 那么

$$\mathcal{L}v_0=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}v_0(x+a_0t\sin\theta\cos\phi,y+a_0t\sin\theta\sin\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

代入 $\rho=a_0t\sin\theta$, 其中 $|\rho|<a_0t$,

$$\mathcal{L}v_0=\frac{1}{2\pi a_0t}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_0t}v_0(x+\rho\cos\phi,y+\rho\sin\phi)\frac{\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi}{(a_0^2t^2-\rho^2)^{1/2}},$$

而 ρ,ϕ 是二维极坐标. 因此, 在笛卡儿坐标 $\xi=\rho\cos\phi+x$ 及 $\eta=\rho\sin\phi+y$ 下, 上式化简为

$$\mathcal{L}v_0=\frac{1}{2\pi a_0t}\iint\frac{v_0(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{(a_0^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2)^{1/2}}, \tag{4.61}$$

其中积分在 $|\rho|<a_0t$ 上进行. 如果初始数据在区域 A_0 (D_0 的二维截面) 中定义且非零, 那么对所有 $t>t_{\min}$, 半径为 a_0t 的圆内部与 A_0 相交, 且积分 (4.61) 非零. 这与 4.5.5 节末关于浅水塘表面的漂浮树叶的注解是相符的, 而且也与闪电过后隆隆的雷声经过一段延迟才被听到相一致, 尽管有间隔, 但它产生一个二维近似的声场.

进一步利用降维法, 将 (4.61) 化简成 d'Alembert 公式, 对一维空间具紧支集的初始数据 (即在有限区间外为零), 波的前阵面和后阵面都会出现.

注意, 上述思想也可以用于非齐次波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a_0^2\nabla^2u=f(\boldsymbol{x},t). \tag{4.62}$$

根据 Duhamel 原理, 如果设 $v(\boldsymbol{x},t,\tau)$ 是齐次方程 $(f\equiv 0)$ 满足 $t=\tau$ 时 $v=0$ 和 $\partial v/\partial t=f(\boldsymbol{x},\tau)$ 的解, 利用 (4.59) 求解 v, 并设 $u=\int_0^t v(\boldsymbol{x},t,\tau)\mathrm{d}\tau$, 我们就得到满足 (4.62) 具零 Cauchy 数据的解. 这反映了源项 f 等价于初值问题 "脉冲" 的叠加.

与利用 Fourier 分析所遇到的困难相比, 利用降维法较易得到 (4.61). 例如, 假设考虑二维空间中在 $t=0$ 时, $u=0$, $\partial u/\partial t=v_0$ 的问题, 利用二维 Fourier 变换

$$\widehat{u}(k_1,k_2,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.63}$$

如三维情形, 可得

$$\widehat{u}(k,t)=\widehat{v}_0(k,t)\frac{\sin a_0kt}{a_0k}, \tag{4.64}$$

其中 $k^2=k_1^2+k_2^2$. 根据 (4.36), 习题 4.8 和 (4.60), 如果可以求函数 $\sin(a_0kt)/a_0k$ 的逆, 可以将 u 写成卷积的形式. 这使我们集中研究 4.4 节提到的收敛问题. 一个可能的方法是利用下面断言的虚部

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_0kt}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}}{a_0k}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2&=\frac{1}{a_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(a_0t-\rho\cos\theta)}\mathrm{d}k\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\mathrm{i}}{a_0}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a_0t-\rho\cos\theta}\\&=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\left(a_0\sqrt{a_0^2t^2-\rho^2}\right)^{-1}, & \rho<a_0t,\\[2mm] 0, & \rho>a_0t,\end{cases}\end{aligned} \tag{4.65}$$

其中 $\rho^2=x^2+y^2$. 谨慎的读者可能喜欢从结论向前推导, 并验证 (4.65) 的二重 Fourier 变换为

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{a_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a_0t}\frac{\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho\cos\theta}}{\sqrt{a_0^2t^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta, \tag{4.66}$$

利用 [19] 的表, 积分可以化简成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a_0kt}/a_0k$.

上述讨论和前一节末一样, 提出了一个一般性问题: 当我们只考虑波动方程 (4.55) 具紧支集的 Cauchy 数据时, 其影响区域到底有多大? 根据图 4.6 我们猜测一维和三维空间的解总是在经过支集的边界的离开特征曲面上产生明显的 "始端" 和明显的 "终止"; 而在二维中没有此结论. 严格地讲, 上述结论也是对的, 但重要的是, 我们要记住这只适用于常系数的波动方程 (4.55). 任何非均匀性, 诸如 a_0 是空间变量的函数, 都可能破坏明显的扰动终止性质.

本节最后我们提出 Fourier 变换是如何导致波动方程解的另一个有趣的表达式. 在所有情况中, 我们已经考虑了 Cauchy 数据 $t=0$ 时, $u=0$ 及 $\partial u/\partial t=v_0$ 的

问题[46]. 我们发现 u 的 Fourier 变换是 $\widehat{u}=\widehat{v}_0(\sin a_0kt)/(a_0k)$. 按照 (4.36) 和习题 4.8 中的描述, 得到一维显式解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\widehat{v}_0(k)\frac{\sin a_0kt}{a_0k}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2a_0}(V_0(x+a_0t)-V_0(x-a_0t)),\end{aligned}\tag{4.67}$$

其中 $V_0'(x)=v_0(x)$.

然而, 在二维情形下, 代替 (4.65), 我们有

$$u(x,y,t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x\cos\phi+y\sin\phi)-\mathrm{i}a_0kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x\cos\phi+y\sin\phi)+\mathrm{i}a_0kt}\right)\widehat{F}(k,\phi)\mathrm{d}k\mathrm{d}\phi,$$

其中 $k_1=k\cos\phi$, $k_2=k\sin\phi$ 且 $\widehat{F}=\widehat{v}_0/(4\pi^2a_0k)$. 于是, 当关于 k 积分时, 我们有关于 $x\cos\phi+y\sin\phi\pm a_0t$ 的 Fourier 逆变换. 因此,

$$u(x,y,t)=\int_0^{2\pi}(F(x\cos\phi+y\sin\phi+a_0t,\phi)-F(x\cos\phi+y\sin\phi-a_0t,\phi))\mathrm{d}\phi.\tag{4.68}$$

这个 “平面波” 叠加对求解初值问题没有 (4.61) 那样有用, 它的意义在于只包含了一个含两个变量的任意函数.

最后, 在三维情形下, (4.68) 的显然推广就是平面波的叠加

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}&(F(x\sin\phi\cos\theta+y\sin\phi\sin\theta+z\cos\phi+a_0t,\theta,\phi)\\&-F(x\sin\phi\cos\theta+y\sin\phi\sin\theta+z\cos\phi-a_0t,\phi))\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{4.69}$$

4.6.2 双曲性和类时性

在 4.3 节中我们已经给出注解, 为了给出适定的数据, 数学上将类时方向的思想引入一维初值/边值问题理论. 在多维空间中这种考虑更有实际意义, 正如在一个以速度 U 移动的介质中的声波所示. 当我们将气体动力学方程 (推广到三维空间) 关于状态参数 $\boldsymbol{u}=U\boldsymbol{i}$, $p=p_0$ 及 $\rho=\rho_0$ 线性化, 如 2.6 节所做, 我们发现扰动压力、密度和速度位势都满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2u=a_0^2\nabla^2u.\tag{4.70}$$

显然, 这个方程通过坐标变换 $x-Ut=X$ 可化简成 (4.55), 但我们建议在固定的参考框架下考虑它, 其 Cauchy 数据 (4.57) 为 $t=0$ 时, $v_0=0$, u_0 局限在原点附近. 在三维空间中, 当 $U=0$ 时, 这意味着代表响应 u 的支集的球序列由

$$u=\frac{1}{r}F(r-a_0t)$$

46 记住, 我们可以利用 p. 113 的思想考虑更为一般的初值问题.

给出, 其中 F 是关于 $r-a_0t$ 的 δ 函数 (见图 4.7(a)). 然而, 这些球的球心沿 x 方向移动, 如图 4.7(b) 和 (c) 分别对应 $0<U<a_0$ 和 $U>a_0$. 这些图形对应于从原点发出的声音的 "脉冲" 效应, 在连续时间段中, 它们位于相继球面

$$(x-Ut)^2+y^2+z^2=a_0^2t^2 \tag{4.71}$$

的附近[47].

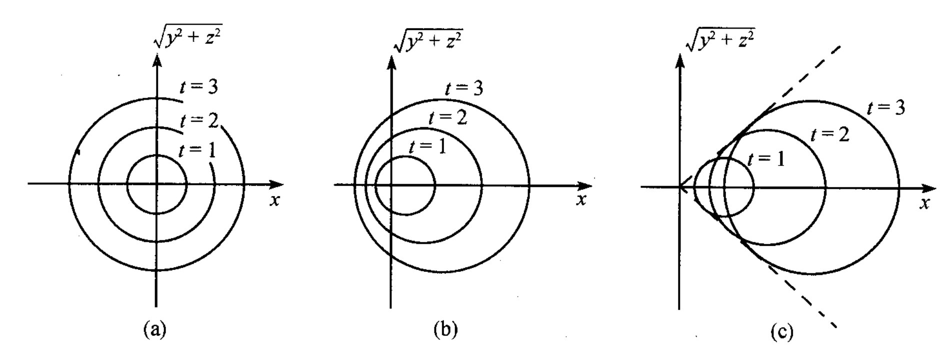


图 4.7 当 (a) $U=0$, (b) $0<U<a_0$ 和 (c) $a_0<U$ 时, 对 (4.70) 局部源的响应

在图 4.7(b) 和 (c) 之间显然有一个重要差别, 这正是在 4.3 节中我们所期望的. 第一种情况, 时间轴位于 (4.71) 的内部, 可想象成是四维空间中的流形, 它是第 2 章所称为的射线锥. 进一步, 在这种情况下, 空间中所有点最终都会收到声音信号. 然而, 如果 $U>a_0$, 那么时间轴位于锥 (4.71) 之外, 如图 4.8 所示, 而时间 (固定 (x,y,z)) 不再是 "类时" 的. 对后一种情形, 只有在所谓的 Mach 锥 内部的那些方向 (x,y,z), 即

$$y^2+z^2<\frac{a_0^2x^2}{U^2-a_0^2} \quad 对\ x>0$$

能接收到信号.

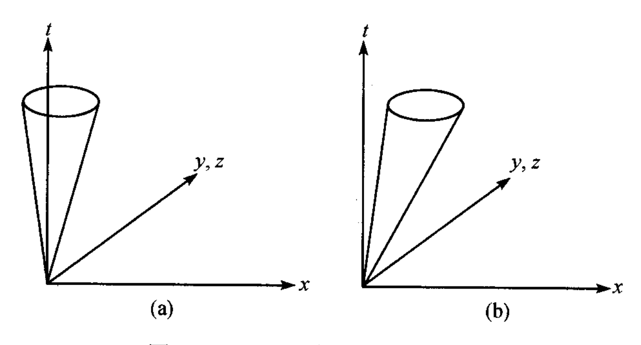


图 4.8 (4.70) 类时和类空射线锥

47 如果在图 4.7(a) 中不假定初始点源, 而假定初始 "波" 不是球形, 那么波以后的发展就可以由沿每一点的法向以速度 a_0 移动描绘出来, 如我们在第 8 章看到的.

这个例子说明如果要给一个好的实际解释, 那就是双曲性的定义要比单纯的"特征线是实的" 更有说服力. 在自变量空间中不同方向之间也必须作一些区别, 尤其是类时方向需要看成射线锥靠近内层的部分. 因此, 如果通过一点有 $m-1$ 维实特征 (射线) 锥, 我们现在就正式定义具有 m 个自变量的二阶标量线性偏微分方程在该点是 **双曲的**. 这个定义显然与 2.6 节的思想是一致的.

注意到例 (4.70) 可用来说明在一个时间独立情况下的 Huygens 原理. 假设我们考虑稳态流, 那么 (4.70) 变成

$$U^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a_0^2\nabla^2 u, \tag{4.72}$$

如果 $U>a_0$, 那么它是双曲的. 由表达式 (4.62), 适当改变记号, 可以看到, 在三维流中 $x=y=z=0$ 处的点扰动 (例如, 在风洞中经过小弹头的流体) 在 Mach 锥 $y^2+z^2=a_0^2x^2/(U^2-a_0^2)$ 上面和内部都会产生扰动. 弹头留下一个宽波, 但这不是二维流的情形 (如与沿 z 轴方向的流体垂直的直线), 它只在锥 $y^2=a_0^2x^2/(U^2-a_0^2)$ 上存在.

顺便说一下, 模型 (4.72) 也能使我们给出 2.6 节中引入的次特征线的物理解释. Mach 锥只是特征曲面, 经过它, 任何流体变量的二阶导数都能有跳跃. 假设子弹头模型用飞机突出的前端模型代替, 并假设从鼻翼前端到 Mach 锥有一个细的天线突出来. 由于天线与锥只交于一点, 间断沿着通过该点的次特征线传播, 在这种情况下, 间断是 Mach 锥的母线. 任何通过 Mach 锥突出的较 "宽" 的物体都会产生新的特征曲面的成分.

作为本节最后的注记, 我们注意到, 如果考虑比 $\partial^2u/\partial t^2=a_0^2\nabla^2u$ 更复杂的方程, 如变系数方程, 那么像图 4.7 这样的图对较小的时间也会变得更为复杂. 特别地, 图 4.7 中的球面 "波" 局部地变成椭圆, 其形状依赖于方程的系数, 而且, 射线锥相应地有椭圆截面. 如果锥失去局部凸性, 那么就会出现更糟糕的几何复杂性. 对二阶标量方程不会出现这种情况, 但对向量方程可能会出现这种情况, 我们不久将会看到.

*4.7　高阶方程组

研究偏微分方程的基本动机之一是日常生活中许多现象都通过这种方程组来建立模型. 事实上, 在前一节中, 我们解释了一个标量双曲型方程不仅是许多声学的基础, 而且能描述大量其他类型的小振幅波动. 我们现在考虑应用科学中其他两个领域的问题, 这涉及二阶向量双曲型方程.

4.7.1 线性弹性力学

首先考虑声波在固体中的传播, 其建模涉及一些基本的弹性力学理论. 像所有连续力学的情况一样, 引入向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 来描述介质的构造. 在这种情况下, 它代表来自不受应力的参考系中粒子的位移, 即位于 $\boldsymbol{x}$ 处在参考系中以 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 移动的粒子. 我们也需要建立介质中的受力模型, 而这应当引入应力张量 (如 [40]). 在此, 我们避开这个过程而只注意弹性固体同时承受剪应力 (见图 4.9(a)) 和拉伸/压缩力 (见图 4.9(b)).

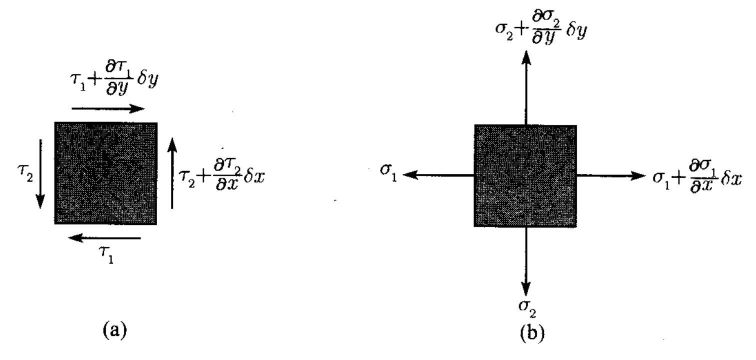


图 4.9 弹性介质中 (a) 剪应力; (b) 张力

前面的例子是剪取下来的一张橡胶, 在 x 方向上的位移为 u, 它只是 y 和 t 的函数. 在最简单的模型中, 假设单位面积上的剪应力是 $\mu\partial u/\partial y$, 其中 μ 是常值 "剪切模量", 因此, 如 2.1 节所述, 其运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

其中 ρ 是橡胶的密度. 同样地, 如果沿着橡胶的长度将其拉长, 使得它在 x 方向上的位移为 $u(x,t)$, 张力即为 $\lambda'\partial u/\partial x$, 而运动方程为

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda'\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

其中 λ' 是另一个正常数. 由于压力/张力和剪切力之间有耦合, 要合成一般的各向同性的线性弹性体的位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 并不是将这两个力简单求和. 因此, 我们只列出最后的结果

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\mu\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{u}),\tag{4.73}$$

其中 μ 同上面一样, 是材料的 **剪切模量**, λ 与 **杨氏模量** λ' 有关, $\lambda'=\mu(3\lambda+2\mu)/(\lambda+\mu)$.

于是, 我们面对的是三个线性二阶方程构成的方程组, 将 2.6 节中的方法与这章前面所用的方法结合起来是没有理由的: 简单地定义 $\phi(x,y,z,t)=0$ 是特征曲面, 如果在特征曲面上给定 Cauchy 数据 $\boldsymbol{u}$ 和 $\partial\boldsymbol{u}/\partial n$, 就无法得到唯一的局部解. 如 2.6 节, 记

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3),$$

经过一些运算, 可得

$$(\mu(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)-\rho\xi_0^2)((\lambda+2\mu)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)-\rho\xi_0^2)=0. \tag{4.74}$$

因此, 根据 2.6 节, 法锥由两个分量组成而不是像前面 4.6.2 节中由单 "叶" 音速流组成. 相应的射线锥也由两叶构成. 从几何上看是明显的, 由于法锥有截面为 $\xi_0=$ 常数的同心圆, 但我们也可以解析地计算射线锥, 由 (2.54)~(2.56), 它由

$$\frac{x}{\mu}-\Lambda\xi_1=\frac{y}{\mu}-\Lambda\xi_2=\frac{z}{\mu}-\Lambda\xi_3=\frac{t}{\rho}+\Lambda\xi_0=0$$

及

$$\frac{x}{\lambda+2\mu}-\Lambda\xi_1=\frac{y}{\lambda+2\mu}-\Lambda\xi_2=\frac{z}{\lambda+2\mu}-\Lambda\xi_3=\frac{t}{\rho}+\Lambda\xi_0=0,$$

即

$$(x^2+y^2+z^2-c_s^2t^2)(x^2+y^2+z^2-c_p^2t^2)=0 \tag{4.75}$$

参数化来表示, 其中 $c_s^2=\mu/\rho$, $c_p^2=(\lambda+2\mu)/\rho$ 是所谓的 "S" 和 "P" 波速. 其物理解释是弹性体中的声波可以两个不同的速度传播, 正如地震仪跟踪法所显示的[48].

这个例子表明, 如果要将 4.6 节末给出的关于双曲性的结果推广到高阶方程组, 我们必须准备考虑 "多叶" 法锥和射线锥, 而不是图 4.8 中的单叶锥. 幸好, 两个锥 (4.74) 和 (4.75) 是由两个 "嵌套" 的凸锥构成, 且习题 4.13 中提到的能量估计可用来证明解的适定性, 只要 Cauchy 数据给在类空曲面上, 即位于外层射线锥的 "外面"; 这意味着圆锥形的类空曲面的法向总是指向类时方向朝外层射线锥内部. 如 4.6 节, 这种几何提供了定义高阶方程组双曲性的强烈动机, 不仅与偏微分方程组有关, 而且与自变量空间中类时和类空方向有关. 然而, (4.74) 有两个分量, 它们结合起来可能不是凸的, 我们在本节末再回到这种情形.

在实际情形中寻求 (4.73) 的解需要许多严格的技巧细节, 尤其是应用于边界条件时. 一般方法是考虑形如

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{Re}(\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\quad 对\ \omega\in\mathbb{R}$$

---

48 事实上, 地球无应力边界的存在, 使得地震记录变得复杂, 它导致第三种波速的产生, 如习题 4.16 所示.

的解, 其中 u' 满足在所谓的 *频域* 中仅含三个自变量的方程. 然而, 后面的方程不再是双曲的, 我们将在下一章来处理. 不管是在时域还是频域中, 通过变换方法来处理方程组, 都会遇到由求有理函数包括高次多项式 (这里是 6 次) 的 Fourier 逆变换而产生的困难. 因此, 这一章我们不考虑显式解.

4.7.2 Maxwell 电磁波方程组

最后我们讨论也许是最著名的高阶线性偏微分方程组 ——Maxwell 电磁波方程组. 除了它们重要外, 比起我们所遇到的方程, 这些方程要更加难以解释. 因此, 对于它们的导出只给出简要的说明. 出发点是 Faraday *磁感定律*, 它涉及电动机和天线的基本机制. 该定律指出, 通过闭合线路 L 的任何时变磁通量在 L 周围产生一个电场 $\boldsymbol{E}$, 在实验室容易证实, 如果 L 是一个导体, 那么在它的周围产生电流. 记 $\boldsymbol{H}$ 为磁场, 表示通过 L 的磁通量的变化率, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_D \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_D \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

其中 D 由 L 围成. 如果 L 是导体, 那么电场会产生环绕 L 的电流, 由 Ohm 定律有比例关系

$$\int_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\iint_D \nabla\wedge\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

于是, 由于 D 是任意的, 所以 $\partial\boldsymbol{H}/\partial t\propto\nabla\wedge\boldsymbol{E}$. 比例常数是负的, 方程通常写为

$$\nabla\wedge\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{4.76}$$

然而, 不管 L 是否是导体, 都会产生电场, Maxwell 提出第一个方程应当是处处成立的, 不只是对导体成立, 在导体中 $\boldsymbol{E}$ 与电流有关.

Maxwell 方程组的第二个方程更直观, 它来自于另一个实验观察. 这就是 Biot-Savart 定律, 该定律指出沿着直线导线的稳态电流 j 在导线周围产生有方向的磁场 $\boldsymbol{H}$, 其强度与导体的距离平方呈反向衰减. 因此, 由任意环电流 L 产生的磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 与

$$-j\int_L \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \tag{4.77}$$

成比例, 通常单位化比例常数是 $1/4\pi$. 显然, 对任意稳态的空间分布电流 $\boldsymbol{j}$, 有

$$\nabla\wedge\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}, \tag{4.78}$$

但等到第 5 章我们会看到为什么 (4.77) 可以视为 (4.78) 的 "解".

Biot-Savart 定律并不能保证时变电流或电荷分布效应, 但如果假设电荷是守恒的, 我们必须用一个类似于 2.1 节提到的守恒律方程保证电流 $\boldsymbol{j}$ 与电荷密度 ρ 有

关. 于是,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{4.79}$$

然而, 引力场的散度与局部质量密度成比例, 设为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{4.80}$$

其中 ε 是常数, 称为 *介电常数*. Maxwell 最大的贡献就是提出将 (4.78) 变成依赖时间的效应关系

$$\nabla \wedge \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{4.81}$$

从而保证了与 (4.79) 的一致性[49].

从偏微分方程的观点来看, 为了有唯一性必须对 $\boldsymbol{H}$ 附加一个标量方程. 为了看到这一点, 我们限制在真空中, 其中没有电荷和电流, 所以

$$\nabla \wedge \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \quad 及 \quad \nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{4.82}$$

尽管这是包含 6 个未知函数的 6 个方程, 但是由于旋度算子的退化意味着仅有这些方程, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 只能在不依赖时间的标量函数的梯度中确定. 不过, (4.80) 给出了[50]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \tag{4.83}$$

这就去除了 $\boldsymbol{E}$ 的不唯一性, 对 $\boldsymbol{H}$ 也有必要给出一个类似的标量方程. 幸运的是, 通常的观念中没有单磁极, 这就有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0, \tag{4.84}$$

它不像 (4.83) 那样, 甚至在电荷或电流存在的条件下也成立.

将这些方程结合起来并利用恒等式 $\nabla \wedge \nabla \wedge = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$, 在真空中有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) \boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0},$$

---

49 必须提醒读者, (4.76) 和 (4.81) 通常是通过物理中更基本的所谓磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 和位移电流 $\boldsymbol{D}$ 来推导得到的, 而不是 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$. 但在许多实际情况中这种差别从数学的观点来看是可以忽略的.

50 注意, 在许多稳恒电流的情形下, 如金属, $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 也是一个很好的近似. 在这种情况下, 我们经常利用 Ohm 定律的微分形式的 $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, 其中 σ 是材料的性质, 称为电导率, 由 (4.79) 和 (4.80) 得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}(\sigma \rho + \nabla \sigma \cdot \boldsymbol{E}) = 0;$$

当 σ 为常数时, 必有 $\rho = 0$ (事实上, 任何初始电荷密度都是以时间尺度 ε/σ 衰减). 只有当 σ 的空间变化足够大时电荷才会积累, 比如说, 当在一个导体和绝缘体的交界处 σ 有跳跃时, 会出现表面电荷层.

其中 $c^2=(\varepsilon\mu)^{-1}$, 因此, 磁场和电场都满足传播速度为光速 c 的向量波动方程. 从前面的说明可见, 两个方程都是双曲的, 在 $x^2+y^2+z^2<c^2t^2$ 中 (法锥为 $c^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)-\xi_0^2=0$) 具有类时方向, 但结合 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的 6 阶方程组, 由于法锥没有不同的分量, 我们找到了数学上的退化.

上面的例子从声学和电磁学角度, 给我们一个非常好的实际框架, 用来解释多变量偏微分方程的特征曲面. 如我们所知, 这些 "流形" $\phi(x,y,z,t)=0$ 是因变量二阶导数的间断跨过它们能够传播的曲面. 因此, 我们自然会把它们看成 "波前", 如图 4.8. 许多人对光线和声线也会有良好的直觉, 但有时很难将依赖于含时的传播问题中的锥母线与之联系起来. 困难之一是法锥可能不是嵌套的或凸的, 如真空中的线性弹性波或电磁波. 一般的构形是截面为椭圆的两个锥, 如图 4.10. 事实上, 当在 (4.82) 中用 $\boldsymbol{E}$ 乘上适当的常数矩阵来代替 $\boldsymbol{E}$, 建立各向异性的电磁介质模型, 该几何构形的产生就会显示出来. 假设我们在这种情况下计算射线锥. 相应于法锥的两个椭圆分量, 射线锥也有两个椭圆截面, 如图 4.11, 其中 4.11(a) 中的法向 OA_1 在图 4.11(b) 中的 A' 点产生一条切线, 等等. 然而, 当我们在 $\boldsymbol{n}_p$ 方向上计算, 就会出现一个困难, 因为这时在 P_1' 和 P_2' 点会产生两条切线; 在 P 处法锥的法向构成一个向量扇形, 如图 4.11(a) 所示. 计算的详细过程很繁琐 (见习题 4.19), 但最终这些向量表明每个向量都产生两条切线 $P_1'P_2'$, 如图 4.11(c). 于是, 法锥的非凸性造成射线锥新的分量的产生, 射线锥的 "凸包" 结构可以证明是非常有意义的. 对于它的物理解释是平面光波不能沿着波前的法向 $\boldsymbol{n}_p$ 传播, 而光在 P_1' 和 P_2' 之间的所有方向上可以传播.

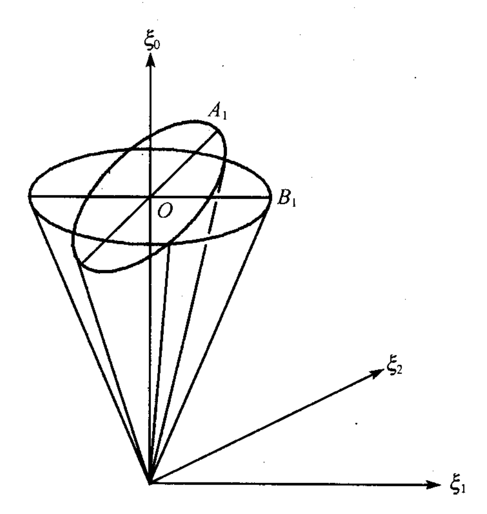


图 4.10 各向异性介质的法锥; $\xi_0=t$, $\xi_1=x$, $\xi_2=y$

关于线性双曲型方程的讨论告一段落. 关于这类方程还有许多方面的工作需

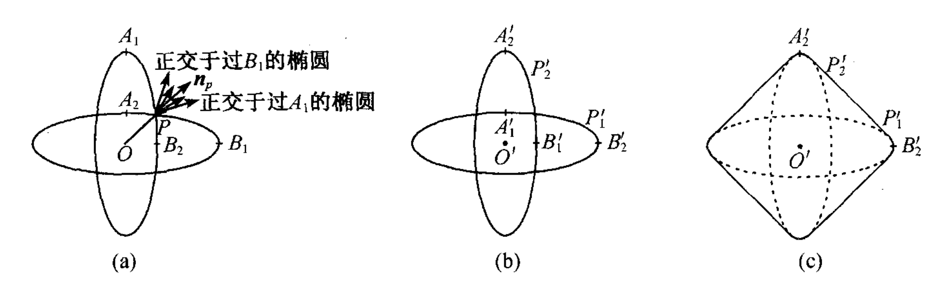


图 4.11　(a) 法锥的截面 $\xi_0 =$ 常数; (b) 射线锥的截面 $t =$ 常数;
(c) 射线锥的截面 $t =$ 常数的凸包

要做, 现在还停留在一般的水平上, 特别地, 我们要提出重要的实际问题, 即在两个相邻区域的交界面上如何构成适定的边界条件, 使得在每个交界面上双曲型方程都满足. 例如, 两个不同的弹性体之间或两个不同的电磁介质之间的交界面有关解向量连续的问题. 一个经验法则是, 当双曲型方程写为有关物理量一阶导数的形式时, 要保证 "分部积分" 或 "弱解" 的恒等式 (如 (2.43)) 满足. 这一点说明可参见习题 4.17.

4.8 非线性性

在第 1 章我们已经看到非线性性的存在通常会导致前面的线性偏微分方程解的性质发生根本变化. 按照一般的规律, 每个非线性方程需要根据自己的特点来处理, 很少可以得到一般的理论和方法. 当然, 当运用这些方法时, 它们是很有价值的.

对双曲型方程有一个独特方法, 因为特征线相交的结果形成激波, 这是非线性的共同效应. 但在此灾难发生之前, 还有以下可能性.

4.8.1 简单波

在第 2 章我们注意到通常特征线对于获得双曲型方程组的显式解没有多少价值. 甚至对两个自变量的二阶标量拟线性方程都不能找到 Riemann 不变量, 即在特征线族上关于 $x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y$ 的函数为常数. 而且, 即使存在这样的 Riemann 不变量, 初始和边界条件也几乎一定不能表示为这些不变量的值. 然而, 存在一种情形, 它经常惊奇地出现在实际中, 当我们考虑边界数据发生突然变化对解的影响时, 解在变化出现之前是易知的. 原始例子是二维气体流以速度 U_∞, Mach 数 $M_\infty > 1$ 经过初始直线墙. 有关的非线性双曲型方程为

$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + H\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4.85}$$

其中 F, G 和 H 只依赖于 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$, 它们的确切形式在此与我们无关. 关键是存在 Riemann 不变量, 即在每条特征线族 $C^{\pm}$ 上 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的函数为常数. 在 $x<0$ 中给出已知的无扰动不定向流, 事实上 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的值为常数, 从而特征线是直线. 此外, $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的值给出了非特征线 $x=0$ 上的 Cauchy 数据, 且须在 $x=0$, $y=0$ 处出现边界条件变化的连接处求解 Cauchy 问题. 为保证解的唯一性, 必须保证没有 "逆流影响", 使得原点的影响区域在图 4.12 和图 4.13 中特征线 OA 的右侧.

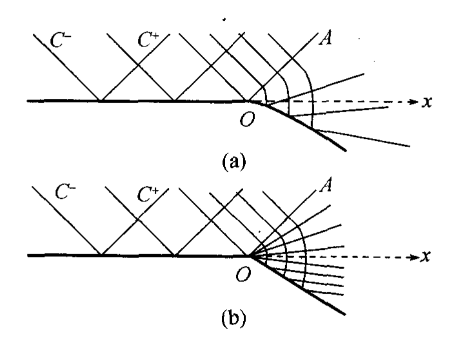


图 4.12 气体流的扩展 (a) 光滑时 (b) 有突变时

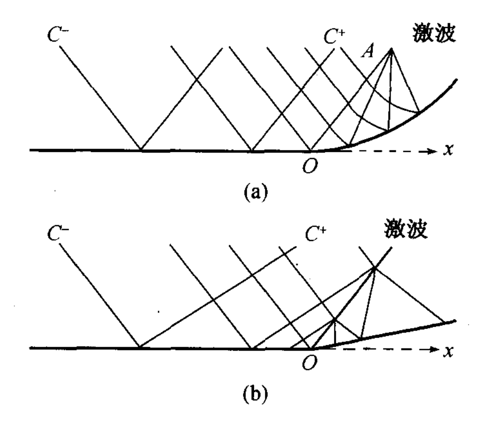


图 4.13 气体流的压缩 (a) 光滑时 (b) 有突变时

我们观察到由于 Riemann 不变量被看成 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 已知的显式函数, 且由于它们在无扰动流中处处是常数, 假设它们没有跳跃发生, 那么至少有一个 Riemann 不变量在扰动流中是常数直到同一族特征线发生交叉. 我们首先来看图 4.12, 在特征线 C^- 上 Riemann 不变量是常数. 因此, 至少开始时扰动解是由 *一阶标量方程* 给出的, 在习题 2.13 中我们已经看到这样的例子. 而且, Riemann 不变量在 C^- 上为常数意味着特征线 C^+ 是直线, 其上 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的函数是常数,

且在此情况下, 它们可由边界条件显式地确定.

在 *简单波流* 中这是典型的情形. 我们感兴趣的区域与 Riemann 不变量取常数值的区域的邻接性通常意味着问题的阶数可降低, 这常常意味着可以解出显式解.

在图 4.12 中不管是光滑的图形还是有尖点的图形, 特征线 C^+ 形成了所谓的*扩张扇*. 然而, 当几何图形如图 4.13 时, 特征线 C^+ 是收敛的且最终收敛于激波形式; 在拐角处有突变的极端情形中, 如图 2.14, 这个激波始于拐角处.

图 4.12(b) 的结构是很有趣的, 因为在扩张扇中的特征线是 $y/x=$ 常数且 ∇u 只依赖于 y/x, 而不独立依赖于 x 或 y. 根据 (4.15) 的推导, 这是我们第 2 次遇到, 在第 6 章中称为相似解, 因为对任意的常数 λ, 在 (x,y) 的解和在 $(\lambda x,\lambda y)$ 的解相同. 后面我们将看到如果这样的不变量存在, 它总是可以用来求具 m 个自变量的偏微分方程的某些解, 这些解是相应的具 $m-1$ 个自变量的方程的解.

最后, 注意直线激波与上述类型的扩张扇结合起来, 称为 N- 波, 有时可用来描述一般双曲型方程 Cauchy 问题解的渐近性态. 例如, 它可用来证明当 $t\to\infty$ 时,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}f(u)=0 \quad 对\ -\infty<x<\infty,\ t>0,$$

具 $u(x,0)=u_0(x)$ 且 f 是凸的 (即 $\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2>0$), 其解趋于 N- 波, 其激波数与 u_0 的极大值的数目有关.

不幸的是, 气体动力学流体包含相干的简单波, 或含三个或更多自变量的更一般的偏微分方程, 很少能保证有这样的简单解. 不过, 气体动力学提出另外一个强有力的方法, 用于一些更一般的双曲问题或其他问题.

4.8.2 速度图方法

假设两个变量的二阶标量双曲型方程 (如 (3.12) 中的超声流模型), 其系数仅依赖于 u 的一阶导数. 我们自然要考虑将自变量变成 $(\partial u/\partial x,\partial u/\partial y)$, 但是在这种情况下, 因变量的最好选择是什么?

我们可以从几何上回答这个问题. 如果将解 $u(x,y)$ 看成是空间 (u,x,y) 的一个曲面 S, 如何定义 w 使得空间 $(w,\partial u/\partial x,\partial u/\partial y)$ 中的曲面 $w=w(\partial u/\partial x,\partial u/\partial y)$ 尽可能与曲面 S 紧密相关, 称为 "几何对偶". 在这个概念中, 不只是将曲面看成满足 $u=u(x,y)$ 的点, 而是等价地把它看成切平面

$$(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=u-u_0$$

的包络, 由于 (x_0,y_0) 随着 $u_0=u(x_0,y_0)$ 变化. 因此, 为节省笔墨, 记 $p=\partial u/\partial x$, $q=\partial u/\partial y$, 如果把 x, y 看成 p, q 的函数, 并定义

$$w(p,q)=px(p,q)+qy(p,q)-u(x(p,q),y(p,q)), \tag{4.86}$$

那么切平面为

$$w = w_0 = p(x_0, y_0)x_0 + q(x_0, y_0)y_0 - u_0.$$

于是, 有了由 (4.86) 定义的 w, 空间 (w, p, q) 中分片定义的曲面 $w = w(p, q)$ 就和空间 (u, x, y) 中的曲面 $u = u(x, y)$ 相同, 而 w 就是我们要选取的变量.

方程 (4.86) 称为 u 的 Legendre 变换, 它意味着空间 (x, y, u) 中 $u = u(x, y)$ 的切平面公式不包含空间 w 中的微分, 反之亦然. 如果我们能正确地表示它们, 解曲面具有这种性质的偏微分方程显然有望有显式解. 为此, 我们需要恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q},$$

从而

$$\frac{\partial w}{\partial p} = x + p\frac{\partial x}{\partial p} + q\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial q} = y.$$

现在我们作进一步处理. 由于

$$1 = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2},$$

我们得到简单关系

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2},$$

其中判别式为

$$\Delta = \frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right)^{-1}. \tag{4.87}$$

方程 (4.85) 显然对这种变量替换也是适合的. 事实上, 在力学中由于 **速度图** 就是速度平面, 所以称此方法为速度曲线法. 线性方程为

$$F(p, q)\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - G(p, q)\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + H(p, q)\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = 0,$$

有时还可能经过各种各样的方法作进一步的简化.

由这个气体动力学的例子, 最重要的是 (4.87) 定义的判别式 Δ 在下面两种情形是无穷大.

1. 在均匀流中, 上述整个区域及图 4.12 和图 4.13 中 OA 的左侧区域映射为速度平面中的一点 $(U_\infty, 0)$.

2. 在简单波中, 这样的区域映射成速度平面中的曲线, 对应于有关 Riemann 不变量的不变性.

这些观察促使我们要问 "什么时候速度图变换会出错?" 只有当判别式 Δ 为零或无穷大时才会出错, 这时不会有从 (x,y) 到 (p,q) 的一一映射. 对此我们作两点说明. 第一, 方程判别式 $\Delta=\infty$ 有这样的几何解释, 曲面 $u=u(x,y)$ $(w=w(p,q))$ 是 *可展的*, 意即它是由某个曲线 Γ 的切线产生的, 或者说, 它有零 Gauss 曲率[51]. 因此, 当判别式 $\Delta=\infty$ 时, 在可展曲面上有许多点, 这些点的法向量都是 $(p,q,-1)$, 这一点并不令人吃惊, 因为沿可展曲面的母线, 曲面 $u=u(x,y)$ 的切平面正是母线与 Γ 的交点处的 "密切平面". 第二, 方程判别式 $\Delta=0$ 本身是一个非常有趣的 $w(p,q)$ 的非拟线性方程, 我们在第 8 章再回来讨论它.

虽然速度图方法同样可以用于椭圆型和抛物型方程, 但使用的时候必须小心谨慎. 我们必须提醒读者注意一个事实, 在实际中, 由于依赖于 (x,y) 的边界条件, 所以对于 w 不可能找到合适的边界条件. 除非在流体动力学中边界的流动方向是定常的, 即边界仅由直线段组成, 我们将在第 7 章中讨论这种情况.

4.8.3 Liouville 方程

还有另一种方法我们在此不得不说, 因为它对椭圆型方程及双曲型方程都适用. 它涉及 Liouville *方程*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^u,$$

两边关于 x 求导, 并去掉关于 y 的导数, 即

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)=0.$$

可见, 对某些函数 f, $\partial u/\partial x$ 满足常微分 (Ricatti) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=f(x).$$

因此, 记[52]

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

对任意函数 $F(y)$, 有 $u(x,y)=2\log(F(y)/v(x,y))$, 从而将 Liouville 方程化简成线性问题

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}f(x)v=0.$$

51 可展曲面是直纹曲面的一种特殊情形, 即由单参数直线族形成的曲面.

52 这个变换的合理性将在第 6 章解释.

尽管这给出了通解，但其中含有两个任意函数 $f(x)$ 和 $F(y)$，而 u 对 f 和 F 的依赖关系还远不清楚. 不过，我们进一步注意到同样可以先对 y 求导，得到 $u(x,y) = 2\log(G(x)/w(x,y))$，其中

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}g(y)w = 0,$$

$g(y)$, $G(x)$ 是任意函数. 最后，利用二阶线性方程解的结构，写出

$$v(x,y) = a_1(y)v_1(x) + a_2(y)v_2(x), \quad w(x,y) = b_1(x)w_1(y) + b_2(x)w_2(y),$$

由于 $F(y)/v(x,y) = G(x)/w(x,y)$，所以有

$$\frac{G(x)v_i(x)}{b_i(x)} = \gamma = \frac{F(y)w_i(y)}{a_i(y)} \quad 对\ i = 1, 2,$$

其中 γ 是常数. 但是，由于 v, w 的 Wronskian 方程的不变性，可以取

$$v_2(x) = v_1(x)\int^x \frac{\mathrm{d}s}{v_1^2(s)}, \quad w_2(y) = w_1(y)\int^y \frac{\mathrm{d}s}{w_1^2(s)},$$

由此，存在函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 使得

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{X'}}, \quad v_2 = \frac{X}{\sqrt{X'}}, \quad w_1 = \frac{1}{\sqrt{Y'}}, \quad w_2 = \frac{Y}{\sqrt{Y'}}$$

且

$$\frac{F}{v} = \frac{\gamma}{w_1v_1 + w_2v_2} = \gamma\frac{\sqrt{X'(x)Y'(y)}}{1 + X(x)Y(y)}.$$

最后一步是取 $\gamma = \sqrt{2}$，所以 Liouville 方程的通解由两个任意实函数 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 给出

$$u(x,y) = \log\left(\frac{2X'(x)Y'(y)}{(1 + X(x)Y(y))^2}\right).$$

γ 的其他选择给出 $\partial^2 u/\partial x\partial y = ce^u$, $c \neq 1$ 的通解.

*4.8.4 另一种方法

文献中还有许多其他的技巧，但都太特殊，不列于此. 除此之外，还有另一个"重武器"，有时用于处理非线性双曲型方程，这就是"孤立子理论"[15]. 这个方法很复杂，由于它最主要是成功用于非双曲型方程，我们将它放到第 9 章讨论. 同时，读者可能会考虑这样的问题: 如果面对的是半导体模型中产生的 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u,$$

那又该怎么办呢?

习　题

4.1. 如果 $\xi = ax + by$ 及 $\eta = cx + dy$, 证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/\varepsilon^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \pi\varepsilon^2 \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|,$$

由此验证脚注 39 的结果.

4.2. 证明, 如果 $\mathcal{L} = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ 并且在 $t = 0$ 上给出齐次 Cauchy 数据 $u = \partial u/\partial t = 0$, 则图 4.1 中的 D 是以 (x,t), $(x-t,0)$ 和 $(x+t,0)$ 为顶点的三角形, 并且 $R = 1/2$. 由此证明 $\mathcal{L}u = \mathrm{e}^{-x-t}$ 在 $t > 0$ 的解为

$$u(x,t) = \iint_D \mathrm{e}^{-\xi-\tau}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}\left((2t+1)\mathrm{e}^{-x-t} - \mathrm{e}^{-x+t}\right).$$

4.3. 函数 u 在 $x > 0, y > 0$ 中几乎处处满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$$

且当 $x > 0$ 时 $u(x,0) = \partial u/\partial y(x,0) = 0$, 当 $y > 0$ 时 $u(0,y) = 0$.

通过将 u 扩展为关于 x 的奇函数, 满足 $u(-x,y) = -u(x,y)$, 并利用 Riemann 函数, 或其他方法, 证明

$$u = \begin{cases} y^2/2, & x \geqslant y, \\ x(2y-x)/2, & y \geqslant x. \end{cases}$$

证明 u 和它的一阶导数是连续的, 并估计其二阶导数在经过特征线 $y = x$ 时的跳跃.

为什么说这个方程是 "几乎处处" 满足而不是处处满足?

4.4. 证明, 如果

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

则 Riemann 不变量

$$\frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial u}{\partial y}$$

在特征线 $y \pm x =$ 常数上为常数.

假设 u 在半圆 $r^2 = x^2 + y^2 = 1, y < 0$ 中满足 Cauchy 数据

$$u = \frac{1}{2}(1 - 2xy), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 1 - 2xy.$$

证明存在形如 $a(x-y)^2+b(x+y)^2+c$ 的解, 其中 a, b, c 都是常数, 对于这种解, $\partial u/\partial x+\partial u/\partial y=0$ 处处成立, 且在 $x-y=$ 常数上 $\partial u/\partial x-\partial u/\partial y=$ 常数. 然而, 由于在 $(\pm 1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 处边界与特征线相切, 所以这个问题是不适定的. 当数据被扰动, 以至于在 $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ 和 $(1,0)$ 之间的弧上,

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\neq 2(x-y),$$

证明不存在解.

4.5. 假设

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在 $y>0$ 中几乎处处成立, 且

$$\text{在 } y=0, x>0 \text{ 上}, \quad u=\frac{\partial u}{\partial y}=0; \quad \text{在 } y=0, x<0 \text{ 上}, \quad u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=1.$$

利用 Riemann 函数证明

$$\text{在 } x>y>0 \text{ 中}, \quad u\equiv 0; \quad \text{在 } -x>y>0 \text{ 中}, \quad u\equiv y.$$

通过计算 Riemann 不变量证明, 在 $-y<x<y$ 中

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2},$$

证明 u, 在穿过 $x=\pm y$ 时是连续的, 但其一阶导数不是连续的. 利用 d'Alembert 解验证这些结果.

4.6. 假设对 $t>0$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=\delta\left(x-\frac{1}{2}t^2\right)$$

且 $u(x,0)=0$. 令 $\xi=x-\frac{1}{2}t^2$, 证明

$$(1-t)\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial t}=\delta(\xi),$$

且 $u(\xi,0)=0$. 推导, 当 $t<1$ 时, $u=0$ 对 $x>t$ 且 $x<\frac{1}{2}t^2$. 进一步证明

$$u(x,t)\to\frac{1}{1-t}\quad \text{当 } x\downarrow\frac{1}{2}t^2,$$

于是得到

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+2(x-t)}}$$

对 $\frac{1}{2}t^2 < x < t < 1$.

通过考虑在 (ξ, t) 平面上的特征线, 证明对 $t < 2$ 这个解成立, 对 $t > 2$,

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < t \text{ 且 } x > \frac{1}{2}t^2, \\ -1/\sqrt{1+2(x-t)}, & \frac{1}{2}t^2 < x < t. \end{cases}$$

注. 注意到如果没有代入 $\xi = x - \frac{1}{2}t^2$, 对这个问题容易得到错误的结果. 在可能的地方, 将 δ 函数视为一个自变量是一个很好的技巧.

*4.7. 在高压线动力学关于电力运动的问题中, 得到模型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{对 } x \neq X(t), t > 0,$$

其中 X 为指定的光滑函数且 $0 < X'(t) < 1$ (t 为时间, $X(t)$ 为移动的位置, u 为电线的位移). 穿过 $x = X$, 有给定的间断

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{X-0}^{X+0} = -V(X(t), t), \quad [u]_{X-0}^{X+0} = 0.$$

假设 $t = 0$ 时 $u = \partial u/\partial t = 0$. 利用推导 (4.8) 的修正结论说明穿过 $x = X$ 的不连续性, 证明

$$u(x,t) = \int \frac{1}{2}V(\xi,\tau)\left(1 - (X'(\tau))^2\right)\mathrm{d}\tau,$$

其中积分是在 $\tau - t < \xi - x < t - \tau$, $\tau > 0$ 的范围内, 沿 $\xi = X(\tau)$ 来积的. 如果 $X = t^2/2$, $V = 1$ 证明, 对 $0 < x < t < \sqrt{2x}$,

$$u = \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right), \quad \text{其中 } x - \frac{\zeta^2}{2} = t - \zeta,$$

并且讨论在这种情形下的适定性.

4.8. 证明对 $\delta(x \pm a_0 t)$ 关于 x 的 Fourier 变换为 $\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}a_0 t}$. 现在回忆一下对于 4.5.1 节中一维波动方程通解的 Fourier 变换 (4.35) 为

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka_0 t} + \widehat{g}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka_0 t}.$$

利用卷积定理推出通解形式为

$$u(x,t) = f(x + a_0 t) + g(x - a_0 t).$$

4.9. (i) 假设在 $x < 0$ 中, $f(x) = 0$, 且当 $x \to +\infty$ 时, $F(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\beta x} \to 0$ 对某些 $\beta > 0$. 定义

$$\widehat{F}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

且假设 $\widehat{F}$ 适当解析连续, 定义 $\widehat{f}$ 为

$$\widehat{f}(k) = \widehat{F}(k - \mathrm{i}\beta).$$

证明逆公式

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{F}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

变为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}\beta}^{\infty+\mathrm{i}\beta}\widehat{f}(\kappa)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x}\mathrm{d}\kappa.$$

证明这也隐含 Laplace 逆公式为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\widetilde{f}(p)\mathrm{e}^{px}\mathrm{d}p,$$

其中 γ 使得 $\widetilde{f}$ 的所有奇点位于 $\mathrm{Re}p < \gamma$ 中.

(ii) 假设对 $t > 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

有

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \mathrm{e}^{\alpha x}, & x > 0, \end{cases}$$

对某些 $\alpha > 0$. 证明

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}\beta}^{\infty+\mathrm{i}\beta}\frac{(-\sin\kappa t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x}\mathrm{d}\kappa}{\kappa(\alpha+\mathrm{i}\kappa)}$$

对 $\beta > \alpha > 0$, 因此利用留数微积分证明

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x < -t, \\ (\mathrm{e}^{\alpha(x+t)} - 1)/2\alpha, & -t < x < t, \\ (\mathrm{e}^{\alpha(x+t)} - \mathrm{e}^{\alpha(x-t)})/2\alpha, & t < x. \end{cases}$$

4.10. 假设 $f(x)$ 满足 Airy 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + xf = 0.$$

证明解为

$$f(x) = \int_{\widetilde{\Gamma}}\mathrm{e}^{-\zeta x}F(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

其中 $F(\zeta) = \mathrm{e}^{-\zeta^3/3}$ 且 $\widetilde{\Gamma}$ 使得积分存在并且从 $\widetilde{\Gamma}$ 的一端到另一端在 $\mathrm{e}^{-\zeta^3/3-x\zeta}$ 上的改变为零. 寻找两个 $\widetilde{\Gamma}$, 使得它们之间不能互相变形.

4.11. (i) 取零阶 Bessel 方程的 Laplace 变换

$$r\frac{\mathrm{d}^2J_0}{\mathrm{d}r^2}+\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}r}+rJ_0=0,$$

利用在 $r=0$ 处 $J_0(r)$ 是解析的及 $\int_0^\infty J_0(r)\mathrm{d}r=1$ 证明关于 J_0 的 Laplace 变换为

$$\overline{J}_0(p)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

(ii) 证明, 如果 Γ 使得在积分号下求导是允许的, 则

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{r(t-1/t)/2}t^{-\nu-1}\mathrm{d}t$$

满足 ν 阶 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2J_\nu}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}J_\nu}{\mathrm{d}r}+\left(1-\frac{\nu^2}{r^2}\right)J_\nu=0.$$

推导 J_ν 的 Laplace 变换与

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\frac{1}{(p+\sqrt{1+p^2})^\nu}$$

成比例.

*4.12. (i) 证明, 如果定义 $\sqrt{1+k^2}$, 使得在 Argand 图表中当 $|k|\to\infty$ 时, 沿所有方向都渐近于 k, 在 $k=\pm\mathrm{i}$ 之间引入分支切割.

(ii) 当取 $a_0=c=1$ 时, (4.51) 的逆为

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}v_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right)\frac{\sin(t\sqrt{1+k^2})}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k.$$

由上面给出的 $\sqrt{1+k^2}$ 的定义, 交换积分次序, 考虑

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\xi-x)\pm\mathrm{i}t\sqrt{1+k^2}}\mathrm{d}k}{\sqrt{1+k^2}}$$

沿着图 4.14 的围道, 在其内部没有奇点.

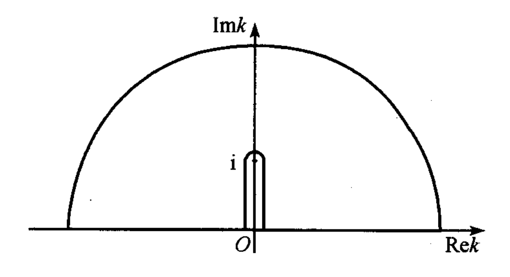


图 4.14　习题 4.12 中的围道

证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t\sqrt{1+k^2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\xi-x)}}{\sqrt{1+k^2}}\mathrm{d}k$$

$$= \begin{cases} 0, & \xi < x-t, \\ 2\int_0^1 \dfrac{\cosh(s(x-\xi))\cos(t\sqrt{1-s^2})}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s, & x-t<\xi<x+t, \\ 0, & x+t<\xi, \end{cases}$$

公式中沿着切割分支的每一侧的积分是非零的. 最后提出

$$\int_0^1 \cosh(as)\frac{\cos(b\sqrt{1-s^2})}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}J_0\left(\sqrt{b^2-a^2}\right),$$

它来自于 (4.47), 由此重新推得 Riemann 函数解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_0\left(\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}\right)v_0(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

验证, 如果定义当 $|k|\to\infty$ 时, $\sqrt{1+k^2}$ 趋于 k, 如果 $\mathrm{Re}k>0$, 趋于 $-k$, 如果 $\mathrm{Re}k<0$, 我们得到 (x,t) 的依赖区域, 包含点 $(\xi,0)$ 使得 $|\xi-x|>\tau$. 为什么这是不切实际的?

4.13. 假设在整个空间中,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在 $t=0$ 上, 有 $u=\partial u/\partial t=0$, 且 u 在无穷远处充分快地衰减, 对

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla u\cdot\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

分部积分. 证明能量

$$\frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为零, 所以 Cauchy 问题 (4.55) 与 (4.57) 有唯一解.

4.14. 证明, 如果

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 对\ 0<x,y<\pi,$$

在 $x=0,\pi$ 和 $y=0,\pi$ 上, 有 $u=0$, 及在 $t=0$ 上, $u=0$ 和 $\partial u/\partial t=1$, 则

$$u=\frac{16}{\pi^2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x\sin(2n+1)y\sin\left(t\sqrt{(2m+1)^2+(2n+1)^2}\right)}{(2m+1)(2n+1)\sqrt{(2m+1)^2+(2n+1)^2}}.$$

同时证明, 如果在由 $y=0$, $x=\pi$ 和 $x=y$ 为边界组成的三角形中边界条件为 $u=0$, 则存在一个正式解

$$u=\sum a_{nm}(\sin nx\sin my-\sin mx\sin ny)\sin\left(t\sqrt{n^2+m^2}\right).$$

4.15. 证明, 如果 $u(x,y,t)$ 满足与习题 4.14 第一部分相同的方程和边界条件, 并且如果

$$u(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}\sin mx\sin ny,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}b_{mn}\sin mx\sin ny,$$

则其 Laplace 变换为

$$\widetilde{u}(x,y,p)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{pa_{mn}+b_{mn}}{p^2+m^2+n^2}\sin mx\sin ny.$$

因此, 重新得到了习题 4.14 的解.

*4.16. 假设 $\boldsymbol{u}$ 满足弹性方程 (4.73) 且具有形式

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{Re}((u_1(x,y),u_2(x,y),0)^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\quad 对\ y<0.$$

并假设在 $y=0$ 上,

$$\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=2\mu\frac{\partial u_2}{\partial y}+\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0,$$

这对应于半空间 (例如地球) 的无牵引边界. 注意到, 如果 $\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y-\omega t)}$ 为 (4.73) 的一个解, (k_1,k_2,ω) 落在法锥 $k_1^2+k_2^2=\omega^2/c^2$ 内, 利用 (4.75) 验证, 对任意常数 A 和 B,

$$u_1=kA\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+y\sqrt{k^2-\omega^2/c_p^2}},\quad u_2=-\mathrm{i}A\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_p^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+y\sqrt{k^2-\omega^2/c_p^2}}$$

及

$$u_1=\mathrm{i}B\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_s^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+y\sqrt{k^2-\omega^2/c_s^2}},\quad u_2=kB\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx+y\sqrt{k^2-\omega^2/c_s^2}}$$

都为 (4.73) 的候选解. 进一步证明如果 $k=\omega/c$, 边界条件也是满足的, 其中

$$\left(2-\frac{c^2}{c_s^2}\right)^2-4\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{c_s^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{c_p^2}\right)}=0.$$

(可以证明, 这个方程在 $c_p > c_s > c$ 中有一个根, 它对应于测震学中著名的 Rayleigh 波.)

$*4.17.$ 根据 Maxwell 方程, 在非均匀介质中, 静磁场 $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{H}) = 0, \quad \nabla \wedge \boldsymbol{H} = \mathbf{0},$$

其中 μ 为位置的函数. 假设交界面 $z=0$ 将 $\mu = \mu_+ =$ 常数的介质与 $\mu = \mu_- =$ 常数的介质分离. 利用 Green 公式和 Stokes 公式证明弱解满足

$$[\mu H_3]_{z=0-}^{z=0+} = 0, \quad [H_1]_{z=0-}^{z=0+} = [H_2]_{z=0-}^{z=0+} = 0.$$

$*4.18.$ 考虑均匀电导介质中的时变电磁场, 其中 Ohm 定律 $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ 将电流密度和电场联系在一起, 这里 σ 为电导率, 假设没有电荷密度. 证明

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = c^2 \nabla^2 \boldsymbol{E},$$

其中 $c^2 = 1/(\varepsilon\mu)$. 从而证明, 如果 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x,t)$, 其分量可以由电报方程的解找到.

$*4.19.$ 由第 2 章所示, 如果法锥是 $Q(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots) = 0$, 其中 $\xi_i = \partial\varphi/\partial x_i$ 是 (波前) 特征线 $\varphi =$ 常数的法向分量, 由 $\sum_i x_i \xi_i = 0$ 给出射线锥, 其中 $x_i = \mu \partial Q/\partial \xi_i$. 取 $x_0 = t$, $x_1 = x$ 和 $x_2 = y$, 证明, 如果法锥为

(i) $a\xi_1 + b\xi_2 - \xi_0 = 0$,

(ii) $\dfrac{\xi_1^2}{a^2} + \dfrac{\xi_2^2}{b^2} - \xi_0^2 = 0$,

(iii) $\xi_1\xi_2 - \xi_0^2 = 0$,

则射线锥为

(i) $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = -t$,

(ii) $a^2x^2 + b^2y^2 = t^2$,

(iii) $4xy = t^2$.

在每一个情形下引入典型截面 $\xi_0 =$ 常数, $t =$ 常数, 包括 (ii) 中的 $a = b = \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ 的情形. 利用上面的结果, 将法锥的 $\xi_0 =$ 常数的截面上的一个点的局部几何和射线锥的 $t =$ 常数的截面几何联系起来, 从而证明图 4.11.

4.20. 假设

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

证明, 如果 $u(x,y) = v(p,q)$, 其中 $p = \partial u/\partial x$ 和 $q = \partial u/\partial y$, 则

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial q^2}, \quad \text{只要 } \frac{\partial p}{\partial x} \neq \frac{\partial p}{\partial y}.$$

4.21. (i) 按照 (4.13), 通过在极坐标系下的恒等式

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\psi\nabla^2(\log r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(\log r)(\nabla^2\psi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

在二维中定义 $\nabla^2\log r$. 通过证明

$$\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\infty}\psi\nabla^2(\log r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left(\psi\bigg|_{r=\varepsilon}+\varepsilon\log\varepsilon\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon}\right)\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\infty}(\log r)(\nabla^2\psi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

(注意法向和围道的方向!) 并取极限 $\varepsilon\to 0$, 证明

$$\nabla^2(\log r)=2\pi\delta(x)\delta(y).$$

(ii) 证明, 如果在 $x<0$ 和 $y<0$ 中 $u=0$ 且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\delta(x)\delta(y),$$

则 $u=H(x)H(y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\delta(x)\delta(y)$$

是否在 $x<0$ 和 $y<0$ 处为零?

*4.22. 弹性线的位移 $u(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\quad 对\ -\infty<x<\infty.$$

证明, 如果 $u(x,0)=0$ 且 $\partial u/\partial t(x,0)$ 在除 $|x|<\varepsilon$ 外也为零, 其中 v_0 为常数, 则在 $\varepsilon-t<x<-\varepsilon+t$, $t>\varepsilon$ 中 $u=\varepsilon v_0$. 取适当的极限, 证明当 $u(x,0)=0$ 和 $\partial u/\partial t(x,0)=2\delta(x)$ 时, 对于这种形式的波动方程, $u(x,-t)$ 在区域 $t<0$ 且 $(\xi,\eta)=(0,0)$ 中是 Riemann 函数. (定义这个 Riemann 函数满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\delta(x)\delta(t);$$

如同习题 4.2, 因为方程不是标准型, 引入因素 2.) 同样证明, 如果 $u(x,0)=\delta(x)$ 且 $\partial u/\partial t(x,0)=0$, 则

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\delta(x+t)+\delta(x-t)).$$

第 5 章　椭圆型方程

与通常一样, 这一章我们从讨论椭圆型方程建模的实际情形开始, 椭圆方程在第 3 章只是被泛泛地定义, 大部分例子都是二阶标量方程, 有些是特殊情形, 如第 4 和第 6 章中讨论的发展方程的稳恒状态.

由于不具有双曲型方程 Cauchy 问题的适定性, 所以在后面对这些模型的分析中所采用的方法较双曲型方程中使用的更特殊. 另外, 数据对椭圆型方程的影响不像双曲型方程具有局部性和 "一致性", 特别是边界数据的奇性, 我们知道双曲型方程里面许多奇性只沿特征线传播. 这就是为什么这一章要比前面的章节冗长得多的缘故; 然而, 我们要介绍的最强有力的工具是 Green 函数以及特征函数展开, 其中 Green 函数与第 4 章的 Riemann 函数类似. 鉴于第 4 章的大部分实例都围绕波动方程, 这里主要是 Laplace 方程.

椭圆型方程的应用范围非常广, 这一点从下面几节由万有引力、电磁场、力学、热传导、化学反应以及声学中产生的模型来看是很明显的.

5.1 模　型

5.1.1 万有引力

应用数学历史上一些最著名的模型都可以归结为椭圆型方程, 其中最著名的可能是牛顿万有引力模型. 它是基于这样一个事实, 即质点间的相互吸引沿它们的连线, 且吸引力与它们之间距离的平方成反比. 因此, 通过适当的归一化, 单位质量质点的引力场 (马上会与 Green 函数联系起来) 在球极坐标下是势能函数

$$\phi = \frac{1}{r} \tag{5.1}$$

的梯度; 其中 ϕ 在相差一个常数下是唯一的. 对质量分布求和, 可知密度分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的势能为

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \iiint \rho(\boldsymbol{x}') \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}, \tag{5.2}$$

通过简单计算可证明, 在无源的情形下, ϕ 满足著名的 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{5.3}$$

满足上述方程的函数称为*调和函数*. 然而不易证明, 在有源的情形下, ϕ 满足 Poisson *方程*

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho. \tag{5.4}$$

最初等的方法是在绕 $\boldsymbol{x}$ 的小球内考虑积分 (5.2), 对它进行 Laplace 变换, 并用 Green 公式, 我们将在 5.5 节更为详细地介绍.

照这么说, 引力场理论在微分方程中似乎不是问题, 因为 Poisson 方程 (5.4) 的解就是 (5.2). 但是, 通常情况下这个公式计算起来是十分繁琐的, 我们将看到这个偏微分方程模型具有极大的价值.

5.1.2　电磁场

历史几乎同样悠久的是静电场和静磁场模型, 它可以直接从 4.7.2 节推导得到. 在没有电荷 ρ, 电流密度 $\boldsymbol{j}$ 以及稳态 $\partial/\partial t = 0$ 的情况下, 有

$$\nabla \wedge \boldsymbol{H} = \nabla \wedge \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}. \tag{5.5}$$

因此, 磁场和电场都是势函数的梯度, 与 (5.2) 一样, 在相差一个常数下是唯一的, 但是它们都满足 Laplace 方程, 因为由 (4.83) 和 (4.84), $\nabla\cdot\boldsymbol{H} = \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$. 现在我们对这个偏微分方程模型了解得更加清晰, 因为可以把电磁场描述为起源于边界或者是无穷远处, 在此处 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足一定的条件. 我们在这里不给出这些条件, 值得一提的是, 在求导电性很好的导体外的电场问题时, 需要满足导体上电势 ϕ 必须处处相等, 其中 $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$. 导体上的电荷被限制在导体表面附近很薄的一层里, 其密度与外法向导数 $\partial\phi/\partial n$ 成比例, 这个事实可以推断如下, 重新加上电荷密度 ρ, 使得 $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon$, 其中 ε 是介电常数, 然后通过 (5.2) 得到. 在设计避雷针时, 需要解一个 Laplace 方程, 其中 ϕ 在导体上为常数, 并且计算在哪个地方 $\partial\phi/\partial n$ 最大, 因为这是闪电攻击的地方.

实际上, 生活中很多时候都会涉及细长直电线上的电荷分布, 容易看出, 在平面极坐标系中, 这种情况下的电势与 $\log r$ 成比例. 当远离电线时, 电场, 而非电势, 会递减为 0, 这点与电势 (5.1) 不同, 因为这种情况下当远离点电荷时, 电势会递减.

更一般地, 我们需要建立电流流经导体时的模型. 如果电流是稳恒的, 可以使用 Ohm *定律*

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}, \tag{5.6}$$

其中 $\sigma > 0$ 是电导率, 为了简单起见把它取成常数. 当我们把这个式子与 Maxwell 方程 (5.5) 结合起来, 就得到 $\boldsymbol{j} = -\sigma\nabla\phi$, 其中 ϕ 仍满足 $\nabla^2\phi = 0$. 注意到, 如果我们需要求磁场, 则需要解方程

$$\nabla \wedge \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0; \tag{5.7}$$

我们可以通过对第一个方程求旋度后得到一个 Poisson 方程的向量形式, 但是 (5.7) 本身至今仍然是个关于 $\boldsymbol{H}$ 的未分类方程, 这一点我们会在第 9 章中做介绍.

还有许许多多其他有趣的情形是与 Maxwell 方程和 Ohm 定律有关的, 但限于篇幅我们不能详细介绍. 例如, 当描述电流在导线中流动时, 模型可以简化为常微分方程, 电流在金属薄片流动时, 模型可以简化为二维偏微分方程.

5.1.3 热传导

我们将采用这个更为熟悉的规律来介绍具体的椭圆型方程问题. 考虑温度为 $T(\boldsymbol{x})$, 体热源为 $f(\boldsymbol{x})$ 的介质 D 中的热传导问题, 比如电炉、微波炉中食物的加热过程或者地核的放射性衰变过程. Fourier 热传导定律表明, 如同 (5.6), 热流量

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T, \tag{5.8}$$

其中 $k > 0$ 是热传导系数. 因此, 根据能量守恒定律, 在稳恒状态下, 对于介质内的任意区域 D, 有

$$\iint_{\partial D} -k\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}S = -\iiint_D \nabla \cdot (k\nabla T)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_D f\mathrm{d}\boldsymbol{x}; \tag{5.9}$$

这里 $\partial/\partial n$ 仍表示边界 ∂D 的外法向导数. 因为对导体内的任意区域上式都成立, 当 k 是常数时, 我们又得到 Poisson 方程

$$k\nabla^2 T = -f(\boldsymbol{x}). \tag{5.10}$$

我们总会得到 T 的边值问题, 通常有三种情形.

Dirichlet 问题

假设边界是个导热性极好的热导体 (例如金属), 那么边界上的温度可看成是个常量, 或者至少可以用一个已知的关于位置的函数来描述:

$$T = -T_0(\boldsymbol{x}) \quad 在\ \partial D\ 上. \tag{5.11}$$

Neumann 问题

假设区域 D 外是个导热性很差的导体, 比如空气, 那么边界上沿法向的热流量是 0, 或者更一般地, 它是一个已知函数

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = q(\boldsymbol{x}) \quad 在\ \partial D\ 上. \tag{5.12}$$

Robin 问题

当边界上的热流量和边界与介质周围的温度之差成比例时, 就产生了 Robin 问题. 当介质 D (比如你的皮肤) 处于一个温度为 $T_0(\boldsymbol{x})$ 的相对热 (或冷) 的流体环境

中, 在边界的一层薄膜上会发生热传导. 根据实验规律和理论, 有

$$-k\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_0(\boldsymbol{x})) \quad 在\ \partial D\ 上, \tag{5.13}$$

其中 h 称为 *热交换系数*. 在热动力学里要求 $h \geqslant 0$, 这样就能保证热量从温度高的地方向温度低的地方流动.

从物理上来看 (5.12) 是值得怀疑的, 这是因为, 假设区域 D 有界, 不可能在 ∂D 上指定热流量的同时又保证导体处于稳恒状态, 其中 T 与时间无关. 我们可以在数学上对此加以量化, 对 (5.10) 在区域 D 上积分, 利用 Green 公式有

$$\iiint_D 1 \cdot f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \iint_{\partial D} 1 \cdot q\mathrm{d}S = 0. \tag{5.14}$$

这里我们加入了因子 "1" 是为了表明它只不过是 Fredholm 二择性定理的一种简单形式; Neumann 问题的 "右端" 与 f 和 q 有关, 而且它必须与相关的特征函数 "正交", 在这里特征函数是常数. 另外, 当 (5.14) 满足时, 即使 T 存在, 它在可以相差一个特征函数的情况下也不是唯一确定的. 我们将会看到, 如果 (5.13) 中 $h > 0$, 这种不存在性/不唯一性就不会发生了.

还有许多关于 Laplace 方程和 Poisson 方程的变体形式和应用, 我们这里只是简单地列举三种情况. 第一, 因为分子扩散的 Fick 原理, 即质量流量与浓度的梯度成比例, 在数学上与 Fourier 热传导定律一样, 那么在数学上导体的热传导和扩散的质量转移也是一致的[53]. 第二, 在很多情况下热传导与质量转移是耦合的, 比如说在许多常见的化学反应中. 我们将在第 6 章中对它们进行详细讨论, 到现在为止我们只知道, 如果区域内的源项是 T 的函数 (可能是非线性), 那么稳态反应中的温度可以用解耦的热模型 (5.10) 来刻画, 其中源函数表示反应区域附近所产生的热量, 它的正负取决于该反应是放热还是吸热. 最后, 考虑对流和辐射热传导问题与传导问题同样重要. 对流较为简单, 因为只需要在 (5.9) 中添加一项 $\rho c \iiint \boldsymbol{v} \cdot \nabla T$, 其中 $\boldsymbol{v}$ 表示速度, ρ 表示密度, c 是比热[54]. 这样我们就得到了 *对流 - 扩散椭圆型方程*

$$\rho c \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = k\nabla^2 T + f(\boldsymbol{x}), \tag{5.15}$$

如果幸运的话, $\boldsymbol{v}$ 可以通过其他动力学模型独立给出. 动力学模型和热传导通常是耦合在一起的.

相反, 在第 6 章中我们将看到, 辐射热传导的模型很难得到, 一种简单的情况就是 "黑体" 从边界辐射, 并且内部所有的传热都是只通过传导进行. 在实验和理

53 实际上, 它们都是基于 Brown 运动的微观模型, 我们将在 6.1 节中做进一步介绍.

54 当介质是气体的时候要注意对比热的定义, 还要加上因气体压缩所做的功.

论的基础上, 我们可以得到 Stefan-Bolzmann 定律

$$q(\boldsymbol{x}) = \varepsilon(T^4 - T_0^4), \tag{5.16}$$

这里 T_0 仍表示介质周围温度 (在绝对温度下), ε 是个常量, 称为*放射率* (见 [41] 及 6.6.1.2 节). 注意到当 T 接近于 T_0 时, (5.16) 可以用 (5.13) 来逼近, 其中 $h = 4\varepsilon T_0^3$.

关于这些可能来自化学反应或者辐射模型的非线性问题的讨论, 我们都把它们放在这一章的末尾.

5.1.4 力学

5.1.4.1 无黏性流体

连续介质力学里也有很多问题可以归结为椭圆型方程, 其中最为熟悉的是无黏不可压缩流体力学[27]. 流体不可压缩意味着速度场 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ 满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{5.17}$$

要证明许多无黏性流体可以用下面条件来逼近是个很繁琐的过程, 即*旋度* $\nabla \wedge \boldsymbol{v}$ 满足

$$\nabla \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

这样, $\boldsymbol{v}$ 就是某个势函数 ϕ 的梯度. 我们将在第 9 章中进一步讨论这个问题, 此处我们暂且假定 ϕ 存在, 尽管可以相差关于时间的任意一个函数, 从 (5.17) 可知它是调和的. 典型的边界条件是齐次 Neumann 条件, 这是因为相对速度与静止不渗透边界相切[55], 这个条件是有现实依据的, 因为对于这些无黏流体来说, 我们只有 Laplace 方程可解, 所以我们在一个障碍物外的无界区域内求解 Neumann 问题. 更为有趣的一个模型是*涡流*, 比如说, 在清空浴缸里的水的时候可能出现这种情况. 在这里, 我们寻找一种二维流动, 它的速度是 "方位角" 的, 也就是说, 在极坐标 (r, θ) 情形下, 当我们沿 θ 方向越来越靠近涡流的中心 $r = 0$ 时, 速度越来越快. 仔细观察 (5.3) 会发现实际上只有一个解是与 θ 成比例的. 另外, 我们也注意到, 这种流动提供了以原点为中心的圆环的齐次 Neumann 边界条件问题的一个多值、非常数解, 它也提醒我们, 区域 D 的连通性在讨论椭圆型方程解的唯一性时是非常重要的.

5.1.4.2 薄膜

对 Laplace 方程解进行可视化的最简单方法是观察薄膜的形状, 比如鼓, 它的边界向平面外有点变形. 如皂膜一样, 薄膜可以支撑大小为 T 的压力, 其中 T 是各向同性的. 由法向上的受力平衡, 我们知道位移 w 满足方程 $\partial^2 w/\partial t^2 = a_0^2 \nabla^2 w$, 其

55 这与 1.1 节的油漆流相反, 注意那里油漆是粘附在壁上的.

中 $a_0^2 = T/\rho$, ρ 是薄膜的表面密度; 这是因为平面外的压力总和为 T 乘以小平均曲率 (大约为 $\nabla^2 w$). (在一维情况下, 这个模型简化为弹性细绳上的波动, 这是我们所熟悉的波动方程 (4.1)). 因此, 平衡位移实际上是一个给定 Dirichlet 边界的二维调和函数, 假定边界已知且几乎平坦. 另外, 在薄膜上加上压力差 p, 就可以看到右端为 p 的 Poisson 方程的解的形状.

5.1.4.3　扭转

另外一个二维 Laplace 方程的模型是在线性弹性力学里面产生的, 虽然它不如其他出名, 但是还是很重要的. 扭力杆用于机动车悬架, 其最简单的构架就是金属圆筒, 它不受压力, 除了在金属圆筒的两端受大小相等方向相反的扭矩. 我们避开弹性理论中的张量公式, 而是假定在扭力杆的任何截面, 沿 z 方向的位移是刚体转动, 它随着 z 线性变化 (如图 5.1).

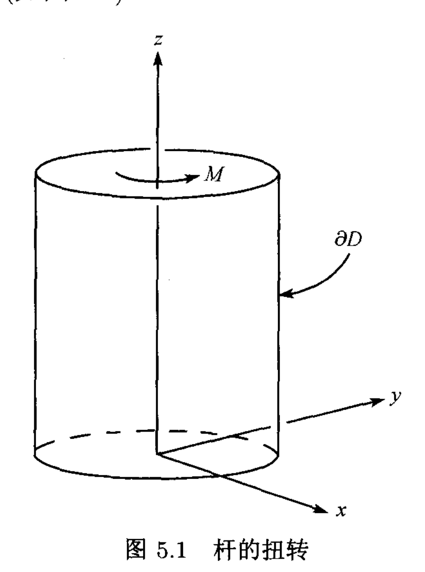


图 5.1　杆的扭转

因此, 位移可写成

$$\boldsymbol{u} = \alpha(-yz, xz, w(x,y)), \tag{5.18}$$

其中 α 是个常数, 表示扭杆所受的扭曲[56]. 因为这个向量的散度为 0, 这表明物体只受剪切力, 没有压缩或膨胀. 因此, 从 4.7 节的 (4.73) 式, 即平衡的时候 $\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$, 我们得到

$$\nabla^2 w = 0. \tag{5.19}$$

扭杆的显著特征是杆的每一个截面边界 ∂D 上的剪切力为 0. x 与 y 方向上自然为 0, 因为截面上的位移是刚体位移, 而且轴向剪切力 (沿 z 轴) 也必须为 0. 利用 4.7

56 注意到明显违背直觉的事实是轴向 (在 z 方向上) 位移与 z 无关.

节开始所介绍的思想, 沿这个方向的位移对剪切力的贡献为

$$\mu\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},0\right)\cdot\boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 的外法向. 同时, $\boldsymbol{u}$ 的平面部分对剪切力的贡献是

$$\mu\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}(-yz),\frac{\partial}{\partial z}(xz),0\right)\cdot\boldsymbol{n},$$

所以总的来说我们得到 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial w}{\partial n}=(y,-x,0)\cdot\boldsymbol{n}\quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{5.20}$$

幸运的是, (5.14) 的正交性在这里自动满足.

最后, 我们必须给出拉力, 即作用于扭杆两端产生扭矩的应力. 在两端的剪切力包括两项

$$\mu\alpha(-y,x,0)+\mu\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},0\right),$$

所以在任何截面上作用于中心的力矩是

$$M=\mu\alpha\iint_D\left(x^2+y^2-y\frac{\partial w}{\partial x}+x\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{5.21}$$

扭转中的基本问题是求解 (5.19), 并且满足 (5.20) 和 (5.21), 来求得 M 与 α 之间的关系, 由此确定 "扭转刚度". 在许多情况下扭力杆是空心的, 所以我们必须注意到先前提到的情况, 即在多连通区域中解的不唯一性.

5.1.4.4 平面应变与低速黏性流体

继续上面的讨论, 假设杆的长度是无穷大, 它不再受扭力而是在边界上与轴垂直的方向受到压力. 这样我们得到 *平面应变*[57]

$$\boldsymbol{u}=(u(x,y),v(x,y),0), \tag{5.22}$$

这表明扭杆同时受到剪切力和张力/压力. 我们在 (4.73) 的右端需要这两项, 所以有

$$\mu\nabla^2u+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)=0,$$

$$\mu\nabla^2v+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)=0.$$

57 位移只有在 (x,y) 平面内是非零的. 另外一种情况是位移的形式为 $(0,0,w(x,y))$, 它称为 *反平面应变*, 很容易看出 $\nabla^2w=0$.

通过微分运算很容易看到, u, v 都满足 **双调和方程**[58]

$$\nabla^4 u = \nabla^4 v = 0, \tag{5.23}$$

其中

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

在实际中, 为了方便通常是建立应力模型 (见习题 5.1). 这对于我们了解双调和方程可能附加的边界条件是非常重要的, 另外我们注意到, 对于作用在 ∂D 的牵引力需要给定一个二维向量, 这个向量实际上是 u, v 导数的线性组合, 因此我们需要 "两倍" 的 Laplace 方程的边界数据.

二维低速黏性流也满足双调和方程. 假定一个完全二维流[59]的剪切黏性系数为 μ, 那么在不存在惯性的情况下, 由压力 p 所产生的作用力必须和剪切力平衡. 因此, 设速度 $\boldsymbol{v} \coloneqq (u, v)^{\mathrm{T}}$, 在 (4.73) 中令 $\lambda = 0$, 我们就得到模型

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} = \mu \begin{pmatrix} \nabla^2 u \\ \nabla^2 v \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

和流体的不可压缩性方程 (5.17),

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{5.25}$$

现在, 如这一章前面一样引入势函数, 在 (5.25) 中我们令 $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$, 其中 ψ 称为 *流函数*. 我们对 (5.24) 求旋度, 得知 u, v 和 ψ 都满足双调和方程 (p 只满足 Laplace 方程, 遗憾的是, 在实际情况中 p 的边界条件很难给定). 另外, 因为流体是黏性的, 所以我们希望在边界上给定 $\boldsymbol{v}$ 的值而非 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$; 因此我们又需要满足两个边界条件.

注意到, 如果低速黏性流体出现在多孔介质里, 比如糖块、海绵或者岩石, 最简单的模型就是用 Darcy *定律* 来描述速度和压力之间的关系. 这意味着我们不再使用模型 (5.24), 取而代之的是 Darcy 实验的观察结果, 在没有重力作用的情况下, 有

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \tag{5.26}$$

它与前面提到的 Fourier 定律、Fick 定律和 Ohm 定律类似; 其中 k 是个正常量, 称为渗透率, 它只与细孔的大小有关. 但是, 有一个非常重要的问题, 那就是 $\boldsymbol{v}$ 在这种复杂的结构中到底是什么意思, 我们必须注意到流体并没有占据整个空间. 虽然如

58 虽然双调和方程是四阶方程, 它的解和二阶椭圆型方程非常类似; 如果我们把它写成一阶方程组的形式, 按照 3.3 节, 3.4 节的定义, 它的确是椭圆型方程.

59 并非是 1.1 节所介绍的如油漆流的拟一维流.

此, 如果我们把 $\boldsymbol{v}$ 看成是所测量的质量流量, 对不可压缩流体仍可以得到 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$, 这样这个问题又归结为一个 Laplace 方程. 一般来说, 随着问题几何形状的复杂性, 分析上的复杂性显然会加剧.

上述这些例子需要很多流体力学和固体力学之间的 “技术转移”.

5.1.5 声学

声音是流体或固体[60]内的小振幅传播, 现实中没有比声学更好的模型来阐明椭圆型方程的微妙之处. 在这里我们只考虑在所谓的 *频域* 内声音在流体里的传播, 并且假定声场是由固定频率 ω 的扬声器产生的. 这样, 在最简单的情况下, 我们在波动方程 $\partial^2\phi/\partial t^2=a_0^2\nabla^2\phi$ 中令 $\phi=\mathrm{Re}(u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$, 得到

$$(\nabla^2+k^2)u=0, \tag{5.27}$$

其中 $k=\omega/a_0$; (5.27) 就是著名的 Helmholtz *方程*[61]. 与之相似的一个模型是

$$(\nabla^2-k^2)u=0, \tag{5.28}$$

称为 *修正 Helmholtz 方程*, 以后我们会对它的数学性质进行研究, 那时你就会发现它与声学毫不相干. 然而, (5.27) 和 (5.28) 在化学反应中是互相联系的, 这是因为, 如果热源与温度成比例, 那么在放热和吸热两种情况下, (5.10) 就分别转化成 (5.27) 和 (5.28).

另外, 一个物理上的原因也会让我们预期 (5.27) 和 (5.28) 的解的性质完全不同. 假定我们有 (5.11)~(5.13) 中的任意一个边界条件, 而外力为 0. 在这些齐次边界条件下, $u=0$ 是问题的一个解, 那么它是唯一解吗? 我们可以预期一个声音共振器, 它的模型是 (5.27), 按照自己的步调振动; 也就是说, 方程可能存在特征函数, 而且可能不止一个. 我们将看到, 通过 Green 公式可知 (5.28) 只有零解, 而 (5.27) 并没有这个唯一性. 当然, 经验告诉我们只有在某个 “特征频率” $\omega=\omega_i$ 时才有可能是非零解, 但也并非总是正确. 我们在研究这个问题时难免会涉及一些有关椭圆微分算子的特征函数理论, 在这一章我们只需要一些初步的东西.

这里要做另一个重要注释, 它涉及频域范围内的声学, 还涉及区域可能是无穷的模型. 既然这个模型描述的是波动, 我们希望它能够区分波到底是 “进入的” 还是 “离开的”; 这就意味着相对 Laplace 方程而言, 在无穷大区域中, Helmholtz 方程在无穷远处需要更为精确的条件.

---

60 在固体中我们通常得到的是向量型椭圆型方程, 在频域内它与 Maxwell 方程极其类似.

61 ϕ 依赖于时间的复数形式意味着对 Helmholtz 方程的实数解作复组合, 另外选择 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 而非 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 是为了使以后的公式简化.

5.1.6 机翼理论与断裂

在这一节的末尾我们举两个例子, 着重强调在椭圆型方程解的可能出现的任何局部奇异性都具有整体的重要性. 考虑一个 Laplace 方程的 Dirichlet 问题, 在平面极坐标开扇形

$$0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

中

$$\nabla^2 u = 0,$$

边界上 $u = 0$. 如果我们硬是要求在区域拐角 u 有界, 那么唯一的解便是 $u = 0$. 然而容易验证, 除了在原点有界这个条件,

$$u \propto \left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

满足所有的条件. 因此, 在边界一个点上的奇异性导致这种奇异性随处都是. 这种奇异性也可能发生在前面提到的情况中, 但这里我们只介绍两个显著的例子, 它们可能较其他来说在日常生活中有更重要的技术意义.

5.1.6.1 机翼

在 5.1.4.1 节中, 我们曾经断言在无漩流中, 比如风洞, 不透水障碍物的边界条件就是速度势函数的 Neumann 边界条件, 其中速度满足 Laplace 方程. 另外, 我们知道机翼后缘是尖的, 即 ∂D 不是光滑的. 有关这种情况的流体力学原理太复杂, 这里就不加以介绍了 [29], 但有一种简单情形可以较为真实地模拟出来. 假定一个二维机翼的几何形状是 $y = f_{\pm}(x)$, $0 < x < c$, 它非常细并且几乎与流体成一直线, 所以和 $y = 0$, $0 < x < c$ 非常相近, 另外, 流体沿 x 轴方向的速度是 U (如图 5.2). 如线性化模型 (3.11) 和 (4.70) 一样, ϕ 近似等于 Ux, 令 $\phi = Ux + \widetilde{\phi}$ 得到

$$\nabla^2 \widetilde{\phi} = 0, \quad |\nabla \widetilde{\phi}| \to 0 \quad 当\ |\boldsymbol{x}| \to \infty\ 时, \tag{5.29}$$

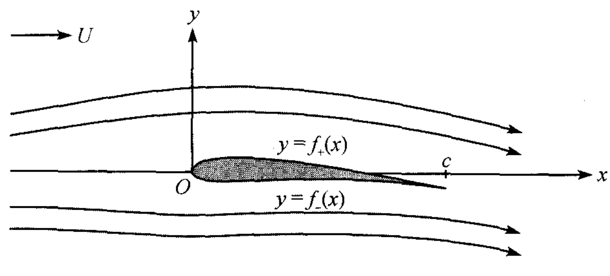


图 5.2 气流通过机翼

以后我们将看到, 如果要解释飞行理论必须比 (5.29) 更加仔细地讨论在无穷远处的衰减速度. 最后, 切向流的精确条件, 也就是在机翼 $y = f_{\pm}(x)$ 上, $\partial\phi/\partial y = f'_{\pm}(x)\partial\phi/\partial x$ 可以用

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} = Uf'_{\pm}(x) \quad 在\ y = \pm 0,\ 0 < x < c\ 上 \tag{5.30}$$

来代替. 这样我们最终得到一个多连通区域内的调和函数的边值问题; 我们可以把在 x 轴 $0 < x < c$ 上的不连续点看成是一条奇异线, 另外, 可以预期机翼前缘和后缘, 即 $(0,0)$, $(0,c)$ 的极端奇异性. 椭圆型方程的一个重要问题就是怎样解决这些奇点, 这对于我们理解飞行理论也是至关重要的.

5.1.6.2 脆性断裂

最后一个例子是弹性体的断裂模型. 图 5.3(a) 所示是在 y 方向压力的情况下, 发生平面应变的材料内的一个裂缝 $y = 0$, $-c < x < c$. 我们将讨论一个在反平面应变里面可能出现的比较简单的裂缝, 它的位移场是 $\boldsymbol{u} = (0, 0, w(x, y))$, 其中 w 是调和函数. 因为裂缝表面不受拉力, 所以在上部和下部

$$\frac{\partial w}{\partial y} \to 0 \quad 当\ y \to 0,\ -c < x < c\ 时, \tag{5.31}$$

所以问题还是可以用图 5.3(a) 表示. 另外, 假设对称性, 即

$$w = 0 \quad 在\ y = 0,\ |x| > c\ 上. \tag{5.32}$$

最后, 假设裂缝在无穷远处受均匀剪切力

$$w \to \tau y \quad 当\ |y| \to \infty\ 时, \tag{5.33}$$

其中 τ 是个常量.

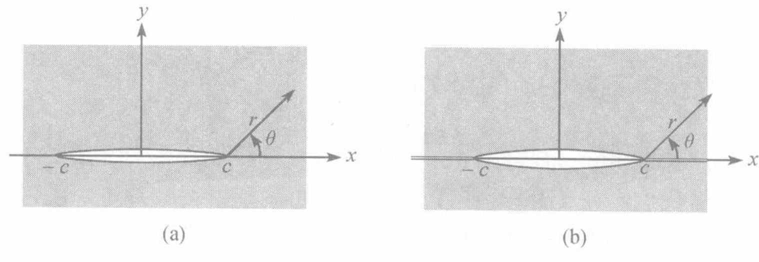


图 5.3　(a) 未受腐蚀材料的脆性断裂; (b) 部分张开的原先即存在的裂缝

由于关于 $y = 0$ 对称, 我们只需在半平面内求解即可, 这与机翼模型 (5.30) 相反, 那里我们需要在机翼外部的双连通区域内找一个调和函数 (除非机翼对称, 并且 $f_+ = f_-$).

边界条件 (5.31) 和 (5.32) 是 **混合边值问题** 的一种, 部分为 Neumann 边界条件, 部分为 Dirichlet 边界条件. 这个变化也会导致裂缝末端产生奇性, 我们可以在局部极坐标系 (r,θ) 下采用变量分离法 (比如 $x=c$, $y=0$ 附近), 就会发现这种奇性. 只要

$$\lambda = n + \frac{1}{2},$$

函数 $r^{\lambda}\sin\lambda\theta$ 就是一个局部 "特征解", 其中 n 是整数. 这是因为只有当 λ 这样取值的时候, 才有当 $\theta=0$ 时 $w=0$, 当 $\theta=\pi$ 时 $\partial w/\partial\theta=0$. 如机翼理论一样, 我们将看到这种 "奇异性态" 在对数学模型的预测中有很深远的意义. 这时, 也许有人要问, 裂缝模型和所谓的 "接触" 区域模型有什么区别? 实际上, 如图 5.3(b) 如果两厚板被叠放在一起, 每块板在 $-c<x<c$ 都有轻微裂口, 这就是第二种模型; 数学上怎样把它同图 5.3(a) 的情况加以区别呢?

有了这些例子作为铺垫, 我们就可以开始讨论椭圆型偏微分方程的一般理论了. 我们将详细介绍 Laplace 方程以及数据中出现奇性所产生的结果, 大部分的讨论是基于二维模型的. 当然许多理论都可以容易地推广到高维的情况, 有时也可以推广到高阶和向量型方程.

5.2　适定的边界数据

5.2.1　Laplace 方程和 Poisson 方程

一开始我们重复第 4 章的步骤, 作变量替换 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$, 得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}=0,$$

注意到 u 是一个关于 z 的函数和一个关于 $\overline{z}$ 的函数的和. 所以满足 Cauchy 问题, 比如给定 $u(x,0)$ 和 $\partial u/\partial y(x,0)$ 的解可以用 d'Alembert 公式 (4.38) 表示

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(u(z,0)+u(\overline{z},0))+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\overline{z}}^{z}\frac{\partial u}{\partial y}(\xi,0)\mathrm{d}\xi, \tag{5.34}$$

但从对 Cauchy-Riemann 方程组和解析延拓的讨论我们已经知道这个问题是不适定的. 看到这里我们会松一口气, 因为从 5.1 节的模型中得知, 如果 Laplace 方程的适定性要求 Cauchy 数据是解析的那该多么可怕.

重新考虑 Poisson 方程

$$\nabla^2 u = f(x,y). \tag{5.35}$$

它由 5.1 节中的模型导出, 我们在一个有界闭区域 D 中考虑这个方程, 但只有单个边界条件, 不像 (5.34) 需要 Cauchy 数据. 所有可能出现的线性条件都包括在 Robin

条件中

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=g \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}, \tag{5.36}$$

其中 α, β 和 g 都是给定的位置函数, $\partial/\partial n$ 表示外法向导数; 通过 (5.13) 我们希望 α 与 β 同号. 我们大可不必担心因边界条件个数减少会使解的自由度过大, 因为下面的定理保证了这种事情不会发生.

唯一性定理 假设 u 在有界区域 D 内满足 $\nabla^2 u=f$, 其中区域边界 ∂D 光滑, 并且在 ∂D 上 $\alpha u+\beta\partial u/\partial n=g$. 如果 $\alpha\neq 0$ 且 $\beta/\alpha\geqslant 0$, 那么, 如果方程有解, 则这个解是唯一的.

一种简单的证明方法是在区域 D 上使用 Green 公式

$$\iint_D \nabla\cdot(U\nabla U)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}U\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}s, \tag{5.37}$$

其中 U 是 (5.35), (5.36) 的两个解之差. 因为 α 不为零, 所以有

$$\iint_D |\nabla U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\partial D}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}s; \tag{5.38}$$

考虑到这个方程两边的符号, 我们注意到方程两边必须均为 0, 因此 $|\nabla U|=0$ 在 D 中几乎处处成立. 这表明 U 是个常量 (在几乎处处的意义下), 再由边界条件就得知 $U=0$[62]. 虽然我们仅对二维问题进行了叙述, 这个定理对高维的情况同样成立.

作为一个推论, 考虑 $\alpha=0$ 的情况, 注意到

$$\iint_D |\nabla U|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以 u (如果存在的话) 的解不唯一, 它们之间差一个任意常数. 因此, 在 5.1.4.3 节扭杆问题中, w 在相差一个常量下才是确定的, 这正好意味着可以沿转轴移动扭杆. 同样有例子表明, 如果在 ∂D 上 $\beta\neq 0$ 并且 α/β 变号, 或者是 $\alpha/\beta<0$, 那么唯一性也无法保证 (见习题 5.4). 在 (5.13) 中当热流从低温向高温流动时会出现后一种情况. 另外, 当 $\alpha=0$ 时, 从 Green 公式可以看出, 只有当

$$\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}\frac{g}{\beta}\mathrm{d}s, \tag{5.39}$$

方程才有解.

唯一性定理和它的推论都要求 ∂D 和数据是适当光滑的. 我们回想起在 5.1.6 节开始时介绍的例子, 即使 Dirichlet 数据在 ∂D 除一点外都给定, 唯一一点处的奇性

62 我们不排除 U 在一个零测集上不为零的情况, 但此时 U 在这个零测集上未必满足 Laplace 方程, 在这本书中我们不讨论这种 "异常现象".

导致区域 D 内存在非零解. 这种情况在 ∂D 光滑或非光滑的时候都可能产生, 所以在本章后面会引起很多麻烦.

这些结果对于研究带 Robin 边界条件的常微分方程两点边值问题的专家来说毫不奇怪, 但是除了我们已经提及的奇性问题, 我们还要考虑到区域 D 可能不是单连通这个问题. 我们用下面这种经常使用的办法来求解扭杆问题 (5.19)~(5.21). 相对 Neumann 问题而言, Dirichlet 问题在计算和理论上有很大的优势, 所以我们引进其调和共轭函数 ψ, 通过简单计算知道它满足 Dirichlet 问题

$$\nabla^2\psi = 0,$$

其中零应力条件 (5.20) 要求

$$\psi - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \text{常数} \quad \text{在 } \partial D \text{ 上},$$

当 D 是单连通的时候这个常数是任意的. 如果我们把常数取成零, 并且令[63] $\psi = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+\widetilde{\psi}$, 在计算上会变得更简单, 这样就有

$$\nabla^2\widetilde{\psi} = -2, \quad \text{其中} \quad \widetilde{\psi} = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}. \tag{5.40}$$

现在, 如果 D 是个环状区域, 这在实际中经常出现, $\widetilde{\psi}$ 在环状区域边界的不同部分是不同常数, 但这些常数之间到底有什么差异呢? 如果无法知道, 我们也无法保证 Dirichlet 问题的适定性. 问题的答案在于这样一个事实, 那就是, 当我们把物理变量 w 转化成应力函数 ψ 的时候引进了一个不确定量, 所以我们必须注意, 最后通过 Cauchy-Riemann 方程从 ψ 求得 w 的时候, 我们得到的是一个物理上可行的位移. 在这种情况下 w 是个多值函数, 除非

$$\int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial s} = -\int_{\partial D} \frac{\partial \psi}{\partial n}\mathrm{d}s$$

在环形区域的任何圆形闭曲线内为 0. 因此, 如果在任何这种闭曲线内

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial n}\mathrm{d}s + \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}s = 0, \tag{5.41}$$

(其中左边第一项在任何情况下都是常数, 且此常数与闭曲线无关), 那么 $\widetilde{\psi}$ 是唯一定义的.

这个运算揭示了采用诸如 ψ 或 $\widetilde{\psi}$ 之类 "势函数" 的时候经常出现的棘手难题: 它们通常在理论和计算上是有优势的, 但是它们的任意性 (或所谓的 "规范不变量") 需要时常警惕. 这个例子和 5.1.4.1 节的涡流告诉我们, 在多连通区域内考虑椭圆型方程的唯一性的时候必须多加小心.

63 $\widetilde{\psi}$ 称为 Prandtl 压力函数.

5.2.2 更一般的椭圆型方程

我们已经在模型简介那一节对 Helmholtz 方程的讨论中看到, 解的存在性和唯一性很大程度上依赖于椭圆型方程的系数. 因此, 我们这里就陈述 Laplace 方程和 Poisson 方程的一些理论, 对于其他方程, 可以利用前面的想法, 但是不一定行得通. 作为一个例子, 我们考虑双调和方程 $\nabla^4 u = 0$ 的 "Dirichlet 问题", 其中 u 以及 $\partial u/\partial n$ 在边界 ∂D 上给定. 唯一性问题可以通过考虑两个解的差 $w = u - v$, 它满足

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_D w\nabla^4 w \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (\nabla\cdot(w\nabla(\nabla^2 w)) - \nabla w\cdot\nabla(\nabla^2 w))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint_D (\nabla\cdot(\nabla^2 w\nabla w) - (\nabla^2 w)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (\nabla^2 w)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

由 Green 公式, 每一个散度的积分均为零, 所以 $\nabla^2 w = 0$, 再根据边界数据有 $w = 0$.

当微分方程是以散度形式给出的时候, 用 Green 公式证明唯一性是非常方便的. 但是, 对于向量方程以及除双调和方程以外的高阶方程, 唯一性理论难以用此方法证明. 此外, 椭圆和双曲相结合的混合型方程解的存在唯一性有其自身的挑战性[64]. 幸运的是, 在实际情况中我们可以利用另外一种工具.

5.3 最大值原理

如果在闭区域 D 内满足 Laplace 方程, 非常明显可以看到 u 的最大最小值在 ∂D 上出现; 如 5.1.4.2 节的模型, 我们从来没有看到过薄膜会在内部有一个 "肿块", 除非它在两侧受到压力差. 如果我们排除 $\partial^2 u/\partial x^2$ 和 $\partial^2 u/\partial y^2$ 同时为零的点后, 这个事实就很显然了, 这是因为如果在 D 的内部, 其中一个为正另外一个为负, 那么在 $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ 的临界点处有

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0 \leqslant \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2,
$$

所以这个临界点必然是个鞍点. 为了使证明更加严格, 我们取一个辅助函数 V 满足 Poisson 方程 (5.35), 其中 $f > 0$, 这样 $\partial^2 V/\partial x^2$ 和 $\partial^2 V/\partial y^2$ 至少有一个为正, 所以 V 不可能在区域 D 内部取得最大值. 在内部它只可能有最小值点或鞍点, 但最大值只能在 ∂D 上取到. 因此, 如果 $\nabla^2 u = 0$, 令 $V = u + \varepsilon r^2/4$ (其中 $\varepsilon > 0$,

64 注意到我们所掌握的有关双曲和椭圆型方程的知识可以用于解决一些混合型方程, 比如 (3.13), 它在 "声线" 两侧都是双曲型和椭圆型的, 在横跨这条线的曲线 Γ 上给定数据. 可以很清楚看到, 如果我们在 Γ 的 "双曲部分" 给定 Cauchy 数据, 并且这些数据足以使我们找出声线上 u 以及 u 的法向导数, 那么这个问题就变成超定了.

$r^2 = x^2 + y^2$, 且假定 $(0,0)$ 在 D 内), 那么 $\nabla^2 V = \varepsilon > 0$, 所以 V 的最大值点只能在 ∂D 上. 因此

$$u + \frac{\varepsilon r^2}{4} \leqslant M_V < M_u + \frac{\varepsilon R^2}{4},$$

其中 M_V 和 M_u 分别是 V 和 u 在 ∂D 上的最大值, R 是原点到 ∂D 的最大距离. 在 $u < M_u + \varepsilon(R^2 - r^2)/4$ 中令 $\varepsilon \to 0$, 我们就看到 u 的最大值也在 ∂D 上取到 (类似地, 最小值也在 ∂D 上取到).

最大值原理使得我们可以重新推导 5.2 节中的唯一性定理, 并且还可以得到其他结论, 如下所示.

唯一性

对于 Poisson 方程的 Dirichlet 问题, 两个解之差是个调和函数, 且在边界上为零. 由最大最小值原理得知它应该等于零.

比较原理

考虑两个 Poisson 方程 $\nabla^2 u_i = f(x,y)$, $i = 1,2$, 具有相同的右端 f 和光滑 Dirichlet 数据为 $g_i = g_i(x,y)$, 满足 $g_1 < g_2$. 因为 $u_2 - u_1$ 只能在 ∂D 取到正的最小值, 所以在 D 内 $u_1(x,y) < u_2(x,y)$. 类似地, 如果 $g_1 = g_2$, 但 Poission 方程右端 $f_1 > f_2$, 那么 $u_1(x,y) < u_2(x,y)$.

对初值数据的连续依赖性

这只是比较原理在 $g_1 \to g_2$ 时一个推广. 另外同样可以得到 u 对 f 的连续依赖性.

这些结果说明了 Poisson 方程的 Dirichlet 问题是适定的, 然而必须注意到, 迄今为止我们并没有证明解的存在性.

在这本书里我们不想钻研太多有关最大值原理及其一般化结论的用处, 虽然它也可以用于 u 满足微分不等式 (我们将在 5.11 节中看到) 和更为一般的椭圆型方程. 解的存在性问题是最难的一个问题, 它需要一连串的证明, 而这些证明的起点通常是下面将要介绍的方法.

5.4 变分原理

在有些情况下, 椭圆型方程的解可能是某个变分问题的最小值点或其他驻值点. 实际上, 热动力学和非线性弹性力学里的许多问题可以用极小化过程来建立模型, 然后只将相应的 Euler-Lagrange 方程作为后验的偏微分方程问题. 这个方法在计算机时代是非常有用的, 这是因为对积分的离散逼近 (比如说有限元法) 要比微分方程的离散逼近简单和方便得多. 但在这本书内, 我们还是会把偏微分方程看成是最基本的模型.

作为一个例子, 假设 f 给定, u 极小化

$$E(u) = \iint_D \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + f(x,y)u\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.42}$$

不考虑边界条件, 改变 u 得到

$$\begin{aligned} E(u+\eta) - E(u) &= \iint_D (\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(\eta^2) \\ &= -\iint_D \eta(\nabla^2 u - f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + O(\eta^2). \end{aligned}$$

因为 η 是任意的, 所以只有当 u 是 Poisson 方程 (5.35) 的解时, E 才取到驻值.

求 $\min_u E(u)$ 的好处不仅限于数值算法. 比如说, 我们可以用任意一种优化算法来构造序列 u_{n+1}, 使得 $E(u_{n+1}) \leqslant E(u_n)$. 如果我们能证明 $\{u_n\}$ 本身或其子序列收敛, 那么其极限在很多情况下是 Poisson 方程的 "弱解", 也就是说, 它乘以任意一个试验函数分部积分后满足 Poisson 方程. 进一步, 如果能证明它的正则性, 那么我们就有可能证明此弱解是个经典解, 即 Poisson 方程的两端在 D 内处处相等. 这种可能性是存在的, 因为从第 3 章我们得知椭圆型方程不会 "传播" 奇异性; 我们所见到的一种奇异性是使得奇点处处 "存在", 但离开边界后就变得非常光滑, 而且实际上是解析的. 关于这方面更详细的内容可以在 [12] 中找到, 那里面是以迭代法为出发点[65].

变分原理在椭圆型方程特征值问题研究中的应用也是非常重要的, 这点我们将在 5.7.1 节中看到.

5.5 Green 函数

Green 函数是了解线性椭圆型方程解的结构最重要的工具. 这些函数与双曲型方程的 Riemann 函数类似, 只是 Riemann 函数是二阶常微分方程初值问题 Green 函数在多维的推广, 而椭圆型方程的 Green 函数是常微分方程两点边值问题的推广.

同以往一样, 我们从 Poisson 方程开始讨论. 如同 4.2 节, 可以采取两种方法得到相同的结论, 一种方法是采用经典函数进行冗长地分析, 另一种是采用广义函数 "走捷径".

5.5.1 经典函数公式

首先考虑 Dirichlet 问题

$$\nabla^2 u = f \quad 在\ D\ 中, \quad u = g \quad 在\ \partial D\ 上, \tag{5.43}$$

65 常见的一种是对第 6 章介绍的发展方程采用时间推移法得到.

其中 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中有界、单连通的光滑区域, 记 $\boldsymbol{x}=(x,y)$.

我们的出发点是常微分方程的两点边值问题

$$\mathcal{L}u=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x),\quad u(0)=u(1)=0, \tag{5.44}$$

其解是

$$u(\xi)=\int_0^1 f(x)G(x,\xi)\mathrm{d}x, \tag{5.45}$$

其中

$$\mathcal{L}G=\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}=0 \quad 对\ x\neq\xi, \tag{5.46}$$

有 $G(0,\xi)=G(1,\xi)=0$, G 连续, 且

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(\xi+0,\xi)-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(\xi-0,\xi)=1. \tag{5.47}$$

公式 (5.45) 表明 u 是 f 以 Green 函数 G 为权重在 $(0,1)$ 上的积分, G 在 $x=\xi$ 处的斜率有间断, 这是为了保证

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\int_0^1 f(x)G(x,\xi)\mathrm{d}x=f(\xi).$$

我们可以看到, 把 (5.44) 乘以 G, (5.46) 乘以 u, 相减后在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上积分就得到上面的式子[66].

基于常微分方程的这个结果, 我们试图寻找一个函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, 使得对于任意的 $\boldsymbol{\xi}\in D$, 有

$$\nabla^2G=0 \quad 对\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\xi}. \tag{5.48}$$

如上步骤, 我们试图通过把这个方程乘以 u, Poisson 方程 (5.43) 乘以 G, 相减后在 D 上积分来求出 $u(\boldsymbol{\xi})$. 为此 G 必须满足下列条件.

1. 在 ∂D 上 $G=0$, 要不然在积分项中会出现 $\partial u/\partial n|_{\partial D}$.
2. 与 (5.47) 类似, G 需要在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 处要有奇性.

第二个条件比较难满足, 但是, 如果我们猜测此奇性是各向同性的, 也就是说, G 的性质与 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}$ 的方向无关[67], 那么就试着令这个函数为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=常数\cdot\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|+O(1) \quad 当\ \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\xi}\ 时. \tag{5.49}$$

---

66 同样的结论对

$$\mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)$$

也成立, 只要把 (5.46) 中的 $\mathcal{L}G$ 用

$$\mathcal{L}^*G=\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x)G)+q(x)G$$

来代替, 其中 $\mathcal{L}^*$ 是 $\mathcal{L}$ 的共轭算子.

67 这点与 4.2 节的情况不同, 在那里特征方向是至关重要的.

根据运算, 我们取这个常数为 $1/2\pi$, 利用 Green 公式得到

$$\int_{\partial(D-D_\varepsilon)}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\iint_{D-D_\varepsilon}(u\nabla^2G-G\nabla^2u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{5.50}$$

其中 D_ε 是一个从 D 中挖去的圆心为 $\boldsymbol{\xi}$ 半径为 ε 的圆. 注意到在以 $\boldsymbol{\xi}$ 为中心的极坐标下, $\partial/\partial n|_{\partial D_\varepsilon}=-\partial/\partial r$, 由此得到当 $\varepsilon\to 0$,

$$\int_{\partial D_\varepsilon}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(u(\boldsymbol{\xi})\left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\right)-\frac{\partial u}{\partial n}(\overline{\boldsymbol{\xi}})\left(\frac{\log\varepsilon}{2\pi}\right)+O(1)\right)\varepsilon\mathrm{d}\theta, \tag{5.51}$$

其中 $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ 满足 $|\boldsymbol{\xi}-\overline{\boldsymbol{\xi}}|<\varepsilon$. 代入 (5.50), 并利用 (5.43), (5.48) 和 ∂D 上的数据, 令 $\varepsilon\to 0$, 我们得到最终的公式

$$u(\boldsymbol{\xi})=\iint_D G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial D}g(\boldsymbol{x})\frac{\partial G}{\partial n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}s. \tag{5.52}$$

对于这个结果我们需要作两点注记.

• 很容易看出, 对 Robin 问题也同样有一个与 (5.52) 类似的公式, 只要 G 满足齐次 Robin 边界条件. 同样地, 对于其他的二阶椭圆算子也可以进行适当修改得出类似的公式, 除非算子是非自共轭算子, 比如说,

$$\mathcal{L}=\nabla^2+a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y},$$

我们需要定义它的共轭算子

$$\mathcal{L}^*G=\nabla^2G-\frac{\partial}{\partial x}(aG)-b\frac{\partial}{\partial y}(bG).$$

• 虽然我们在与 Reimann 函数类似的一个框架里定义了 Green 函数, 它们的性质还是有很大差异的: G 依赖于区域 D, 而 R 与初始曲线无关. 另外, G 只可能在孤立点处为零, 而 R 对所有的 $x>\xi$ 和 $y>\eta$ 等于零. 在下面将要介绍的 "捷径" 方法中, 我们将看到它们的相似性.

5.5.2 广义函数公式

与 4.2.2 节一样, 我们不用 (5.49), 而定义 G 满足

$$\nabla^2G=\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2G}{\partial y^2}=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\quad 对\ \boldsymbol{\xi}\in D, \tag{5.53}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$ 除 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 外均为零, 且 $\iint_D\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$. 假设在 ∂D 上 $G=0$, 且对于 $\iint_D(u\nabla^2G-G\nabla^2u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ Green 公式成立, 则可得 (5.52). 同

以往一样, 对 (5.53) 乘以 u, 对 Poisson 方程 $\nabla^2 u = f$ 乘以 G, 在 D 上积分后相减得到

$$\begin{aligned}\iint_D (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_{\partial D}\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = \int_{\partial D} g(\boldsymbol{x})\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}s \\ &= \iint_D (u(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= u(\boldsymbol{\xi}) - \iint_D G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

如 4.2.2 节所讨论的情况一样, 使用 Green 公式的合理性是问题的核心所在, 对于其合理性的进一步证明见习题 5.9.

对于共轭算子为 $\mathcal{L}^*$ 的椭圆算子 $\mathcal{L}$ 我们建立一般的理论框架. 如果作为 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 有

$$\mathcal{L}^* G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) \quad 及 \quad \mathcal{L}u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),$$

具齐次边界条件, 则恒等式

$$\iint_D (G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathcal{L}u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x})\mathcal{L}^*G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

意味着

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \iint_D G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

下面我们做一些注记.

- Green 函数是这样一类函数, 它们在一个线性算子的作用下除一点外恒等于零, 另外, 如果算子 $\mathcal{L}$ 是自共轭的, 那么在适当边界条件下, G 是 *对称* 的, 即

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x}).$$

为了证明此等式只要令

$$\mathcal{L}^* G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta})$$

并利用

$$\iint_D (G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})\mathcal{L}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\mathcal{L}^*G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

这个事实在我们接受某些人观点时很重要, 比如说, 他们大胆地宣称 Poisson 方程具零 Dirichlet 边界数据的解为

$$u(\boldsymbol{x}) = \iint_D \widetilde{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}, \tag{5.54}$$

只要在积分号下求微分 $\nabla^2\widetilde{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$. 当然, $\widetilde{G}$ 是 (5.53) 所定义的 G 的"转置", 而且对于任意的共轭算子, 不会引起丝毫混淆. 实际上, 当 $\mathcal{L}\neq\mathcal{L}^*$, Green 函数满足 $\mathcal{L}G=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数, 且 $\mathcal{L}^*G=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函数.

- 当我们把 (5.53) 推广到 $\mathbb{R}^m$ 空间, 会发现 (5.49) 的奇性部分部被

$$-\frac{\omega_m}{r^{m-2}} \quad 对\ m\geqslant 3 \tag{5.55}$$

所代替, 其中 ω_m 是 $\mathbb{R}^m$ 中单位球的球面面积, 也就是说[68]

$$\omega_m=\begin{cases} m\pi^{m/2}/(m/2)!, & m\ 为偶数,\\ \pi^{(m-1)/2}2^m((m-1)/2)!/(m-1)!, & m\ 为奇数. \end{cases}$$

如果区域 D 是无界的并且在无穷远处 $u\to 0$, 那么如 (5.1) 前面的论述, G 是个点"电荷"或点"质量"模型. 如果 $m=2$, 如 5.1.2 节所述, (5.49) 的物理解释就是直线上的电荷所产生的静电场. 另外, 当方程转化成标准型后, 任意椭圆型方程的 Green 函数的奇性都是按上面的形式表现出来.

- G 的存在性问题与一般椭圆型方程解的存在性一样难, 对于后者我们会在最后一节作简单讨论[69]. 当然, 如果 G 存在, 那么诸如 (5.52) 的公式说明了解对数据的连续依赖性. 但是通常情况下 G 不存在, 上述过程需要作些修改. 假定我们要求解 Poisson 方程的 Neumann 问题 $\nabla^2u=f$, 在 ∂D 上, $\partial u/\partial n=g(x)$, 我们知道 (5.39) 满足. 我们一眼就可以看出来, 只有当 (5.53) 的右端项 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 与常特征函数正交时, G 才存在. 但这是不可能的, 因为 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 的积分是 1. 幸运的是, 至少有两种方法可以解决这个困难. 一种方法是给 G 添加一个自由度, 令

$$\nabla^2G_M=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})+c\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\eta}),$$

其中 $c=-1$ 是为了满足正交性, 从而得到

$$u(\boldsymbol{\xi})-u(\boldsymbol{\eta})=\iint_D G_M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\partial D}g(\boldsymbol{x})G_M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\mathrm{d}s; \tag{5.56}$$

右端很显然是一个关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的函数与一个关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的函数之和. 另一种方法是利用 1 是特征解, 令

$$\nabla^2G_M=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})+c\cdot 1. \tag{5.57}$$

---

68 为了快速证明这个式子, 注意到

$$\pi^{m/2}=\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\omega_m\int_0^\infty r^{m-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r, \quad 其中\ r=|\boldsymbol{x}|.$$

69 注意, 如果我们已经证明了椭圆型方程边值问题的解存在, 那么我们可以推出此问题的 Green 函数也存在. 例如, 对于二维 Laplace 方程 Dirichlet 问题, $G=(1/2\pi)\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|+G_R(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, 其中 Green 函数的正则部分 G_R 满足边值问题 $\nabla^2G_R=0$, 在 D 中及 $G_R=-(1/2\pi)\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$, 在 ∂D 上.

为了保证正交性, 取 $-1/c$ 为 D 的面积, 这样就得到了一个类似于 (5.56) 的公式.

• 如 (5.52) 后所提到的一样, 我们对 G 的定义可以容易地推广到 Robin 问题, 其中 (5.36) 中的 α 和 β 都不为零. 如果 u 满足 Poisson 方程, 令 $\nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$, 并且在 ∂D 上 $\alpha G + \beta \partial G/\partial n = 0$, 这是为了保证 $\int_{\partial D}(G\partial u/\partial n - u\partial G/\partial n)\mathrm{d}s$ 可以用 G 和 g 表示出来.

从计算角度, 还有一个有关 Green 函数的注记需要提一下. 如果我们放松对于 G 边界条件的要求, 就可以把 D 内 u 的值与 ∂D 上 u 和 $\partial u/\partial n$ 的积分联系起来. 因此, 像习题 5.13 那样, 对于 (5.36) 的边值问题, 可以通过适当的极限过程得到一个有关边界上 u 和 $\partial u/\partial n$ 的线性积分方程. 积分方程的形式取决于问题本身以及我们怎样处理 (5.50), 它是求解 Laplace 方程和许多其他椭圆型方程的所谓 *边界元法* 的基础[6]. 将积分方程关于整个 ∂D 进行离散, 得到的线性代数方程组的阶数比其他的传统方法, 比如有限差分法和有限元法, 要小得多, 但另一方面, 由边界元法得到的矩阵是 "满" 的, 也就是说矩阵的零元素比较少.

遗憾的是, Green 函数很少有显式公式 (参考 [34]). 但是相对 Riemann 函数来说情况还是好些, 虽然我们只能处理一小部分方程, 但有些具有对称性的几何形状使得我们能够找到 G 的显式表达式.

5.6 Green 函数的显式表达式

5.6.1 Laplace 方程与 Poisson 方程

我们已经看到, 当 $m=2$ 和 $m=3$ 时 $\mathbb{R}^m$ 中的无穷远处的性质尽可能好的 Green 函数分别是 $(1/2\pi)\log r$ 和 $-1/4\pi r$. 下面我们将看到, 当引入边界时问题就变得复杂多了.

5.6.1.1 圆和球: Dirichlet 和 Neumann 条件

假设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中圆心为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 半径为 a 的圆. 在几何上, 定义 $\boldsymbol{\xi}$ 的镜像点为 $\boldsymbol{\xi}'=a^2\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|^2$, 令 $R=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$, $R'=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}'|$, 如图 5.4 所示[70]. 这样, 当 $r=|\boldsymbol{x}|=a$ 时, $R/R'=|\boldsymbol{\xi}|/a$, 因为改变原点后方程并没有改变, 所以 $\log R$ 和 $\log R'$ 都是 Laplace 方程的解. 注意到当 $R\to 0$ 时, $G-(1/2\pi)\log R$ 有界, 当 $r=a$ 时 $G=0$, 于是 G 的公式为

$$G=\frac{1}{2\pi}\left(\log R-\log\left(R'\frac{|\boldsymbol{\xi}|}{a}\right)\right). \tag{5.58}$$

这是一个 *镜像法* 的例子, 其中 $\boldsymbol{\xi}'$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 关于 $r=a$ 的镜像点. 对于静电场其思想是,

70 当 X 在圆周上时, 三角形 XOP 和 QOX 是相似的, 因为它们有公共角 $\theta-\alpha$, 且根据镜像条件有 $OQ/OX=OX/OP$. 因此, 当 $|\boldsymbol{x}|=a$ 时, $R=R'|\boldsymbol{\xi}|/a$.

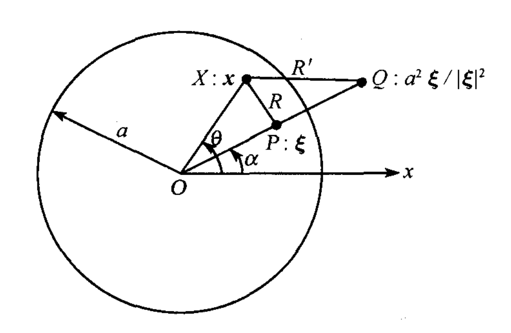


图 5.4 圆或球中的镜像点

导体内直线电荷所产生的电场在圆柱上与位于其镜像点所带大小相等、符号相反的线电荷产生的电场相同; 这种把边界条件用适当的奇点分布来代替的思想我们会用到多次. 为了计算 $u(\boldsymbol{\xi})$, 记 $\boldsymbol{\xi}$ 的极角为 α, 因为 $R/R'=|\boldsymbol{\xi}|/a$, 所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{r=a}&=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a}\\&=\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2+|\boldsymbol{\xi}|^2-2r|\boldsymbol{\xi}|\cos(\theta-\alpha)\right)\big|_{r=a}\\&\quad-\frac{1}{4\pi R'^2}\frac{\partial}{\partial r}\left.\left(r^2+\frac{a^4}{|\boldsymbol{\xi}|^2}-2r\frac{a^2}{|\boldsymbol{\xi}|}\cos(\theta-\alpha)\right)\right|_{r=a}\\&=\frac{a^2-|\boldsymbol{\xi}|^2}{2\pi aR^2}.\end{aligned}$$

因此, 当 $f=0$ 时, 我们得到著名的 Poisson 积分公式

$$u(\boldsymbol{\xi})=\frac{a^2-|\boldsymbol{\xi}|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\theta)\mathrm{d}\theta}{|\boldsymbol{\xi}|^2+a^2-2a|\boldsymbol{\xi}|\cos(\theta-\alpha)}. \tag{5.59}$$

当我们考虑 $r=a$ 的外区域时这个方法也同样适用, 只是需要一个重要的附加条件. 因为区域是无界且多连通的, 所以我们需要多加小心排除特征解. 对于 Dirichlet 问题, 只要当 $r\to\infty$ 时 $u=o(\log r)$, 就足以保证排除特征解

$$\log\frac{r}{a}\quad 和\quad \left(r^n-\frac{a^{2n}}{r^n}\right)(A\cos n\theta+B\sin n\theta),$$

其中 n 是大于零的整数, 而 A 和 B 是常数.

对于 Robin 条件 (5.13) 没有诸如 (5.59) 的公式, 但对于 Neumann 问题, Green 函数仍可以通过镜像表示出来. 我们把具体细节留在习题 5.17, 当 $|\boldsymbol{\xi}|>a$ 时, 如果我们排除了特征解, 镜像是由圆内两直线电荷组成的, 其中特征解满足 $r\to 0$ 时 $u=常数\cdot\theta+o(1)$. 另一方面当 $|\boldsymbol{\xi}|<a$ 时, 我们知道没有通常情况下的 Green 函数, 必须利用 (5.56), 习题 5.18 中所引用的公式就是这样一个例子.

因为图 5.4 也可以在 $\mathbb{R}^3$ 中画出来, 所以镜像法同样适用于球, 其 Green 函数在球极坐标下接近奇点的地方为 $G=-1/4\pi r+O(1)$[71].

对于下一类问题, 可以通过 Fourier 变换寻找 Green 函数.

5.6.1.2　**半平面**

假定在 $\mathbb{R}^2$ 中 $y>0$ 内求解 Laplace 方程, 具 Dirichlet 数据, 在 $y=0$ 上 $g=g_D(x)$, 在无穷远处满足一定的条件来保证唯一性. 我们可以通过直接采用镜像法, 或者对 (5.58) 求极限, 得到

$$G=\frac{1}{2\pi}\log\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}'|},$$

因此, 方程的解 $u_D(x,y)$ 为[72]

$$u_D(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_D(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2+y^2}. \tag{5.60}$$

注意到 (5.60) 所定义的 $u_D(x,y)$ 对于 $y<0$ 也满足 Laplace 方程, 它在 $y=0$ 的法向导数是连续的, 但其本身却在此处有 $2g_D$ 的跳跃. 另外我们所需要的无穷远处的条件是: 当 $r^2=x^2+y^2\to\infty$ 时 $u=O(1/r)$.

我们也可以通过引入 u_D 的 Fourier 变换得到上述结果

$$\widehat{u}_D(k,y)=\int_{-\infty}^{\infty}u_D(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,$$

利用衰减假定, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\widehat{u}_D}{\mathrm{d}y^2}-k^2\widehat{u}_D=0, \tag{5.61}$$

其中

$$\widehat{u}_D(k,0)=\widehat{g}_D(k)=\int_{-\infty}^{\infty}g_D(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

因此, 如果限定 k 为实数, 那么

$$\widehat{u}_D(k,y)=\widehat{g}_D(k)\mathrm{e}^{-|k|y}=\widehat{g}_D(k)\widehat{H}(k,y). \tag{5.62}$$

在实轴上对 $\widehat{H}$ 作 Fourier 逆变换, 有

$$H(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx-|k|y}\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ky}\cos kx\mathrm{d}k=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

---

71 在这里我们就不详细求了, 但是这种反演和 $\mathbb{R}^m$ 中 Laplace 算子之间还有一种神秘的联系. 也就是说, 如果 $u(r,\theta_1,\cdots,\theta_{m-1})$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的调和函数, 其中 r 是到原点的距离, $\theta_1,\cdots,\theta_{m-1}$ 是极角, 那么 $r^{2-m}u(a^2/r,\theta_1,\cdots,\theta_{m-1})$ 也是一个调和函数. 这可以在极坐标下通过分离变量法得到. 注意 r^{λ} 和 $r^{-\lambda-m+2}$ 总是成对出现的.

72 为了叙述方便, 在这一节中我们用 Green 函数求解 $u(\boldsymbol{x})$ 而不是 $u(\boldsymbol{\xi})$. 因为 G 对称, 所以这样做不会引起混淆.

因此由卷积定理就得到 (5.60), 显然

$$H(x-\xi,y)=-\left.\frac{\partial G}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}.$$

这个方法有个优点, 它不仅可以用于 Dirichlet 问题, 还可用于 Neumann 和 Robin 问题. 原则上来讲, 它也可以用于半平面中任意常系数椭圆型方程.

如果 $u_N(x,y)$ 为 $\partial u_N/\partial y(x,0)=g_N(x)$ 的 Neumann 问题在 $y>0$ 的解, 容易证明 Green 函数为

$$G=\frac{1}{2\pi}(\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|+\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}'|),$$

所以

$$u_N(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g_N(\xi)\log((x-\xi)^2+y^2)\mathrm{d}\xi, \tag{5.63}$$

可以加上任意常数. 注意到只有当 $\int_{-\infty}^{\infty}g_N(\xi)\mathrm{d}\xi=0$ 时, u_N 在无穷远处才可能有界, 这与有界区域内的可解条件相似. 另外, $u_N(x,y)$ 在 $y<0$ 时也满足 Laplace 方程, 并且在 $y=0$ 处连续, 只不过它的法向导数有 $2g_N(x)$ 的跳跃. 这个解是在 x 轴上有奇点的 Green 函数的叠加, 它在流体力学、万有引力场与电磁场都可以简单地理解为 "源分布".

还有一些东西与半平面问题相关, 在这里介绍一下. 很容易算得 u_N 的 Fourier 变换是

$$\widehat{u}_N(k,y)=-\frac{\widehat{g}_N(k)}{|k|}\mathrm{e}^{-|k|y},$$

所以 u 的 Dirichlet 数据和 Neumann 数据由下面这个关系式联系起来

$$\widehat{g}_N(k)=-|k|\widehat{g}_D(k). \tag{5.64}$$

这是所谓的 Dirichlet-to-Neumann **映射** 的一个例子, 它也更清楚地说明了 $y>0$ 区域内 Laplace 方程 Cauchy 问题的不适定性. 根据 Cauchy-Kowalevskaja 定理, 如果 $\widehat{g}_D$ 和 $\widehat{g}_N$ 是任意解析函数的 Fourier 变换, 那么 Cauchy 问题有唯一的局部解, 但是它只在 $y>0$ 内存在整体解, 而且如果 $\widehat{g}_D$ 和 $\widehat{g}_N$ 通过 (5.64) 联系起来, 解在无穷远处也满足所需要的性质. 为了说明这个结果, 我们注意到 g_D 是 g_N 和 $-1/|k|$ Fourier 变换的卷积. 不幸的是, 第二项是非常难进行 Fourier 逆变换的, 尽管我们知道 $\mathrm{i}k/|k|$ 是 $1/\pi x$ 的 Fourier 变换 (我们要用 4.2.2 节的结论, 等到习题 5.21 再来计算). 这意味着 $\mathrm{d}g_D/\mathrm{d}x$ 是 g_N 和 $1/\pi x$ 的卷积, 其 Fourier 变换为 $-\mathrm{i}k\widehat{g}_D$, 我们尝试着写出下面这个等式, 只要我们能搞清楚积分的意思,

$$\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_N(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi-x}. \tag{5.65}$$

一个与 (5.64) 极其相似的式子是

$$\widehat{g}_N(k) = \mathrm{i}k\left(\frac{\mathrm{i}|k|}{k}\right)\widehat{g}_D(k),$$

得到

$$g_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x}, \tag{5.66}$$

同样我们需要对这个积分进行说明. 幸运的是, 我们可以回到 (5.60), 对它进行分部积分得到

$$u_D(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\arctan\left(\frac{\xi - x}{y}\right)\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}$$

对 $y > 0$, 其中我们必须定义反正切函数在 $-\pi/2$ 与 $\pi/2$ 之间. 当 $y \downarrow 0$ 时,

$$\arctan\left(\frac{\xi - x}{y}\right) = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{y}{\xi - x} + o(y)$$

对 $\xi - x > 0$ 和 $\xi - x < 0$. 因此, 为了找出当 $y \downarrow 0$ 时 $u_D(x,y)$ 的极限性态, 需要把积分分成 $\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)$ 两部分, 使得当 y 很小时,

$$\begin{aligned}u_D(x,y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{\xi - x} + \cdots\right)\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi\right.\\ &\quad\left. + \frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{y}{\xi - x} + \cdots\right)\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\xi\right)\\ &= g_D(x) + \frac{y}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x} + \cdots,\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x} \tag{5.67}$$

称为*积分主值*. 现在我们可以对 y 积分然后令 $y = 0$, 这样就有

$$g_N(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}g_D}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x}, \tag{5.68}$$

这个式子告诉我们怎样理解上述积分. (5.68) 的右端称为 $\mathrm{d}g_D/\mathrm{d}\xi$ 的 Hilbert *变换*.

5.6.1.3　带状和矩形区域

在带状区域 $0 < y < 1$, $-\infty < x < \infty$ 中重复上面的变换计算是一个简单的练习, 比如说, $u(x,0) = 0$, $u(x,1) = g(x)$, 当 $|x| \to \infty$ 时, $u \to 0$. 我们得到

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)H(\xi - x, y)\mathrm{d}\xi, \tag{5.69}$$

其中

$$H(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{\sinh ky}{\sinh k}\mathrm{d}k.$$

H 是 Green 函数对 y 求导后在 $\eta=1$ 处的赋值, 通过把它写成在极点 $k=\mathrm{i}n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$ 处电荷所做贡献的无穷序列, 可以把 Green 函数看成镜像点 $y=0$ 和 $y=1$ 的无穷重复序列.

有时候可以通过用另外一种镜像法来求解半无界带状区域内的问题. 假设 u 在半带状 $0<y<\infty$, $0<x<1$ 内是调和的, 并且

$$u(x,0)=g(x)\quad 对\ 0<x<1,\quad u(0,y)=u(1,y)=0\quad 对\ y>0,$$

u 在 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 处是有界的. 我们对 u 在 x 方向进行奇延拓并周期延拓至 $-\infty<x<\infty$, 由 (5.60) 得到

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 g(\xi)\left(\frac{1}{(x-2n-\xi)^2+y^2}-\frac{1}{(x-2(n+1)-\xi)^2+y^2}\right)\mathrm{d}\xi, \tag{5.70}$$

这比用 Green 函数要快得多. 我们也可以采取分离变量法进行求解, 得到 y 很大时收敛性很好的级数, 而 (5.70) 则对于 y 很小时性质很好.

对于那些对用类似构造镜像序列的方法来求解矩形问题感到气馁的人来说, 下面这个求 Green 函数的方法或许会是个不错的选择; 实际上它对任何有界区域都是适用的. 假设我们想在 $-a<x<a$, $-b<y<b$ 内求解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题, 当然 u 在顶点满足适当的有界性条件. 如同以往一样, 令

$$\nabla^2 G=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \tag{5.71}$$

在边界上 $G=0$[73]. 定义 G 的 有限 Fourier 变换, 它是 4.4 节所讨论的 Fourier 级数的推广. 在那一节, 我们把任意函数以适当的特征值问题的完备特征函数展开, 而在这里, 对于任意函数 $F(x,y)$, 我们定义

$$\widehat{F}_{mn}=\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}F(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.72}$$

其中影响函数核是 Laplace 方程具零 Dirichlet 条件的一个特征函数, 相应的特征值是 $-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2)$. 在 (5.71) 两端都乘以这个影响函数核, 然后积分就得到

$$\widehat{G}_{mn}=-\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\bigg/\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right).$$

---

73 实际上, G 的问题是一些工业过程的一个很好模型, 它涉及导电金属板内的电流问题, 其中金属板在 $x=\xi$, $y=\eta$ 处有电极; 此时 G 是电势.

在这种情况下, (5.72) 的逆公式就是 Fourier 级数的逆公式, 也就是说

$$G=\frac{1}{ab}\sum_{m,n}\widehat{G}_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5.73}$$

当然, 可以对 (5.72) 进行推广得到一般区域内的 Green 函数 G, 只要我们知道 Laplace 方程在那个区域的特征函数. 我们将在 5.7.2 节中继续讨论这个问题.

5.6.2 Helmholtz 方程

由于 Helmholtz 方程在衍射理论中的重要性, 我们把它单独放在一节. 为了简单起见, 我们仅限于二维的情况, Green 函数在全平面上满足

$$(\nabla^2+k^2)G=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}). \tag{5.74}$$

在极坐标下, G 不再像 Laplace 方程那样是 $\log r$ 和一个常数的组合, 而是 Bessel 函数 $J_0(kr)$ 和 $Y_0(kr)$ 的组合. 显然, 当 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\to 0$ 时, G 必须具有对数奇性, 并且强度是 $1/2\pi$, 根据 Y_0 的性质, 这就要求 $G=(1/4)Y_0(kr)+\text{常数}\cdot J_0(kr)$. 另外, 我们需要详细说明当 $r\to\infty$ 时函数的性质. 特别地, 我们需要指定当 $r\to\infty$ 时解的哪些部分代表 "离开" 波. 为此我们回想起在第 4 章, 当 $r\to\infty$ 时, $u\sim f(r+a_0t)$ 的波是进入波, 而 $u\sim f(r-a_0t)$ 的波是离开波[74]. 记

$$f\sim \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r\pm a_0t)},$$

并回想起在 (5.74) 的推导过程中的因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 我们得到 Helmholtz 方程的*放射性条件*

$$\frac{\partial G}{\partial r}-\mathrm{i}kG=o(G)$$

当 $r\to\infty$ 时, 这是 G 趋向 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}kr}$ 乘以一个关于 r 变量代数衰减的某个函数的简洁表达形式. 实际上, 可以通过渐近分析方法 (见习题 8.11) 说明放射性条件可以更准确地写为 Sommerfeld *放射性条件*

$$\lim_{r\to\infty}r^{1/2}\left(\frac{\partial G}{\partial r}-\mathrm{i}kG\right)=0. \tag{5.75}$$

通过 J_0 和 Y_0 的渐近展开[8], 证明满足 (5.75) 的唯一组合是 Hankel *函数*

$$H_0^{(1)}(kr)=J_0(kr)+\mathrm{i}Y_0(kr) \tag{5.76}$$

的倍数. 因此

$$G=-\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|), \tag{5.77}$$

---

74 除了一维情形, 函数 $f(r\pm a_0t)$ 当然不是波动方程的精确解, 但是当 $r\to\infty$ 时, 我们可以近似地认为波的性质与一维情形相近.

正如 5.15 节所预期的那样, 它是复数, 而且关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 是对称的, 因为 ∇^2+k^2 是自共轭的.

在边界存在的情况下求 Helmholtz 方程的 Green 函数确实是非常繁琐的. 比如矩形区域具零 Dirichlet 数据, 这里我们可以对 (5.73) 进行适当修改, 只要 $-k^2$ 不是 Laplace 方程的特征值 (见习题 5.16). 然而, 我们可以指出, 虽然有限边界使得 G 必须同以往一样满足适当的齐次边界条件, 但是放射性条件 (5.75) 并没有发生改变[75]. 我们看一下在最简单几何区域下会发生什么情况. 假设在极坐标下

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+k^2u=0,$$

并且在 $r=1$ 上 $u=f(\theta)$. 那么在 $r>1$ 内, 满足 (5.75) 的解为

$$u(r,\theta)=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)H_n^{(1)}(kr),$$

而当 $r<1$ 时解为

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)J_n(kr).$$

这里 a_n, b_n, c_n 和 d_n 容易与 $f(\theta)$ 的 Fourier 系数联系起来. 同时第一类 n 阶 Bessel 函数 $J_n(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2J_n}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J_n=0,\quad J_n(x)=\frac{x^n}{2^nn!}(1+O(x^2))\quad 当\ x\to 0\ 时, \tag{5.78}$$

而对非整数 n 第二类 Bessel 函数 $Y_n(x)$ 等于

$$\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi},$$

当 n 为整数时等于这个表达式的极限; 它在原点是奇异的 (详见 [8]). $H_n^{(1)}=J_n+\mathrm{i}Y_n$ 称为 n 阶 Hankel 函数. 为了以后引用方便, 我们注意到 $J_n(x)$ 与$x^n\int_0^{\pi}\cos(x\cos\theta)\cdot\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta$ 成比例, 这个结果对于复数 n 也是成立的.

最后, 我们注意到当边界延伸到无穷时情况会变得非常复杂, 因为输出波的条件可能会发生变化.

---

75 有限边界只是使得远场需要引进一个方向函数 $A(\theta_1,\cdots,\theta_{m-1})$ 来描述, 也就是说

$$G\sim\frac{A(\theta_1,\cdots,\theta_{m-1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r^{(m-1)/2}},$$

其中 m 是空间维数, $\theta_1,\cdots,\theta_{m-1}$ 是极角 (见第 8 章); 这与 Laplace 方程 Green 函数的远场的各向同性相反.

5.6.3　修正 Helmholtz 方程

修正 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 - k^2)u = 0$$

和一般的 Helmholtz 方程的性质差异是非常大的, 因为在无界区域中它的解在无穷处可能不是按代数, 而是按指数增加或衰减的. 它在 $\mathbb{R}^2$ 的 Green 函数是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r} - k^2 G = 0$$

的解, 在无穷远处衰减并且在原点具有适当的对数性质. 也就是说, $G = -(1/2\pi)\cdot K_0(kr)$, 其中 $K_0(kr)$ 是第三类修正 Bessel 函数, 它等于 $(\mathrm{i}\pi/2)H_0^{(1)}(\mathrm{i}kr)$. 请读者自己验证 $\mathbb{R}^3$ 中的 Green 函数是 $-\mathrm{e}^{-kr}/4\pi r$; 注意到这两个 Green 函数都不是振荡的.

*5.7　Green 函数, 特征函数展开与变换

类似级数 (5.73) 的结果告诉我们应当更加仔细地研究 Green 函数、特征函数和变换之间的关系. 基于这种动机, 我们把自共轭算子 $\mathcal{L}$ 的 Green 函数 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 看成是特征函数 $\phi_\lambda(\boldsymbol{x})$ 的叠加, 满足 $\mathcal{L}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$, 然后把基本公式 (5.52) 看成是 4.4 节意义下的一个变换公式. 换一种叙述方法, $\mathcal{L}u = f$ 的解是 ϕ_λ 的叠加, 其系数容易算得, 因为

$$\int \phi_\lambda f \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \phi_\lambda \mathcal{L}u \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int u\mathcal{L}\phi_\lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda \int u\phi_\lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

每个椭圆型方程都可以用自定义的变换来求解, 这个变换针对特征函数 ϕ_λ 进行的, 而且可以对这个过程进行适当修改来求解非自共轭算子. 在我们介绍这个方法之前, 首先回顾一下有关椭圆算子的特征函数和特征值的一些结果.

5.7.1　特征值与特征函数

我们所需要知道的大部分东西实际上是二阶自共轭常微分方程两点边值问题的 Sturm-Liouville 理论的推广[44]. 那个理论的主要结果是, 特征值是实数并且特征函数系是完备的, 不同特征值所对应的特征函数是正交的. 正交性结果的证明同矩阵一样, 但完备性的证明比较复杂. 把这个过程推广到多维 Dirichlet 问题的一种比较简单的方法是, 如果对区域 D 内的自共轭椭圆算子 $\mathcal{L}$ 及两个适当的函数 u, v 定义双线性形式 $a(u, v)$

$$a(u, v) = \int_D u\mathcal{L}v \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_D v\mathcal{L}u \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

那么 Rayleigh 商

$$\int_D a(u, u)\mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big/ \int_D |u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad 其中\ u = 0\ 在\ \partial D\ 上$$

在特征函数 ϕ_0 处取得极小值, 其中 ϕ_0 是

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad u = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}$$

最小 (按模最小) 或 *主特征值* 所对应的特征函数[76]. 同样, 第 $n+1$ 个特征函数 ϕ_n 可以通过在与前面 n 个特征函数正交的试验函数空间内最小化求得. 通过最小化的性质得知在均方意义下, Fourier 级数展开的 n 项之后可以用第 n 个特征值的倒数来控制 (见 [48]). 这个过程对 Neumann 问题和 Robin 问题也同样适用, 但后者边界条件的符号要正确.

另一个重要的结果是, Dirichlet 特征值问题的最小特征函数不变号. 对于二阶常微分方程, 证明相对简单, 只要我们考虑当 λ 增加的时候, 满足 $\mathcal{L}u = \lambda u$, $u(0) = 0$ 的函数 $u(x)$ 的零点在 $x = 0$ 附近的 "聚集" 情况. 但这种方法对于椭圆型方程来说是行不通的, 我们证明第 $n+1$ 个特征函数 ϕ_n 的零点 (或 *节线*) 不会把区域 D 分割成超过 $n+1$ 个子区域. 如 [12], [21] 里的叙述, 我们假设逆命题成立, 即有 $m > n+1$ 个这样的子区域. 那么, 选定其中的任意 $n+1$ 个, 并记特征函数在第 i 个子区域上的限制为 ϕ_{ni} (即 ϕ_{ni} 在第 i 个子区域中等于 ϕ_n, 在其他地方为零), 我们构造一个试验函数

$$u = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_{ni},$$

它是标准化的并且与前面的特征函数 $\phi_0, \cdots, \phi_{n-1}$ 正交. 由于 $\mathcal{L}\phi_{ni} = \lambda_n \phi_{ni}$, 所以对于这个试验函数, Rayleigh 商为

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \int_D \phi_{ni} \mathcal{L} \phi_{ni} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \phi_{ni}^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_n.$$

虽然上述证明并不严格, 但它足以说明 u 是第 $n+1$ 个特征函数. 可我们知道这是不可能的, 因为 u 在 n 条节线上有奇点. 我们希望这个矛盾能让读者信服, 主特征函数确实不变号.

5.7.2 Green 函数与变换

有了这个背景, 现在我们讨论 Green 函数与变换. 对矩形区域的 Green 函数, 级数 (5.73) 表明了下述结果. 假设自共轭椭圆算子 $\mathcal{L}$ 的谱 λ_i 是离散的[77], 而且零不是特征值[78], 实标准正交特征函数为 $\phi_n(\boldsymbol{x})$. 那么

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_n \frac{\phi_n(\boldsymbol{x}) \phi_n(\boldsymbol{\xi})}{\lambda_n}. \tag{5.79}$$

---

76 这在变分中是一个简单的习题 (见习题 5.15).

77 这意味着 D 有界, ∂D 并非那么没有规则, 而且算子在标准形式下的系数都是有界的.

78 当零是特征值时, 我们必须引进 5.5 节介绍的推广 Green 函数所用的工具.

这个结果的推导如下：令 G 为 $\sum_n c_n(\boldsymbol{\xi})\phi_n(\boldsymbol{x})$，则只有当 $c_m(\boldsymbol{\xi})\lambda_m = \phi_m(\boldsymbol{\xi})$ 时，$\mathcal{L}G = \sum_n c_n(\boldsymbol{\xi})\lambda_n\phi_n(\boldsymbol{x})$ 才等于 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$，只要两边乘上 $\phi_m(\boldsymbol{x})$ 并积分. 另外，由 (5.79)，加上条件 $\lambda = 0$ 不是特征值，或者直接进行有限 Fourier 变换，都可以得到 $\mathcal{L}u = f$ 的解为

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \sum_n \left(\int_D f(\boldsymbol{x})\phi_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\frac{\phi_n(\boldsymbol{\xi})}{\lambda_n}. \tag{5.80}$$

这个公式是下一节讨论的基础，在这之前，我们需要对标准化和复特征函数的处理作一些注记.

假设算子 $\mathcal{L}$ 是自共轭的，并且有边界条件或有界性来保证满足 $\mathcal{L}\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$ 的标准特征函数 ϕ_λ 是完备的[79] (为方便起见，用 ϕ_λ 来表示 (4.26) 里的 $\phi(\boldsymbol{x}, k)$). 这就意味着任意函数 $f(\boldsymbol{x})$ 都可以展开成级数 $\sum_\lambda \widehat{f}_\lambda\phi_\lambda(\boldsymbol{x})$ 或者积分形式 $\int \widehat{f}_\lambda\phi_\lambda(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\lambda$，或者两者的结合，这取决于谱是离散的、连续的或者是两者兼有. 在任何情况下，如果特征函数是正交的，那么我们预期

$$\widehat{f}_\lambda = \int_D f\phi_\lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x}; \tag{5.81}$$

这就是大家所熟悉的离散情形 Fourier 级数，当 Fourier 级数的区间是 $(-L, L)$ 时，可以通过取极限 $L \to \infty$ 来求得连续谱下的结果. 但是，当取极限的时候，我们必须注意到标准化意味着什么，为了阐明这一点，我们回到 4.4 节所讨论的 Fourier 变换. 假设 $\mathcal{L} = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$, $0 < x < \infty$，我们寻找满足在 $x = 0$ 为零当 $x \to \infty$ 时有界的特征函数. 唯一可能的是 λ 为负数，在这种情况下 ϕ_λ 与 $\sin kx$ 成比例，$k = \sqrt{-\lambda}$；但什么是标准化呢？为了回答这个问题，我们详述对奇函数进行 Fourier 变换和逆变换，

$$u(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty u(\xi)\sin k\xi \mathrm{d}\xi\right)\sin kx \mathrm{d}k.$$

这个双重积分实际上是

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty u(\xi)\sin k\xi \sin kx \mathrm{d}k\mathrm{d}\xi,$$

所以我们可以这么理解，

$$\int_0^\infty \sin k\xi \sin kx \mathrm{d}k = \frac{\pi}{2}\delta(x-\xi). \tag{5.82}$$

因此，标准化的特征函数是 $\phi(x,k) = \sqrt{2/\pi}\sin kx$，在相差一个常数的意义下，我们称之为 Fourier **正弦变换**. 如果定义

$$\widehat{f}_s(k) = \int_0^\infty f(x)\phi(x,k)\mathrm{d}x,$$

79 我们用单个标量 λ 来表示谱，即使是当有 m 个自变量 $\boldsymbol{x}$ 的时候 λ 用 m 个数进行参数化.

那么逆变换公式为

$$f(x) = \int_0^\infty \widehat{f}_s(k)\phi(x,k)\mathrm{d}k.$$

在实际中, 大多数人喜欢用 $\sqrt{\pi/2}\widehat{f}_s(k)$, 而在逆变换中保留因子 $2/\pi$; 关于标准化的这些注记也适用于 Fourier 变换.

从中我们所学到, 如果按照 (5.81) 定义 $\widehat{f}_\lambda$, 只要用如 (5.82) 的式子定义标准化, 就可以使用逆变换公式

$$f(\boldsymbol{x}) = \int \widehat{f}_\lambda(k)\phi_\lambda \mathrm{d}\lambda. \tag{5.83}$$

对于积分区域的定义我们也必须多加小心, 它与实际问题相关, 当谱是离散的时候, 它是个关于离散谱 λ 的求和形式. 在这种情况下 $\widehat{f}_\lambda$ 是 δ 函数的叠加, (5.83) 是广义 Fourier 级数.

最后, 我们提醒读者注意 (5.81) 和 (5.83) 的对称性与 Fourier 变换公式 $\widehat{f}(k) = \int f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ 和 $f(x) = (1/2\pi)\int \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$ 之间的比较. 这表明 (5.81) 取决于 ϕ_λ 是实的. 如 4.4 节中的论述, 当我们在 Fourier 变换中用复特征函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 时, 对于 Hermite 算子, 此类问题的所有内积都必须加以定义. 所以我们必须定义

$$(u,v) = \int_D u(\boldsymbol{x})\overline{v}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{5.84}$$

这意味着 (5.81) 中的 Fourier 系数是关于共轭特征函数的. 当特征函数是复的时, 变换理论所依赖的一个重要结果是

$$\int \phi_\lambda(\boldsymbol{x})\overline{\phi}_\lambda(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\lambda = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'), \tag{5.85}$$

其中积分区域与 (5.81) 一样, 而 (5.82) 是它的一种特殊情况.

5.8 椭圆型方程的变换解

像其他一般理论一样, 当我们把 5.7 节的思想用于特殊的椭圆型方程时, 即使是对二维问题, 在具体技术上也会遇到很多困难. 这主要是因为没有有效的方法求解偏微分方程的特征值和特征函数. 幸运的是, 有很大一类问题, 我们可以把它们的特征函数分解成常微分方程的特征函数, 我们将精力集中在这类问题. 这类方程一般可以进行变量分离, 从而算子可以分解成 $\mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}_1(x) + \mathcal{L}_2(y)$, 其中 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 分别只与 x 和 y 有关. 为了简单起见, 我们只考虑齐次常微分方程, 即方程的右端是齐次的情况, 当右端不是齐次的时候, 可把它以 $\mathcal{L}$ 的特征函数展开, 但这样经常会出现一些技术困难. 在可分离性和齐次性的假设下, u 的表达式 $u = \sum c_{mn}\phi_{mn}(x,y)$,

其中 $\mathcal{L}\phi_{mn}=\lambda_{mn}\phi_{mn}$, 可以简化为$u=\sum c_\lambda\phi_\lambda(x)\psi_\lambda(y)$, 其中 $\mathcal{L}_1\phi_\lambda(x)=\lambda\phi_\lambda(x)$, $\mathcal{L}_2\psi_\lambda(y)=-\lambda\psi_\lambda(y)$. 对于齐次性满足但分离性并不满足的问题, 我们所能下的结论是, 解可以用 ϕ_{mn} 的级数来表示, 但 ϕ_{mn} 的显式公式很少存在.

让我们看几个例子.

5.8.1　柱坐标对称下的 Laplace 方程: Hankel 变换

假设在柱坐标下求解 Laplace 方程

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0 \tag{5.86}$$

在 $z>0$ 中, 有 $u(r,\theta,0)=g(r)$, 那么解与 θ 无关, 并且在无穷远处具有一定的衰减速度来保证解的唯一性. 我们回想一下, 在求二维半平面问题的解 (5.60) 时, 可以很容易对 x 进行 Fourier 变换然后求解关于 y 的常微分方程. 这是因为 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 的特征函数非常容易找到. 如果我们对方程采取分离变量法, 就得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_\lambda}{\mathrm{d}z^2}=-\lambda\psi_\lambda,\quad \frac{\mathrm{d}^2\phi_\lambda}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}r}=\lambda\phi_\lambda.$$

因此, 方程 (5.86) 中关于 z 的偏导数是没什么问题的, 它的特征函数是 $\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}z}$, 但是为了对 r 进行变换我们需要考虑 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}r^2+(1/r)\mathrm{d}/\mathrm{d}r$ 的谱, 而它不是自共轭算子. 因此, 如同 4.5.2 节, 对于描述 u 关于 r 的函数 $\phi_\lambda(r)$, 我们不是考虑特征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_\lambda}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}r}=\lambda\phi_\lambda,$$

而是考虑自共轭问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}r}\right)=\lambda r\phi_\lambda. \tag{5.87}$$

方程右端引入的因子 r, 比 5.7 节的结论复杂, 也就是说, 需要在内积中引进一个权函数: 对于 (5.81), 如果 $\mathcal{L}$ 是自共轭的, 而且 $L\phi_\lambda=\lambda q(\boldsymbol{x})\phi_\lambda$, 其中 ϕ_λ 是实函数, 那么, 在一维情况下, 我们可以很容易看到, 假定 ϕ_λ 归一化使得 $\int q\phi_\lambda^2\mathrm{d}x=1$, 则基本 Fourier 变换公式变成

$$\widehat{f}_\lambda=\int f(x)q(x)\phi_\lambda(x)\mathrm{d}x,\quad f(x)=\int\widehat{f}_\lambda\phi_\lambda(x)\mathrm{d}\lambda. \tag{5.88}$$

从广义函数上来看, 这个方程表明 (5.85) 已经变成

$$\int\phi_\lambda(x)\phi_\lambda(x')q(x')\mathrm{d}\lambda=\delta(x'-x). \tag{5.89}$$

(5.87) 的特征函数为 $\phi=J_0(kr)$ 和 $Y_0(kr)$, 其中 $\lambda=-k^2$, $0<k<\infty$, J_0 和 Y_0 分别是零阶 Bessel 函数. Y_0 不适合, 这是因为当 $r\to0$ 时它是无界的, 我们需要

(5.86) 在区域 $r \geqslant 0$ 中的解. 为了使用上的方便我们把特征函数写成关于 $k = \sqrt{-\lambda}$ 的函数, 然后如同 4.5.2 节定义 Hankel 变换

$$\widehat{u}(k, z) = \int_0^\infty r J_0(kr) u(r, z) \mathrm{d}r; \tag{5.90}$$

这样我们就得到[80]

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widehat{u}}{\mathrm{d}z^2} - k^2 \widehat{u} = 0 \quad 对\ r > 0, \tag{5.91}$$

其中

$$\widehat{u}(k, 0) = \widehat{g}(k).$$

为了用 5.7.2 节的方法写出 (5.90) 的逆公式, 首先我们必须对 $J_0(kr)$ 进行标准化. 我们已经在 (4.48) 中采取了很有效的方法解决这个问题, 但一种更为直接的方法是回到在 4.4 节中所考虑的类型的一个极限. 考虑定义在 $0 < r < R$ 上的函数 $v(r)$, 其中 $v(0)$ 有界, $v(R) = 0$, 然后令 $R \to \infty$. 算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}r(r\mathrm{d}/\mathrm{d}r)$ 所对应的 "Fourier 级数" 是

$$v(r) = \sum a_n J_0(k_n r), \tag{5.92}$$

其中 k_n 满足 $J_0(k_n R) = 0$,

$$a_n = \int_0^R r v(r) J_0(k_n r) \mathrm{d}r \bigg/ \int_0^R r J_0^2(k_n r) \mathrm{d}r.$$

令 $R \to \infty$, 利用著名结果, 对充分大的 x, $J_0(x)$ 近似于 $\sqrt{2/\pi x}\cos(x - \pi/4)$, 有 $(1/R)\int_0^R r J_0^2(k_n r)\mathrm{d}r \to 1/\pi k_n$. 因此, 当 k 充分大时, k_n 几乎是被 π/R 分割, (5.92) 的和式可以看成是一个 Riemann 积分, 当 $R \to \infty$ 时,

$$v(r) \to \int_0^\infty k \widehat{v}(k) J_0(kr) \mathrm{d}k, \tag{5.93}$$

其中

$$\widehat{v}(k) = \int_0^\infty r v(r) J_0(kr) \mathrm{d}r, \tag{5.94}$$

这就是 (4.48) 前的公式. 当 x 充分大时, $J_0(x)$ 的渐近性态表明无需在 (5.93) 中引入正规因子, 就像如果在 Fourier 变换中无需使用 $(1/\sqrt{2\pi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 代替 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 一样. 这

80 如果读者不习惯直接通过 5.7 节写下这个式子, 可以通过下式得到

$$\int_0^\infty \left\{ J_0(kr)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - u\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}J_0(kr)\right) + k^2 r J_0(kr)\right)\right\} \mathrm{d}r = 0.$$

样我们就可以断言[81]

$$u(r,z)=\int_0^\infty kJ_0(kr)\widehat{u}(k,z)\mathrm{d}k,$$

把 $\widehat{u}=\widehat{g}(k)\mathrm{e}^{-kz}$ 代入逆公式就得到原问题的解.

回到这一节刚开始的讨论, 作为对 5.7 节所介绍思想的应用, 采用一种全新的方法对 r 和 z 同时处理. 特征函数是 $\phi(r,z;k_1,k_2)=\mathrm{e}^{-k_1 z}J_0(k_2 r)$, 其中 k_1 和 k_2 是正实数, 令

$$\widehat{\phi}=\int_0^\infty\int_0^\infty \phi(r,z;k_1,k_2)u(k,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z,$$

则 $(k_1^2-k_2^2)\widehat{\phi}=0$. 唯一可能的就是 $\widehat{\phi}$ 是支集为 $k_1=k_2$ 的广义函数[82], 这样我们最终会得到同样的结果.

我们同样要指出, 对于轴对称 Laplace 方程的许多实际问题还有一种很重要的方法. 在 (5.63) 中, 对二维 Green 函数进行叠加, 对于 (5.86), 我们可以对三维 Green 函数进行叠加得到通解

$$\phi(r,z)=\int_{-\infty}^\infty \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{r^2+(z-\xi)^2}}, \tag{5.95}$$

其中 g 是某个适当的权函数 (注意到这与波动方程的通解 (4.61) 类似, 只要把 a_0t 用 $\mathrm{i}z$ 来代替). 很容易得到 ϕ 在无穷远处衰减, 并且当 $r\to 0$ 时 $\phi=-2g(z)\log r+O(1)$ (见习题 5.33).

5.8.2　楔形几何形状内的 Laplace 方程; Mellin 变换

对楔形内极坐标系下给定 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$ 处边界数据的 Laplace 方程采取分离变量法, 就得到特征值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_\lambda}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}r}=\frac{\lambda}{r^2}\phi_\lambda,$$

其中 ϕ_λ 描述的是 u 关于 r 的函数, 因为包含关于 θ 导数的唯一一项是 $(1/r^2)\partial^2/\partial\theta^2$. 如同 (5.87), 把它写成自共轭形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{\lambda}{r}\phi_\lambda, \tag{5.96}$$

其特征函数为 $r^{\pm k}$, 其中 $\lambda=k^2$. 假定要求当 $r\to 0$ 和 $r\to\infty$ 时 u 有界, 与 (5.88) 一致, 我们试着定义 $\widehat{u}(k,\theta)=\displaystyle\int_0^\infty r^{k-1}u(r,\theta)\mathrm{d}r$, 但无法定义逆公式, 因为对 r^k 的

---

81 方程 (5.89) 变成

$$\int_0^\infty r'kJ_0(kr')J_0(kr)\mathrm{d}k=\delta(r'-r),$$

如果读者对这个感到疑惑可以参看 (5.98) 后有关正规化的讨论.

82 感兴趣的读者可以证明, 对于任意 x 满足 $xf(x)=0$ 的分布 $f(x)$ 必为常数乘以 δ 函数.

正规化是非常困难的. 这在变换理论里是个非常常见的情况, 我们可以通过 4.4 节介绍的思想解决这个问题, 即把它作为 k 的函数进行 "复数化". 在第 4 章, 当 λ 是负实数, 我们才能得到当 $|x| \to \infty$ 时 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 有界的特征函数; 在这里, 只有当 (5.96) 中的 λ 是负实数, 即 k 是纯虚数时, $r \to 0, \infty$ 时的有界性才满足. 因此, 定义 Mellin 变换

$$\widehat{u}(k,\theta) = \int_0^\infty r^{k-1} u(r,\theta)\mathrm{d}r, \tag{5.97}$$

其中 k 是某个适当的复数. 在逆公式中, 我们不用积分 $\int_0^\infty r^k \widehat{u}(k,\theta)\mathrm{d}k$, 而是定义

$$u(r,\theta) = \int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} n(k) r^{-k} \widehat{u}(k,\theta)\mathrm{d}k; \tag{5.98}$$

这里 $n(k)$ 是另一个正规化因子, $r^k \to r^{-k}$ 的符号变化是因为 k 是虚数, 这就要求我们如同在 Fourier 变换中采用共轭内积. 我们希望读者对广义函数的使用能熟悉到理解下面这个式子

$$\begin{aligned}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} (r')^{k-1} r^{-k}\mathrm{d}k &= \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} (r')^{-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\log(r'/r)}\mathrm{d}k \\ &= 2\pi\mathrm{i}(r')^{-1}\delta\left(\log\left(\frac{r'}{r}\right)\right) \\ &= 2\pi\mathrm{i}\delta(r'-r);\end{aligned}$$

倒数第二步是由 (5.89) 和 (4.29) 之前的讨论得到的, 最后一步是因为, 如果 $f(x)$ 单调, 且 $f(0)=0$, 那么 $\delta(f(x)) = |f'(0)|^{-1}\delta(x)$. 因此, $n(k) = 1/2\pi\mathrm{i}$. 我们注意到, 这种 Fourier 变换也可以应用于非平方可积函数, 只要在复平面上上下移动 k, 因此可以在逆公式 (5.98) 里取上下限分别为 $c - \mathrm{i}\infty$ 和 $c + \mathrm{i}\infty$, 公式就会得到更为广泛的应用, 其中 c 是某个实常数.

虽然 Mellin 变换可以如 (5.97) 那样定义, 一般是把 k 用 s 代替, 但是如果用 i 来代替 k 会更合适一些 (这种做法对 Laplace 变换也同样适用).

作为一个例子, 考虑

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

其中

$$u = u_0(r) \quad 在\ \theta = \alpha\ 上, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad 在\ \theta = 0,\ 0 < r < \infty\ 上.$$

当使用 Hankel 变换后, 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\widehat{u}}{\mathrm{d}\theta^2} - k^2\widehat{u} = 0 \tag{5.99}$$

其中

$$\widehat{u}=\widehat{u}_0(k)\quad 在\ \theta=\alpha\ 上,\quad \frac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}\theta}=0\quad 在\ \theta=0\ 上.$$

求解得

$$\widehat{u}(k,\theta)=\widehat{u}_0(k)\frac{\cos k\theta}{\cos k\alpha}.$$

因此有

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}r^{-k}\widehat{u}_0(k)\frac{\cos k\theta}{\cos k\alpha}\mathrm{d}k. \tag{5.100}$$

如果

$$u_0=\begin{cases}1, & 0<r<1,\\ 0, & 1<r<\infty,\end{cases}$$

那么在 (5.97) 中 $\mathrm{Re}k>0$, 所以 $\widehat{u}_0=1/k$, 令 $k=\mathrm{i}\kappa$, 则

$$u=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cosh\kappa\theta}{\cosh\kappa\alpha}\sin(\kappa\log r)\frac{\mathrm{d}\kappa}{\kappa},$$

其中第一项来自 $k=0$ 处的留数.

*5.8.3　Helmholtz 方程

为了避免符号上的冲突, 在这一节, 我们把 Helmholtz 方程里的 k 用 1 来代替. 在对半平面 Helmholtz 方程 $(\nabla^2+1)u=0$ 的变换过程中, 变换平面会 (仍用 k 表示) 出现支点. 比如说, 在 $y=0$ 上给定 Dirichlet 数据 $u(x,0)=g(x)$, 那么关于 Laplace 方程的公式 (5.62) 变成

$$\widehat{u}(k,y)=\widehat{g}(k)\mathrm{e}^{-y\sqrt{k^2-1}}, \tag{5.101}$$

对于 $\sqrt{k^2-1}$ 的定义和逆公式的选择需要多加小心 (注意到我们需要考虑复函数 u). 在这里我们只介绍一种变换解, 它在这一章的后续部分和第 8 章会用到, 它涉及半直线放射线的散射, 称为 Sommerfeld **问题**.

如 5.15 节一样, 考虑平面声波, 它的输入波是 $u_{\text{inc}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\cos(\theta+\alpha)}$, 并且沿 x 负半轴角度为 α 的固体障碍物入射, 其上 u 为零 (如图 5.5). 这样我们得到 $-\pi<\theta<\pi$ 中的 Helmholtz 方程边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+u=0, \tag{5.102}$$

其中

$$u\to 0\quad 当\ \theta\to-\pi,\pi\ 时,$$

并且当 $r\to\infty$ 时 u 满足适当的离开条件. 在 “阴影” 区域 $\pi-\alpha<\theta<\pi$ 中, 这就是 (5.75), 即

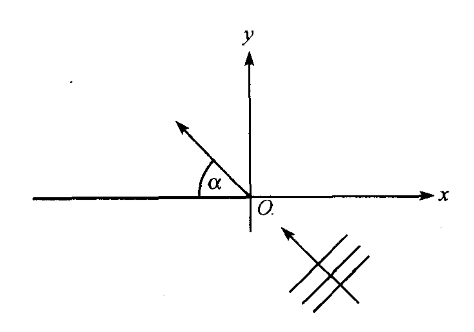


图 5.5 Sommerfeld 问题

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}u = o(r^{-1/2}). \tag{5.103}$$

但在照明区域 $-\pi + \alpha < \theta < \pi - \alpha$ 中, $u - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\cos(\theta+\alpha)}$ 及反射区域 $-\pi < \theta < \pi + \alpha$ 中, $u - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\cos(\theta+\alpha)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\cos(\theta-\alpha)}$ 必满足 (5.103).

和之前的例子一样, 对于算子 $\partial^2/\partial\theta^2$ 的特征值问题是非常简单的, 然而关于 r 的特征值问题是自共轭形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\phi_\lambda}{\mathrm{d}r}\right) + r\phi_\lambda = \frac{\lambda\phi_\lambda}{r}. \tag{5.104}$$

因为 (5.104) 的解的性质很像 $r^{\pm\sqrt{\lambda}}$, 当 $\lambda = 0$ 时, 解的性质像 $\log r$, 当 $r \to 0$ 时, 所以如同 Mellin 变换, 我们要求 λ 是负数. 令 $\lambda = -\kappa^2$, 那么, 只有当 ϕ_λ 与复数阶的 Hankel 函数

$$J_{\mathrm{i}\kappa}(r) + \mathrm{i}Y_{\mathrm{i}\kappa}(r) = H_{\mathrm{i}\kappa}^{(1)}(r)$$

成比例时, 放射性条件 (5.103) 才得以满足. 因此, 我们定义 u 的 Kontorovich-Lebedev 变换

$$\widehat{u}_\kappa(\theta) = \int_0^\infty H_{\mathrm{i}\kappa}^{(1)}(r)u(r,\theta)\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

和 (5.91), (5.99) 一样, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\widehat{u}_\kappa}{\mathrm{d}\theta^2} - \kappa^2\widehat{u}_\kappa = 0. \tag{5.105}$$

但不幸的是, 这里我们不仅需要解决规范化问题, 还要考虑到 Hermite 内积. 因此, 我们只给出结果

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \kappa\widehat{u}_\kappa(\theta)J_{\mathrm{i}\kappa}(r)\mathrm{d}\kappa, \tag{5.106}$$

它可以转化成许多其他的形式. 关于 (5.106) 的另外一种验证方法见习题 5.14.

关于 Sommerfeld 问题还有一个复杂的地方需要考虑. 在上面的论述中, 我们指出需要把输入场去掉以满足条件 (5.103), 但这样导致边界条件: 在 $\theta = \pm\pi$ 上, 当

$r \to 0$ 时 u 非零. 因此在使用 Kontorovich-Lebedev 变换之前需要进行处理, 在这里我们就不推导整个求解过程了, 见习题 5.39.

当然还有其他的方法可以得到这个解, 我们将在下一节中提到其中的一种. 但这些远不如这个事实重要, 那就是, 即使是这个很难的问题, 它在原则上也是服从变换分析的.

最后我们做一些注记, 关于频域内波传播的椭圆型方程理论本质上是 *互易原理*, 它是自共轭椭圆算子 Green 函数的对称性在物理上的解释. 在 5.6.2 节中, 我们提到 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})$, 它表明 $\boldsymbol{\xi}$ 处的点源在 $\boldsymbol{x}$ 所产生的波场与 $\boldsymbol{x}$ 处的点源在 $\boldsymbol{\xi}$ 所产生的波场是一样的. 一个非常有用的情况就是当 $|\boldsymbol{\xi}| \to \infty$, 这时我们可以利用散射问题的结果, 比如上述的 Sommerfeld 问题, 来推导散射体附近点源所产生的远声场的情况.

*5.8.4　高阶问题

在这一节的最后, 我们讨论当 Green 函数和变换应用于高阶问题时所需要注意的一些问题. 首先考虑双调和方程

$$\nabla^4 u = 0,$$

在二维情况下, Green 函数满足

$$\nabla^4 G = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta). \tag{5.107}$$

在二维空间 $\mathbb{R}^2$, 一种方法是对双 Fourier 变换 $(k_1^4 + 2k_1^2k_2^2 + k_2^4)^{-1}$ 求逆, 另外一种更为直接的方法是求方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^2 G = 0 \quad 对\ r > 0 \tag{5.108}$$

的径向对称解, 其中 $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$. 因此, G 是 r^2, $r^2\log r$, $\log r$ 和常数的线性组合, 又由于

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)(r^2\log r - r^2) = \frac{1}{2\pi}\log r,$$

所以我们可以猜测 Green 函数可能是

$$G = \frac{1}{8\pi}(r^2\log r - r^2). \tag{5.109}$$

为了确认 G 确实没有 $\log r$ 这一项, 我们需要依照习题 4.13 和 4.21 的步骤计算 $\nabla^4 \log r$, 那里已计算得 $\nabla^2(\log r) = 2\pi\delta(x)\delta(y)$. 对适当的试验函数 ψ, 我们计算

$(\nabla^4\psi, \log r) = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{r>\varepsilon} \log r \nabla^4 \psi \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因为当 $r > 0$ 时, $\nabla^2 \log r = 0$, 重复使用 Green 公式得到

$$
\begin{aligned}
(\psi, \nabla^4 \log r) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{r>\varepsilon} \psi \nabla^4 \log r \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\iint_{r>\varepsilon} \nabla^4 \psi \log r \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 \psi) \log \varepsilon \mathrm{d}s \right. \\
&\quad \left. - \int_{r=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \nabla^2 \psi \mathrm{d}s \right).
\end{aligned}
$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时, 右端第二项趋近于 0, 最后一项趋近于 $-2\pi\nabla^2\psi(0,0)$, 而这一项我们并不需要, 因此 G 确实没有 $\log r$ 这一项.

双调和方程可以看作是 Laplace 方程的一个推广. 实际上, 因为在二维情况下,

$$
\nabla^4 = 16 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \overline{z}^2}
$$

"通解" 可以写成复变量的形式 $\mathrm{Re}(\overline{z} f(z) + g(z))$, 其中 $z = x + \mathrm{i}y$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$, f 和 g 是任意的解析函数. 但是双调和方程没有最大值原理, 而且由于是四阶方程, 找到特征函数的可能性就减少了. 另外, 由于大多数实际的, 或许是适定的边值问题在闭区域 D 的边界上只有两组边值数据, 所以几乎不可能证明 $\iint_D u\nabla^4 v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D v\nabla^4 u \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 因此, 即使特征函数是完备的, 它们在通常情况下并不正交 (见习题 5.28).

另外一种复杂性出现在向量型方程组中. 我们在 4.7.2 节中已经遇到过这种情况, 它是 Maxwell 方程的稳态形式

$$
\nabla \wedge \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0. \tag{5.110}
$$

在实际中, 通常是给定 $\boldsymbol{j}$ 和一些物理上相关的边界条件求解 $\boldsymbol{H}$. 我们不准备在第 9 章之前系统介绍向量型 Green 函数, 在此我们给出一种相当著名的方法, 它通过标量型 Green 函数求解 (5.110). 我们令 $\boldsymbol{H} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$ 来解除方程 $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ 的约束, 其中 $\boldsymbol{A}$ 称为 ***磁场向量势***, 那么如果 "规范条件" $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 满足, 我们就得到向量型 Poisson 方程

$$
\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{j}. \tag{5.111}
$$

由 Green 函数的结论, 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 有

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} \mathrm{d}\boldsymbol{x},
$$

求旋度得

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\wedge(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^3}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{5.112}$$

这就是著名的 Biot-Savart *电磁场定律*. 如果 j 只是一条电线中的电流, 那么关于 $\boldsymbol{H}$ 的计算就简化成一个曲线积分.

5.9 复变量方法

因为通解是关于 $x+\mathrm{i}y$ (或者 $x-\mathrm{i}y$) 的解析函数的实部, 所以从某种层次上说, 可以认为复变量定理能够解决关于二维 Laplace 方程的所有问题. 我们举个例子来说明前面的陈述: 将 $\nabla^2u=0$ 在 $y>0$ 中, $u(x,0)=f(x)$ 的解写成 Fourier 逆变换的形式

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx-|k|y}\widehat{f}(k)\mathrm{d}k,$$

由此可得

$$u(x,y)=f_+(x-\mathrm{i}y)+f_-(x+\mathrm{i}y), \tag{5.113}$$

其中

$$\widehat{f}_+(k)=\begin{cases}\widehat{f}(k), & k>0,\\ 0, & k<0,\end{cases}\qquad \widehat{f}_-(k)=\begin{cases}0, & k>0,\\ \widehat{f}(k), & k<0.\end{cases}$$

将上面的结果和波动方程的解 (4.67) 作比较, 会发现一件有趣的事情: 如果我们按照同样的思路, 将区域 $z>0$ 中, 满足 $u(x,y,0)=f(x,y)$ 的三维 Laplace 方程的解写成

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+k_2y)-kz}\widehat{f}(k_1,k_2)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2,$$

其中 $k^2=k_1^2+k_2^2$ 以及 $k>0$. 转换到极坐标下, 可以得到

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x\cos\phi+y\sin\phi-\mathrm{i}z)}\widehat{F}(k,\phi)\mathrm{d}k\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\widehat{F}=2\pi k\widehat{f}$. 用类似推导 (4.68) 式的方法, 我们可以得到

$$u(x,y,z)=\int_0^{2\pi}F(x\cos\psi+y\sin\psi-\mathrm{i}z,\psi)\mathrm{d}\psi. \tag{5.114}$$

如果将上面过程中的 z 换成 $-z$ (或者等价地将 ϕ 移动 π), 通过相似的做法, 就可以将三维 Laplace 方程的通解表示成一重积分的形式. 我们对这个结论做些评注.

- 假如 u 关于 z 轴是轴对称的, 可以将 F 写成

$$F(x\cos\psi+y\sin\psi-\mathrm{i}z,\psi)=\frac{1}{2}G(z+\mathrm{i}r\cos(\theta-\psi)),$$

其中 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 于是就有

$$u(x,y,z) = \int_0^{\pi} G(z + \mathrm{i}r\cos\psi)\mathrm{d}\psi; \tag{5.115}$$

显然, $\pi G(z) = u(0,0,z)$.

• 我们可以将这种思路用到三维通解 (5.95) 式上, 即

$$u(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

可是, 这个表达式牵涉函数的卷积, 这些函数是 (4.65) 中的复数形式. (5.95) 式沿着 $x = y = 0$ 的奇异分布是奇异的. 假如我们要求一个轴对称的位势函数在 z 轴上是解析的, 那我们就可以考虑

$$\int_{z-\mathrm{i}r}^{z+\mathrm{i}r} \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{r^2+(z-\xi)^2}},$$

这样就能马上得到上面的 (5.115). 请注意这个方法并不适用于二维空间中的源分布, 比如 (5.63). 但是在二维空间中我们可以利用 (5.113).

这些考察蛮有趣, 但是对于解决实际应用中的边值问题帮助很少. 相反, 我们必须常常求助于 Green 函数和前面介绍的变换技术. 但是应该看到, 有一些复变量方法对解决二维 Laplace 方程的问题来说是非常有价值的.

5.9.1 共形映射

关于复变量 $z = x + \mathrm{i}y$ 的解析函数 $f(z)$ 有三个最与众不同之处, 分别是

1. 它的实部和虚部都是调和函数, 即它们都满足关于 x 和 y 的 Laplace 方程.

2. 只要 $f'(z) \neq 0$, $f(z)$ 将 z 平面中的区域映射到平面 $\zeta = f(z)$, 原来相交成某个角度的曲线, 在映射后仍然相交, 并保持角度不变.

3. $\mathbb{R}^2$ 中的 Laplace 方程是 “共形不变量”, 因为当我们记

$$\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta = f(z) = f(x+\mathrm{i}y)$$

可以发现

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = |f'(z)|^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right).$$

以上性质对于 Laplace 方程以及它的 “平方” 双调和方程的解来说有很重要的意义. 我们曾经提过, 假如一个偏微分方程在某些变换下是不变量, 我们就能够作一些简化, 这里牵涉关于复变量函数的变换, 使得有些东西变得特别有趣. 其中一个结果是能够将某个 Laplace 方程的问题共形映射成另外的 Laplace 方程问题, 而边界

条件可能会发生变化. 这就暗示了一个非常有用的方法, 假如我们要在单连通闭区域 D 中求解具有 Dirichlet, Robin 或者 Neumann 边界数据的 Laplace 方程, 可以显式地将 D 共形映射到单位圆的内部或者外部, 或映射到一个半平面上, 这样就能利用 Green 函数和变换的知识去求解映射后的问题. 这里的关键是要能显式地找到共形映射; Riemann 映射定理保证了共形映射的存在性[83], 在将定理应用到多连通区域的时候要特别小心.

马上可以得到一个推论: 关于 Dirichlet 和 Neumann 问题的 Green 函数映射成 Green 函数. 为简单起见, 考虑 Dirichlet 问题, 假设 $\zeta = f(z, z_0)$ 将区域 D 映射到 ζ 平面上的单位圆, 并且 $z = z_0$ 映射到 $\zeta = 0$, 因此 ζ 平面上的 Green 函数是 $(1/2\pi)\log|\zeta|$. 于是得到

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\log|f(z, z_0)| \tag{5.116}$$

是 z 平面上的 Green 函数. 因为当 $z \to z_0$ 时, $G \sim (1/2\pi)\log|f'(z, z_0)||z - z_0|$, 以及[84] $f'(z_0, z_0) \neq 0$, 就可以得到这个方程在 ∂D 上为 0. 来看一个简单的例子

$$f(z, z_0) = \frac{a(z - z_0)}{a^2 - z\overline{z}_0}, \tag{5.117}$$

其中 a 是实数, f 将 $z = z_0$ 映射到 $\zeta = 0$. 因为当 $|z| = a$ 时 $|a^2 - \overline{z}_0 z| = a|z - z_0|$, 所以 f 还将 $|z| = a$ 映射到 $|\zeta| = 1$, 这显然与 (5.58) 是一致的. 同样地, (5.59) 能从 Cauchy 积分公式中简单推导得到 (见习题 5.22).

另外一个简单应用是关于极坐标下的楔形 $0 < \theta < \alpha$ 中 Dirichlet 问题的 Green 函数. 因为 $\zeta = z^{\pi/\alpha}$ 将这个楔形映射到一个半平面, 由 (5.60) 前面的式子得到

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \overline{z}_0^{\pi/\alpha}}\right|; \tag{5.118}$$

如果 α 是有理数乘上 π, 那么这个公式可以通过镜像法得到[85].

我们给出一个在空气动力学中直接使用共形映射的例子[27]. 考虑气流在流动时以 α 角度经过椭圆 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ 的情况. 速度势 ϕ 在椭圆上满足 $\nabla^2\phi = 0$, 以及 $\partial\phi/\partial n = 0$, 当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时,

$$\phi = U_\infty(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + o(r), \tag{5.119}$$

---

83 我们将在第 7 章进行更多的讨论.

84 默认要求 $\zeta = f(z)$ 是一一对应的, 即 f 是关于 z 的 单叶函数, 这比仅仅要求 "f' 存在和无处为零或无限" 要强.

85 楔形角度是否与 π 成比例对 Laplace 方程的影响不会像 Helmholtz 方程那样明显, 这是因为 Helmholtz 方程不是共形不变方程. 然而镜像法对后者有时还是可以使用的.

我们要注意唯一性的问题, 因为这是外部区域. 这个问题的答案很容易在某本书上找到, 我们提供一种方法: 在椭圆上, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, 并且椭圆由椭圆坐标 $\xi = \xi_0$, $0 \leqslant \eta < 2\pi$ 给出, 其中

$$z = x + \mathrm{i}y = c\cosh(\xi + \mathrm{i}\eta) = c\cosh\zeta, \tag{5.120}$$

这里$c^2 = a^2 - b^2$, $\xi_0 = \dfrac{1}{2}\log((a+b)/(a-b))$. 因此, 我们只要在 $\xi > \xi_0$ 上找一个关于 ζ 的解析函数 $\phi + \mathrm{i}\psi$, 将区域映射到椭圆的外部, 并且在 $\xi = \xi_0$ 上虚部为零 (因此 $\partial\phi/\partial n = 0$), 当 $\xi \to +\infty$ 时函数收敛到 $cU_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\cosh\zeta$ (为了满足 (5.119)). 一个答案是

$$\phi + \mathrm{i}\psi = A\cosh(\zeta - \xi_0 - \mathrm{i}\alpha), \tag{5.121}$$

其中 A 是实数, 使得 $A\mathrm{e}^{-\xi_0 - \mathrm{i}\alpha} = cU_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$. 于是由 $A = cU_\infty \mathrm{e}^{\xi_0}$, (5.121), (5.120) 就能解决这个问题了. 以后我们会再讨论这个问题.

*5.9.2 Riemann-Hilbert 问题

复变理论使我们有可能解决比 Dirichlet 和 Neumann 问题更一般的 Laplace 边值问题. 特别地, 众所周知如何将解析函数 (调和函数也是同样的) 延拓到边界以外. 这就提示我们, 与其在边界 (在这里给出 Dirichlet 条件) 的一侧求解 Laplace 方程, 不如找到边界两边数据的联系, 然后在边界的两边求解. 5.1.6 节给出的断裂和机翼模型就是这种情况的一个原型例子. 我们还能使用这个技术将 Neumann 条件转化为 Dirichlet 条件, 从而去求解变换平面上的一些混合边值问题.

连续解析函数的最重要性质是解析延拓. 虽然这是一个不适定的过程, 但在某些情况下解析延拓是很有用的, 特别是当它能显式表示的时候. 一个例子就是当 $\mathrm{Im}w(z) = 0$, 在 $y = 0$ 上; 则 Schwarz *反射公式*

$$\overline{w(\overline{z})} = u(x, -y) - \mathrm{i}v(x, -y)$$

给出了 $w(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 从 $y > 0$ 到 $y < 0$ 的解析延拓. 这个公式是以下结果的极限情况, $\overline{w(a^2/\overline{z})}$ 给出了在 $|z| = a$ 上虚部为零的函数 $w(z)$ 到 $|z| < a$ 上的解析延拓. 后面这个结果对解决无旋场中的齐次 Neumann 问题有一定的价值 (参见习题 5.26).

总的来说, 当解析延拓的时候奇异性不可避免地就会出现, 这就暗示我们对边界的正则性要求太多了. 研究 Riemann-Hilbert *问题* 的动机来自于考虑以下问题, 函数在区域 D 内除了曲线 Γ 外处处调和, 而在跨越 Γ 时函数有跳跃间断而不解析; Γ 可能是一条分割 D 为 $D_\pm$ 两部分的封闭曲线, 或者是开的. 例如, 假如 Γ 是实轴, 从 (5.60) 可以知道函数

$$u_\pm(x, y) = \pm\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \tag{5.122}$$

在 D_+ $(y>0)$ 和 D_- $(y<0)$ 内是调和的, 在 $y=0$ 上还满足同样的 Dirichlet 条件 $u=g(x)$; 但是, $\partial u/\partial y$ 在跨越 $y=0$ 时有跳跃 (参见习题 5.32). 类似地, 对于 Neumann 问题, (5.63) 告诉我们 $\partial u/\partial y$ 是连续的, 但 u 是跳跃的. 这里要强调的是通过解析延拓这个不适定的方法, 仅能找到在 $y=0$ 上同时满足 Dirichlet 和 Neumann 数据的函数, 但我们能够在 $y>0$ 或 $y<0$ 内分别求解适定的 Dirichlet 或者 Neumann 问题, 代价是要引入 x 轴上的奇异性.

这个讨论为求解诸如机翼模型 (5.29) 和 (5.30) 铺平了道路. 该模型是更一般化的 Riemann-Hilbert 问题, 它要在 D 中找到一个解析函数 $w(z)$, 并且要求当从任意一边逼近曲线 Γ 时, 能写出 w 的极限的一个线性组合. 如果 Γ 是闭的, 将 $w(z)$ 分别写为 $w_+(z)$ 及 $w_-(z)$; 否则, 我们可以在 D 内除了 Γ 以外明确地表示出 $w(z)$. 关键在于用著名的 Plemelj *公式* 将 w 写成一个 Cauchy 积分

$$w(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-z}, \tag{5.123}$$

$f(s)$ 是某个合适的函数. 有一个简单的方法能看看当 z 逼近 Γ 上的一点 t (Γ 在 t 附近是光滑的), 如图 5.6 对 Γ 作变形, 然后取极限 $\varepsilon\to 0$; 注意到这个过程要求在 Γ 以外的地方定义 $f(s)$, 但这不一定能够做到, 但能证明当 f 只是 Hölder 连续时一切都能成立. 首先, 将围道积分的 *主值* 表示为

$$\mathrm{PV}\int_\Gamma \frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-t}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma\backslash\partial D_\varepsilon}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-t}, \tag{5.124}$$

其中 ∂D_ε 是图 5.6 中的点线, 和前面在 (5.67) 中使用的术语是一致的. 当 Γ 是闭的, 可以发现在 Γ 上任意点 $z=t$, $w(z)$ 在 Γ 两边的极限值是

$$w_\pm(t)=\pm\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\mathrm{PV}\int_\Gamma \frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-t},$$

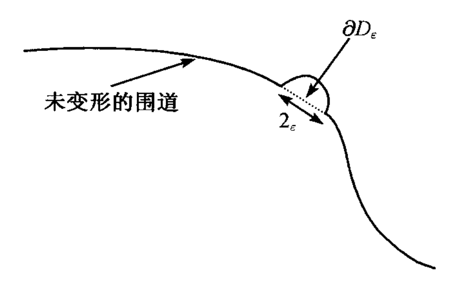


图 5.6　Plemelj 公式的围道

从而导出 Plemelj 公式

$$w_+(t) - w_-(t) = f(t), \tag{5.125}$$

$$w_+(t) + w_-(t) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \mathrm{PV} \int_\Gamma \frac{f(s)\mathrm{d}s}{s-t}. \tag{5.126}$$

当 Γ 有端点或者隅角时这些公式也是适用的, 在这些点上 f 会有奇异积分. 这个事实对于我们在给定 $w_+(t) + w_-(t)$ 的情况下从 (5.126) 求解 f 是很重要的. 这种特殊的情况被用于描述在奇异边界值点附近椭圆型方程解的形态.

除了这些技术, Plemelj 公式还告诉我们, 不要指定 $w(z)$ 在 Γ 上的值, 因为这相当于指定 $\mathrm{Re}w$ 的两段信息, 会导致关于 w 的不适定 Cauchy 问题, 相反, 我们可以指定比较少的信息, 就是 $w_+ - w_-$ (假如能求解积分方程 (5.126), 可以指定 $w_+ + w_-$), 那就可以得到关于 w 的适定问题. 实际上, 某些 Laplace 方程的边值问题能马上写出答案. 比如, 考虑

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{在 } D \text{ 内}, \Gamma \text{ 以外的区域: } y = 0,\ 0 < x < c, \tag{5.127}$$

以及

$$\lim_{y\downarrow\uparrow 0} u(x,y) = \pm g(x) \quad \text{对 } 0 < x < c, \tag{5.128}$$

另外, 在无穷远处 $u \to 0$. 则 $u = \mathrm{Re}w$, 其中 $\mathrm{Re}(w_+ + w_-) = 0$, 在 Γ 上. 因此, 从 (5.126) 可以找到一个解, 此时 f 是实的, 然后从 (5.125) 得到 $f = 2g$, 从而

$$w(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_0^c \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z};$$

这个方程的实部就是 (5.122) 的例子.

同样地, 假如将 (5.128) 改为

$$\lim_{y\downarrow\uparrow 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \pm g(x), \tag{5.129}$$

当 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = \partial u/\partial x - \mathrm{i}\partial u/\partial y$ 就可以得到 $u = \mathrm{Re}w$, (5.126) 表示存在一个解, 此时 f 在 x 轴上是纯虚的. 然后从 (5.125) 得到 $f = -2\mathrm{i}g$, 由此可得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}.$$

积分得到

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c f(\xi) \log((x-\xi)^2 + y^2)\mathrm{d}\xi, \tag{5.130}$$

如 (5.63), 上式可以加上任意常数. (5.122) 和 (5.130) 都可以被解释为沿 $y = 0$, $0 < x < c$ 的奇异点分布, 或者等价地被视为 Green 函数. 从物理上说, (5.122) 中

的奇异点被称为双极点, 因为这牵涉“源”或者“磁单极子” $(1/2\pi)\log r$ (出现在 (5.130)) 的导数.

我们不能直接用 Plemelj 公式去求解 Laplace 方程的边值问题, 除非函数值或者它的法向导数是精确相等和相反. 但是对机翼问题 (5.29) 和 (5.30) 来说, 不存在这样的问题, 因为有方法将任意的 Riemann 问题变为能够直接求解的问题. 假设我们知道的所有条件为在 Γ 上

$$\alpha(t)w_+(t) + \beta(t)w_-(t) = \gamma(t), \tag{5.131}$$

其中 α, β, γ 是已知和解析的, 并且 α 和 β 不为零. 首先来看齐次问题

$$\alpha(t)W_+(t) + \beta(t)W_-(t) = 0, \tag{5.132}$$

原则上可以求解, 因为

$$\log W_+ - \log W_- = \log\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right); \tag{5.133}$$

于是由关于 $\log W$ 的 Plemelj 公式得到

$$W_\pm(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{\log(-\beta/\alpha)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}\right).$$

参照前面证明不唯一性时的过程, 可以知道选取不同的对数分支会得到不同的 W; 显然, 任意整函数能被添加到 $\log W$ 上, 并且不影响 (5.133). 还有一点值得注意: 当 D 无界时, W 自动满足 $\log W = O(1/z)$. 让我们再返回到 (5.131), 这个式子变成了

$$\left(\frac{w}{W}\right)_+ - \left(\frac{w}{W}\right)_- = \frac{\gamma}{\alpha W_+} = -\frac{\gamma}{\beta W_-},$$

这样就能求解 w/W, 于是求出显式的 w. 求得的结果看起来很复杂, 但是它包含了回答某些关键问题的答案, 这些问题在机翼问题里就曾经提过. 这里我们只考虑一个有趣的薄机翼问题, 这时候有 $f_+ = f_- = f$, 从 (5.30) 可知当 y 从上下同时逼近 $\Gamma: y = 0, 0 < x < c$ 时有

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial y} \to Uf'.$$

我们来看看 $w(z)$, 可以得到 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = \partial\widetilde{\phi}/\partial x - \mathrm{i}\partial\widetilde{\phi}/\partial y$ 和

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_+ = \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_- = -Uf'. \tag{5.134}$$

因此, $(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_+ - (\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_-$ 是实的, 记为

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_+ - \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_- = g(x), \tag{5.135}$$

由 (5.123) 和 (5.125),

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^c\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi-z}. \tag{5.136}$$

另一个 Plemelj 公式 (5.126) 给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_++\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_-=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{PV}\int_0^c\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi-z}$$

是纯虚数, 而 (5.134) 告诉我们

$$2Uf'=\frac{1}{\pi}\mathrm{PV}\int_0^c\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi-z}. \tag{5.137}$$

Plemelj 公式只是将问题转化为一个关于 g 的 Cauchy 奇异积分方程.

为了更深入研究, 我们利用 (5.132) 将已知的 $(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_++(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_-$ 转换为关于 $(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_+ - (\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_-$ 的方程, 设 W 满足

$$W_+(x)+W_-(x)=0. \tag{5.138}$$

然后从下面的式子可以得到想要的关于 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 的公式

$$\frac{1}{W_+}\left[\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_++\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_-\right]=-\frac{2\mathrm{i}Uf'}{W_+}; \tag{5.139}$$

式子左边是 $((1/W)\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_+-((1/W)\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)_-$, 因此由 (5.125) 和 (5.123),

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-\frac{W(z)}{\pi}\int_0^c\frac{Uf'(\xi)\mathrm{d}\xi}{W_+(\xi)(\xi-z)}. \tag{5.140}$$

于是, 由 (5.135) 可以得到

$$g(x)=\frac{2W_+(x)}{\pi}\mathrm{PV}\int_0^c\frac{Uf'(\xi)\mathrm{d}\xi}{W_+(\xi)(\xi-x)}, \tag{5.141}$$

这就给出了 (5.137) 的解[86].

但是 $W(z)$ 是什么呢? 通过观察来求解 (5.138) 是可能的, 但我们能更系统地求解, 将式子取对数得到

$$\log W_+-\log W_-=(2k+1)\mathrm{i}\pi,\quad k\text{ 是整数}; \tag{5.142}$$

于是由 (5.125) 和 (5.123) 得到

$$\log W=\frac{2k+1}{2}\int_0^c\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-z}=\frac{2k+1}{2}\log\left(\frac{z-c}{z}\right).$$

86 虽然 (5.140) 和 (5.136) 看起来不同, 但当 g 满足 (5.141) 时它们是一样的.

因此

$$W_+(x) = 常数 \cdot \left(\frac{c-x}{x}\right)^{(2k+1)/2}. \tag{5.143}$$

(5.143) 式意味着, 对 $((c-z)/z)^{(2k+1)/2}$ 的分支切割在 $z=0$ 与 $z=c$ 之间进行, 由于 W 在 $z=\infty$ 处解析, 这一点是必要的.

最后让我们考虑唯一性的问题. 通过对前面的许多注记的了解, 我们希望得到更多的关于机翼前缘和后缘部位的解的唯一性的信息[87], 这是能够做到的. 深入了解空气动力学的知识就能解释为什么和物理性质相关的解会有如下性质: $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 在 $z=c$ 附近是有界的, 而在 $z=0$ 附近是趋向于无穷, 和 $z^{-1/2}$ 同阶, 这是从 Kutta-Joukowsky 条件 得到的. 假如我们假设这就是对解的要求, 在无穷远处要求 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = O(1/z)$, 那仅仅需要在 (5.143) 中取 $k=0$, 这是 W 沿着机翼的分支切割. (5.140) 最终可以写为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{i}U}{2\pi}\left(\frac{z-c}{z}\right)^{1/2}\int_0^c \left(\frac{\xi}{c-\xi}\right)^{1/2}\frac{f'(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}. \tag{5.144}$$

一件有趣的事情是能用质量控制的方法去检验这个结果. 椭圆是一种可能精确得到连续流的简单机翼模型, 假定这个解是 (5.121). 但如果在 (5.121) 中令 $b\to 0$, 这样椭圆就成了一个扁盘, 我们马上就能发现当 α (相当于 $f'(\xi)$) 趋向于零时会得到和 (5.144) 不同的结果; 当 $|z|\to\infty$, 从 (5.144) 得到 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = \mathrm{i}\Gamma U/2\pi z + o(1/z)$, 其中 $\Gamma = \displaystyle\int_0^c (\xi/(c-\xi))^{1/2} f'(\xi)\mathrm{d}\xi$, 但 (5.121) 中 w 是复势函数与 $U_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}z$ 之差, 从而 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 的阶是 $O(1/z^2)$. 这是因为在 (5.121) 我们忽略了所有这样的特征解[88]: w 在特征解里面当 $z\to\infty$ 具有实常数 $\mathrm{i}\log z + O(1)$ 的形式. 有个最简单的方法能做到这一点, 就是将椭圆映射到圆, 然后在极坐标中加上一个特征解 $\phi = K\theta$ (见习题 5.27). 如果将 K 取为 $\Gamma U/2\pi$, 这个公式就和 (5.144) 相一致了, 并使得 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 在机翼后缘 $z=c$ 有界; 取 $K=0$ 相当于在 (5.142) 令 $W = (z(z-c))^{-1/2}$. 当考虑流体的压力时, 可以发现机翼的抬升和 K 成比例; 因此就有了一个甚至牵涉飞机的重要结论, 如果没有利用 Kutta-Joukowsky 条件引入的特征解, 机翼就不可能抬起.

机翼问题是重要的, 但也是个特殊的问题, 因为我们很幸运地能用 Plemelj 公式导出物理上可接受的解, 这要归功于当 $z\to\infty$ 时 (5.135) 有良好的性态. 在接下来的例子里面, 无穷远处的性态和区间端点处的奇异性这两者之间的相互影响就没有那么明显了.

---

87 假如放宽 (5.124) 中对 $\log W$ 的要求, 可以得到更多的解, 比如 $W(z) = z^{(2m+1)/2}(z-c)^{(2n+1)/2}$, 其中 m 和 n 都是整数.

88 在 5.2.1 节的末尾曾经利用流型区域的双连通性说明了特征解的存在.

*5.9.3 混合边值问题和奇异积分方程

在断裂力学模型 (5.31) 和 (5.32) 中曾经遇到过原始的混合边值问题. 实际上, 这也是最简单的边界数据有奇性的椭圆问题, 可以用来说明一些复杂的方法. 模型中要在 $\mathbb{R}^2$ 中求解 $\nabla^2 w = 0$, 区域中有段裂缝 $y = 0, -c < x < c$ (即 Γ), 边界条件为: 在 $y = 0, -c < x < c$ 处 $\partial w/\partial y = 0$, 在 x 轴的其余地方 $w = 0$, 在无穷远处 $w = \tau y + O(1)$. 为了简单起见, 记 $w = \tau y + u$, 从而

$$\nabla^2 u = 0 \quad 对\ y > 0, \tag{5.145}$$

且

$$u = 0 \quad 在\ y = 0, |x| > c\ 上, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\tau \quad 在\ y = 0, |x| < c\ 上, \tag{5.146}$$

另外, 我们不仅要求当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时 $u \to 0$, 还要规定在裂缝端点 $(\pm c, 0)$ 处 u 的一些性态.

一个讨论的方法是将 u 写成能反映沿裂缝的奇性分布[89]; 参照 (5.66) 中的演算, 有

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} g(\xi)\arctan\left(\frac{y}{\xi - x}\right)\mathrm{d}\xi \quad 当\ -\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{y}{\xi - x}\right) < \frac{\pi}{2}, \tag{5.147}$$

因此, 当 $y \neq 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{g(\xi)(\xi - x)\mathrm{d}\xi}{(\xi - x)^2 + y^2},$$

如同 (5.68), 容易证明以下奇异积分方程

$$-\tau = \mathrm{PV}\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - x)^2} \quad 对\ |x| < c. \tag{5.148}$$

从 (5.137) 可以知道这是关于扁平机翼的非平凡的问题. 因为方程在 $z = -c, c$ 和 ∞ 的奇异性, 所以只要将 Plemelj 公式直接应用到 (5.123) 就能求解机翼问题, 但是裂缝模型在物理上有要求, 所以必须引进额外的特征解. 这些特征解可以得到, 因为注意到像在 (5.138) 中定义的 W 乘上 $(z + c)^m(z - c)^n$, 其中 m 和 n 都是整数, 并且要使其在 $z = -c, c$ 和 ∞ 处的性态与物理上的要求相一致, 即 $|\nabla u|$ 的增长与裂缝端点距离的平方根的倒数一致, 且在无穷远处 $u \to 0$. 幸运的是, 在这个例子中可以避免求解 Riemann-Hilbert 问题, 而是认为相应的解是

$$u = \mathrm{Im}(-\tau z + \tau\sqrt{z^2 - c^2}), \tag{5.149}$$

89 在固体力学里面, 有时候这些奇性表示 (虚) 断层.

其中当 $z \to \infty$ 时 $\sqrt{z^2-c^2} \to z$ (或者可以提别的条件, 见习题 5.29). 这反应了著名的尖端 *应力集中* 现象: 我们发现, 在 $y=0$ 上,

$$u = \begin{cases} \tau\sqrt{c^2-x^2}, & |x|<c, \\ 0, & |x|>c \end{cases}$$

以及

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} -\tau, & |x|<c, \\ \tau(x/\sqrt{x^2-c^2}-1), & |x|>c. \end{cases}$$

当 $|x|>c$ 时, 应力的系数 τ 的大小会造成易碎材料断裂与否的不同差别! 但令人感兴趣的数学结果是: (5.148) 的相关解是[90] $g(x) = -\tau x/\sqrt{c^2-x^2}$.

要指出的是这个问题和机翼问题都显示了关于奇异性的一种 "刚性". 在两个问题中, 我们都使得奇异性出现在某几个点上 (即 Γ 的端点和无穷远处), 这可能比其他点更好或更坏. 同样地, 我们能使奇异性出现在机翼后缘, 这比在前缘讨论更好, 但我们不可能同时在两段边界同时获得有限速度, 除非流型关于 x 轴对称.

*5.9.4　Wiener-Hopf 方法

有了前面讨论机翼和断裂模型的准备, 我们就可以开始讨论和混合边值问题相关的著名方法, 这就是 Wiener-Hopf *方法*. 我们甚至不需要像 (5.145) 和 (5.146) 那样复杂的模型就能说明这个方法. 假设有一个椭圆混合边值问题

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{对 } y>0$$

其中

$$u=0 \quad \text{在 } y=0, x>0 \text{ 上}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad \text{在 } y=0, x<0 \text{ 上},$$

并且在极坐标中, 当 $r^2=x^2+y^2\to\infty$, $u=r^{1/2}\sin(\theta/2)+O(r^{-1/2})$, 当然, 在原点处有奇性, 很快我们会讨论这一点. 通过观察就能得到问题的答案, 但这里我们还是利用 Fourier 变换方法, 令 $\widehat{u}(k,y)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$, 可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\widehat{u}}{\mathrm{d}y^2} - k^2\widehat{u} = 0, \quad \text{因此 } \widehat{u} = A(k)\mathrm{e}^{-|k|y}.$$

---

90 可以检验这个结果, 在 (5.148) 中记 $\xi = c\sin\theta$, 得到

$$\mathrm{PV}\int_{-c}^{c} \frac{\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi-x} = \mathrm{PV}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sin\theta-x} = \pi + x\mathrm{PV}\int_{-1}^{1}\frac{2\mathrm{d}t}{2t-x(1+t^2)},$$

其中 $t=\tan(\theta/2)$. 最后一个积分能够根据初等函数的方法计算出来, 其结果是零. 另外一个用围道积分推导结果的方法见习题 5.30.

这里不能确定 $A(k)$, 因为在 $y=0$ 上 u 或者 $\partial u/\partial y$ 不是全部给出. 但我们可以令

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\begin{cases}f(x), & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad u(x,0)=\begin{cases}0, & x>0,\\ g(x), & x<0,\end{cases}$$

其中当 $x>0$ 时 $f(x)$ 未知, 同样地, 当 $x<0$ 时 $g(x)$ 未知, 从而可以得到 $A(k)=\widehat{g}(k)=-\widehat{f}(k)|k|$. 这就给出了关于三个未知量 A, $\widehat{f}$ 和 $\widehat{g}$ 的两个方程, 但是有两个重要的信息能使我们得出解. 第一个信息是, 既然 $\widehat{f}(k)=\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$, 那这个积分是存在的并且当 $\mathrm{Im}k$ 足够大而且是正数时, 在上半平面 $\widehat{f}(k)$ 是解析的; 类似地, 第二个信息是, 当 $\mathrm{Im}k$ 足够大而且是负数时, 在下半平面 $\widehat{g}(k)$ 是解析的.

于是我们得到类似于 Riemann-Hilbert 问题, 因为在复 k 平面上有一条直线, 可能是 $\mathrm{Im}k=$ 常数, 其上 $\widehat{f}$ 和 $\widehat{g}$ 都是解析的, 或者两者解析的区域重叠成带状. 如此一来, 传统的 Wiener-Hopf 方法就是令 $\widehat{f}=\widehat{f}_+$ 以及 $\widehat{g}=\widehat{g}_-$ (下标表示解析区域), 从而将

$$\widehat{f}_+(k)+|k|\widehat{g}_-(k)=0$$

写成如下形式

$$\widehat{f}_++\frac{K_-}{K_+}\widehat{g}_-=0, \tag{5.150}$$

其中关于 $|k|$ 的"因式" $K_+(k)$ 和 $K_-(k)$ 分别在复 k 平面的上半平面和下半平面解析. 如果 (5.150) 成立, 通常就会有 $\widehat{f}_+K_+$ 是在上半平面解析, 并且能够解析延拓到下半平面, 根据 (5.150), 在这里等于 $-\widehat{g}_-K_-$, 这个式子在下半平面同样是解析的. 因此, $\widehat{f}_+K_+$ 和 $-\widehat{g}_-K_-$ 为整函数, 即对于有限的 k 没有奇性, 并且两个函数都等于一个整函数 $\widetilde{E}(k)$. 使用 Liouville 定理来确定这个整函数是容易的, 只要足够细心去考虑 u 在无穷远处的性态, 但"因式分解"是其中的难点. 原则上说, 如果熟悉 Riemann-Hilbert 问题, 就不存在困难, 因为要将一个任意的非零函数 $K(k)$ 写成 K_-/K_+ 的形式, 首先要令 $\gamma(k)=-\log K(k)$, 然后在等高线 $\mathrm{Im}k=k_0$ 上考虑

$$G(k)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\gamma(k')}{k'-k}\mathrm{d}k',$$

这样定义的函数满足, G_+ 在 $\mathrm{Im}k>k_0$ 是解析的, 而 G_- 在 $\mathrm{Im}k<k_0$ 是解析的. 进一步, 根据 Plemelj 公式, 当 $\mathrm{Im}k\to k_0\pm 0$ 时两者的差是 $\gamma(k)$. 于是, 我们就定义了两个函数 $G_\pm$ 满足 $\gamma(k)=G_+-G_-$, 这样我们就对 $K(k)=\exp(-\gamma(k))$ 做了"因式分解". 当然, 如同在大多数 Riemann-Hilbert 问题中碰到的公式一样, 刚才的结果令人感觉不舒服. 实际上, 虽然可以对 $\log|k|$ 实施同样的处理从而得出结果, 但我们可以采用另外一种方法, 令

$$|k|=\lim_{\varepsilon\to 0}(k-\mathrm{i}\varepsilon)^{1/2}(k+\mathrm{i}\varepsilon)^{1/2},$$

其中分支切割必须分别沿着 $(\mathrm{i}\varepsilon, \mathrm{i}\infty)$ 和 $(-\mathrm{i}\varepsilon, -\mathrm{i}\infty)$. 因此, 可能有下面的因式分解

$$K_-(k) = (k - \mathrm{i}\varepsilon)^{1/2}E(k), \quad \text{从 } \mathrm{i}\varepsilon \text{ 到 } +\mathrm{i}\infty \text{ 的分支切割},$$

$$K_+(k) = (k + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1/2}E(k), \quad \text{从 } -\mathrm{i}\varepsilon \text{ 到 } -\mathrm{i}\infty \text{ 的分支切割},$$

其中 $E(k)$ 是某个整函数. 因此, 令 $\varepsilon \to 0$ 并保持分支切割不变, 有

$$k^{-1/2}\widehat{f}_+(k) = -k^{1/2}\widehat{g}_-(k) = \frac{\widetilde{E}(k)}{E(k)}.$$

现在我们可以猜测需要的奇性是当 $r \to 0$ 时 $g(r) = O(r^{1/2})$ 及 $f(r) = O(r^{-1/2})$, 很快就会知道关于 r 的其他指数都会导致解不存在或者不唯一. 这就有 (参见习题 5.35), 当 $k \to \infty$,

$$\widehat{g}_-(k) = O\left(\int_{-\infty}^{0} (-x)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right) = O(k^{-3/2})$$

对 $\mathrm{Im}k < 0$, 以及

$$\widehat{f}_+(k) = O\left(\int_{0}^{\infty} x^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right) = O(k^{-1/2})$$

对 $\mathrm{Im}k > 0$. 因此, 当 $k \to \infty$,

$$\begin{aligned} k^{-1/2}\widehat{f}_+(k) &= -k^{1/2}\widehat{g}_-(k) \\ &= \frac{\widetilde{E}(k)}{E(k)} \\ &= O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

现在就可以应用 Liouville 定理了. 因为如果 $E(k)$ 仅在 $k = 0$ 处为零, 我们有 $\widetilde{E}(k)/E(k) = C/k$, C 是某个常数. 为了使 E 有这个性质, 当挑选 K_+ 和 K_- 时, 必须保证它们分别在上半平面和下半平面不为零. 如果不要求这个条件, 就没有办法控制 $\widetilde{E}/E$, 同样也不能控制 $\widehat{f}_+(k)$ 和 $\widehat{g}_-(k)$.

现在我们知道 $\widehat{f}_+(k) = Ck^{-1/2}$, 因此由逆变换得到

$$f_+(x) = \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty+\mathrm{i}0}^{\infty+\mathrm{i}0} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k}{\sqrt{k}} = \frac{\mathrm{i}C}{2\pi\sqrt{-x}}\int_{-\infty+\mathrm{i}0}^{\infty+\mathrm{i}0} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}\mathrm{d}s}{\sqrt{s}}.$$

最后, 通过选择一个合适的 C (可以通过观察在 k 比较小的时候 $\widehat{f}(k)$ 的性态来得到), 就能得到期待的结果

$$f = -\frac{1}{2r^{1/2}},$$

所以就有 $u \equiv r^{1/2}\sin(\theta/2)$.

上面的例子并不足以说明 Wiener-Hopf 方法, 这个方法是解决许多混合边值问题的有力工具, 尤其是对 Helmholtz 方程及其推广. 建议读者参考 [24], 那里得到了 Sommerfeld 问题的解.

我们用两个关于椭圆问题奇性的注记的讨论作为总结.

*5.9.5 奇异性和指标

在介绍方程的章节, 我们提出了 "裂缝" 问题和 "接触" 问题这两者有什么差异的疑问, 这进一步说明了描述椭圆型方程的解在靠近边界处的奇异性的重要性. 在接触问题或者 Hertz 问题 的实际模型中许多内容能进行深入的研究, 因为它们如同平面应变 (见 5.1.4.4 节), 也就是和双调和方程一样复杂. 可以说这同混合边值问题有关, 因为接触区域的周长表示了边界条件的变化, 也就是奇异性的位置. 但和许多裂缝问题的区别是事先并不知道接触区域; 问题自己决定接触区域会出现在哪里, 可以根据接触处压力变大并且没有破裂发生的事实来决定接触区域. 第 7 章会全面讨论此类问题, 但这里有一个简单例子能够用来说明接触和裂缝问题两者之间的区别.

先不考虑两个弹性体之间的接触, 假设在 (x,y) 平面上有一大而光滑的扁平弹性膜, 然后把它放在一光滑细金属线上, 金属线为 $z=f(x)$, 在 $y=0$ 中, 这样膜就产生了变形; 为了简单起见假设 f 是光滑的, 并且 $\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2<0$ 及 $f(0)>0$. 因此, 横向位移 $z=u(x,y)$ 满足

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{除了 } y=0,\ -c\leqslant x\leqslant c \text{ 以外},$$

及

$$u(x,0)=f(x) \quad \text{对 } |x|<c, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad \text{对 } |x|>c,$$

其中未知数 c 决定了接触区域的边界; 我们不希望在 $x=\pm c$ 处有应力集中的情况出现. 我们还要描述当 $x^2+y^2\to\infty$ 时 u 的性态, 回忆在裂缝问题 (5.145) 和 (5.146) 中有 $|\nabla u|\to$ 常数, 所以我们希望在无穷远处 $|\nabla u|$ 变得很小[91].

---

91 等价地, 我们可以考虑一个和裂缝问题类似的问题, 位移 u_0 满足

$$u_0(x,0)=\begin{cases} f(x), & |x|<c_0, \\ 0, & |x|>c_0. \end{cases}$$

这样边界条件就是

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0 \quad \text{对 } |x|<c, \qquad u=\begin{cases} -f(x), & c<|x|<c_0, \\ 0, & c_0<|x|. \end{cases}$$

这就可能有当 $y\to\infty$ 时 $u=-\tau y+O(1)$, 其中 τ 是裂缝的闭合应力, 我们的任务是要找到 c 使得 $\partial u/\partial y(c,0)$ 是有界的.

根据我们已有的关于混合边值问题的理论, 令 $w(z) = u + \mathrm{i}v$, 马上就能得到关于 x 是对称的, 在 $(\pm c, 0)$ 处没有压力变大的情况, 当 $|z| \to \infty$ 时尽可能小的解为

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\sqrt{c^2 - z^2}\int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \xi^2}} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi - x}.$$

注意这个公式和典型的断裂公式的差别. 同样, 因为

$$\int_{-c}^{c} \frac{1}{\sqrt{c^2 - \xi^2}} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}\xi = 0$$

是对称的, 当 $|z| \to \infty$ 时 u 关于 $|z|$ 是呈对数增长的, 因此, 在远离障碍的地方, u 与中心在障碍处的 Laplace 方程的 Green 函数近似成比例. 因此, 在远处障碍的影响就被限制在一个点上.

有一点很重要, c 必须使得薄膜在边界处压力作用下保持平衡. 令无穷远处 $u = K \log(x^2 + y^2)^{1/2} + O(1)$, 其中 K 告诉我们把薄膜推向障碍的困难性, 可以看到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} \frac{\xi}{\sqrt{c^2 - \xi^2}} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} \mathrm{d}\xi = K. \tag{5.151}$$

就是这个条件决定了 c.

通过了解奇异性是如何影响这些模型能说明 指标 是如何被用来刻画奇异性的. 这种想法的基本思想是, 在复平面上用遍历一封闭曲线的 Cauchy 积分去描述一解析函数, 然后计算函数的变化. 这个原理等价于计算解析函数的零点的数量, 函数的实部是在边界两侧 Laplace 方程的解. 由此得出结果, 假若在封闭边界 Γ 上有

$$\alpha(t)w_+(t) + \beta(t)w_-(t) = 0,$$

则 $w_+(t)$ 和 $w_-(t)$ 在定义域中的零点总数就是沿着 Γ 走一遍时 $-\alpha/\beta$ 的辐角变化次数. 显然, 辐角的变化提供了一个对 "力" 的全局测量方法, 即 z 的幂次控制着 Laplace 方程的解在边界上的奇异点的所有局部性质, 具体可以见 [20]. Riemann-Hilbert 理论能将问题简化为一个奇异积分方程, 然后就能将指标理论看成是应用于通常的有平方可积核的积分方程的 Fredholm 二择性定理的推广[42]: 容易说明其中的原理, 因为只有当 r (与特定奇异点的距离) 的幂次的和等于指标, 解才是唯一的.

*5.10 局部化边界数据

与双曲型方程不同的是, 椭圆边值问题的解的奇异性不会传播, 所以就没有类似 4.5.5 节和习题 4.22 中出现的局部化 Cauchy 数据问题. 然而, 我们可以提出以下有趣且实用的问题:

假设椭圆边值问题的解在一个尺寸为 $O(1)$ 或者更大的区域 D 中的变化为 $O(1)$ 或更小. 在 D 的一小段边界 ∂D_ε 上引入 Dirichlet 或者 Neumann 条件. 这样是否会使解在除了靠近 ∂D_ε 的区域以外有 $O(1)$ 的变化?

例如, 假设 D 是单位圆盘, 调和函数 $u(x,y)$ 在边界上为零. 所以 $u \equiv 0$. 然而, 如果我们要求在 $x^2+y^2=\varepsilon^2$ 处 $u=1$, 则解为 $u=\log(x^2+y^2)/(2\log\varepsilon)$, 除非 x^2+y^2 很小, 否则 u 是个小量. 为了使 u 在 ∂D_ε 以外的其他地方有 $O(1)$ 的变化, 我们要加上 $O(\log\varepsilon)$ 的 Dirichlet 数据, 或者 $O(1/\varepsilon)$ 的 Neumann 数据. 但是, 裂缝和机翼模型的研究方法告诉我们, 如果 D 是 $\mathbb{R}^2$ 且在靠近 $y=0, 0<x<1$ 处的曲线 $y=\varepsilon f_\pm(x)$ 上 $u=1$, 在 ∂D_ε 上 u 有界, 在无穷远处 $u=O(1)$, 则当 $\varepsilon\to 0$ 时, $u\to(\theta_1+\theta_2)/\pi$, θ_1 和 θ_2 分别是中心在 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 的极角. 因此, 虽然当 $\varepsilon\to 0$ 时 D 以外的区域面积为零, 但是在边界加上 $O(1)$ 的 Dirichlet 数据并不能使解在不靠近边界的地方产生 $O(1)$ 的变化.

这种情形的适当术语来自于 5.1 节的静电场模型. 对常数 Dirichlet 数据 u_0,

$$\frac{1}{u_0}\int_{\partial D_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

称为 ∂D_ε 的 *容积*; 当 $\varepsilon\to 0$ 时在第一个例子中它是 $O(|\log\varepsilon|^{-1})$, 在第二个例子是 $O(1)$. 更普遍的结果是, 对 Laplace 方程, 两维空间上的一个点容积为零, 光滑曲线有有限容积. 同样地, 在三维空间中一个点或者一条光滑曲线容积为零, 光滑曲面有有限容积. 更复杂边界 ∂D_ε 的长期影响是一个重要的问题, 在研究曲面的粗糙程度造成的影响时经常出现. 这是根据齐次化的渐近方法得到的最好答案, 关于容积的理论可以在 [33] 中找到详细介绍.

5.11 非线性问题

到目前为止本章中考虑的大多数问题都是线性问题, 应用的方法大多数只对线性问题适用. 不考虑一些特殊的结果, 对比第 4 章, 总的来说, 我们能分析的线性问题要么是适定的 (当然, 除非我们在解 Cauchy 问题), 要么就是没有解, 除了某些特殊情况. 根据 Fredholm 二择性定理这是个不可回避的结果, 尽管是偏导数的出现使得问题在技术上比线性代数方程或线性常微分方程更复杂. 特别地, 在微分方程的边界或系数上的奇异性, 使得问题需要更多的关注.

我们希望当引入非线性时, 按某种期望的方案推进研究. 特别地, 我们希望研究非线性项相对于线性项越来越大时所产生的影响. 在适定的线性问题中加上足够小的非线性项, 很可能问题还是适定的, 但在其他情形, 就会出现更戏剧性的性态. 但是, 我们不能像在线性方程中一样, 依靠解的显式表达式去研究非线性方程. 因

此, 这一章大多数内容和推导总体存在性、唯一性和光滑性的方法有关. 我们先简短地回顾一些普通的仅能用非线性椭圆型方程建模的实际应用问题.

5.11.1 非线性模型

一个化学反应发热过程产生热量的速率和温度 T 有关, 通常可以表示为 "Arrhenius" 函数 $f(T) \propto \mathrm{e}^{-E/RT}$, 其中 E 和 R 是常数. 如果热流等于 $-\nabla T$, 则 T 满足

$$\nabla^2 T + f(T) = 0. \tag{5.152}$$

这个稳态方程是否有解取决于热传导能否足够快得抵消反应产生的热量. 反应浓度模型与之类似, 只要用反应浓度 c 代替 T. 当 $f(c) > 0$ 时这个反应称为 *自身催化* 的.

在流体力学中, 如果考虑二维稳态非黏性流, 并且不像 5.1.4.1 节那样假设流体是无旋的, 可以发现如果定义旋涡为

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge (u(x,y), v(x,y), 0) = (0, 0, \omega(x,y)),$$

则取 ρ 为常数, (2.6) 的旋度为 $u\partial\omega/\partial x + v\partial\omega/\partial y = 0$. 因此, 由于流函数 ψ 满足 $u\partial\psi/\partial x + v\partial\psi/\partial y = 0$ 以及 $\omega = -\nabla^2\psi$, 有

$$\nabla^2\psi + f(\psi) = 0,$$

其中 f 是由问题决定的函数, 而不是像 (5.152) 直接给出函数形式[92].

同 5.1.3 节一样, 不难想象能将对流项引入, 这就在 (5.152) 中引入了一阶导数, 或者引入向量值因变量.

另一方面, 我们在 4.8 节中就评论说, 亚音速稳态非黏性气流模型会导出关于速度势的拟线性椭圆方程, 能够用速矢图的方法使方程线性化. 同样地, 5.1 节中列出的一些情况的简单推广也会导出拟线性问题. 例如, 假设 5.1.4.4 节中的 Darcy 流体是可压缩气体, 而不是不可压流体. 那么在等温流体里面质量守恒方程 $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$ 导出

$$\nabla \cdot (\rho(P)\nabla P) = 0, \tag{5.153}$$

其中 ρ 是一个由压力 P 描述的函数. 同样地, 速度为 $(0, 0, w(x,y))$ 的单向变黏性系数不可压流动流体, 在

$$\nabla \cdot (\mu\nabla w) = 0 \tag{5.154}$$

92 同样的模型能够从等离子限制中[17] 得到, 在第 7 章会重新讨论.

的条件下仅仅满足慢速流体方程 (5.24) 和 (5.25)[93]. 如果是非 Newton 流体, 有时可以假设 $\mu \doteq \mu(\nabla w)$. 注意到通过 Kirchhoff 变换 $u = \int^{P} \rho(P')\mathrm{d}P'$ 可将 (5.153) 变换为 Laplace 方程. 但是, (5.154) 却不是那么容易线性化的; 当 $\mu = |\nabla w|^{p-2}$, 它被称为 p-Laplace 方程, 在通常的 Dracy 流体中, 速度–压力定律使得非线性形式为 $|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v} = -k\nabla P$, 这就得到了关于 P 的 3/2-Laplace 方程. 通过基本计算 (见习题 5.43) 可以证明 p-Laplace 方程仅在 $p > 1$ 时是椭圆的, 所以不要错误地认为所有像 (5.154) 那样的守恒律都是椭圆的[94].

5.11.2 存在性和唯一性

5.11.2.1 比较方法

对于半线性方程, 我们能够像在 5.3 节中那样利用最大值原理从上下逼近序列的极限去找解. 为了简单起见, 考虑如下形式的方程

$$\nabla^2 u + f(u) = 0 \quad 在 D 内, \tag{5.155}$$

Dirichlet 数据

$$u = g(x) \quad 在 \partial D 上, \tag{5.156}$$

对于 Robin 边界条件, 这个方法也是适用的. 假定函数 f 关于 u 是 Lipschitz 连续的. 受 5.3 节中的比较原理的启发, 如果函数 $\overline{u}(x)$ 满足

$$\nabla^2 \overline{u} + f(\overline{u}) \leqslant 0 \quad 在 D 内 \quad 以及 \quad \overline{u} \geqslant g(x) \quad 在 \partial D 上,$$

则称其为一个 *上解* (或 *超解*). 同样地, 如果 $\underline{u}$ 满足相反的不等式, 则称其为 *下解* (或 *子解*). 假如我们能够找到一对 $\overline{u}$ 和 $\underline{u}$, 并且满足 $\underline{u} \leqslant \overline{u}$, 这样有时就能证明 (5.155) 和 (5.156) 至少有一个解. 例如, 设存在 $K \geqslant 0$ 使得 (5.155) 中的 f 满足 $F(u) \equiv f(u) + Ku$ 是所有关心的 u 的递增函数. 因为

$$\nabla^2 u - Ku + F(u) = 0,$$

定义 $u_0 = \underline{u}$, 通过迭代

$$\nabla^2 u_n - Ku_n + F(u_{n-1}) = 0 \quad 在 D 内$$

以及

$$u_n = g(x) \quad 在 \partial D 上$$

---

93 在第 9 章会看到这也是 Navier-Stokes 方程要满足的条件.

94 注意到一个窗口电加热器中的电流模型为 $\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0$, 其中 ϕ 是电压, σ 是电导率 (电阻的倒数); 如果我们希望有均衡的电加热, 那么电流密度 $\sigma\nabla\phi$ 和电场 $-\nabla\phi$ 就必须是常数, 这就导出了 *双曲型方程* $\nabla \cdot (\nabla\phi/|\nabla\phi|^2) = 0$.

对所有 $n \geqslant 1$. 将最大值原理推广到微分不等式 $\nabla^2 u - Ku < 0$, 并利用 F 的性质, 就能证明函数 u_n 组成了一个下解的递增序列, 上界为 $\overline{u}$. 这个条件对于收敛到原问题的解 u 是必需的.

上解和下解的另外一个重要用处就是估计解的大小.

例 5.1 假设 $\nabla^2 u + f(u) = 0$, 在 D 中, $u \geqslant 0$, 在 ∂D 上, $f(u) \geqslant 1$, 球 $|\boldsymbol{x}| \leqslant 1$ 在 D 内. 我们能在 D 内找到 u 的下界吗?

我们只要看看这个简单问题

$$\nabla^2 v + 1 = 0, \quad \text{在 } |\boldsymbol{x}| < 1 \text{ 中}, \quad \text{有 } v = 0 \text{ 在 } |\boldsymbol{x}| = 1 \text{ 上}. \tag{5.157}$$

显然, $v = (1 - |\boldsymbol{x}|^2)/2m$, 其中 m 是空间维数, 则 u 是 (5.157) 的一个上解. 因此, 任何解 u 都不会比 $(1 - |\boldsymbol{x}|^2)/2m$ 小.

5.11.2.2 *变分方法*

在 5.4 节中的一些评注能被应用到 Euler-Lagrange 方程的非线性椭圆问题上. 来看一个例子, 对 p-Laplace 方程, 其解是泛函

$$J(u) = \int_D |\nabla u|^p \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5.158}$$

的驻点.

一个特别有趣并被很好地研究过的变分问题是 *极小曲面* 的计算, 即曲面 $u = u(x, y)$ 使得面积

$$\iint_D \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

最小. Euler-Lagrange 方程

$$\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

是椭圆的; 对于小的 u, 它可由关于薄膜的 Laplace 方程近似, 见 5.1.4.2 节.

理论上讲, 椭圆问题的弱方法或者说是变分方法的最大贡献是能让我们研究奇异性产生的条件, 这一点在下一节会进一步讨论. 思路和第 2 章中的双曲型方程弱解理论是类似的, 但两种情况的奇异性的形式是不同的. 我们很快就会碰到一些这样的情况, 但我们会避免使用泛函分析的知识, 通常这些知识是用于保证变分方法能被应用到一些微妙的问题上. 例如, 经常能碰到的一件事情是, 将 (5.158) 推广到 $\int_D (|\nabla u|^p - F(u))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, F 很大时, $J(u)$ 的下界就是 $-\infty$.

5.11.3 独立参数和奇异行为

某些时候比较方法能被用来证明解连续依赖于数据，我们希望这一过程对大多数有合适边界条件的椭圆型方程都是适用的. 然而，如果数据有很大的变化，会有一些奇怪的事情发生，这对许多实际的问题有很大的启发作用.

5.11.3.1 非线性特征值问题

非线性椭圆边值问题经常导致 *非线性特征值问题*. 例如，对热化学反应问题的一个近似导出方程[95]

$$\nabla^2 u + \lambda e^u = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中}. \tag{5.159}$$

参数 λ 可看作是与维数无关的反应热量或反应浓度. 一种特殊情况是具 Dirichlet 条件，比如

$$u = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}, \tag{5.160}$$

我们想要知道是否有解，如果有解，解是否唯一.

令 λ 足够小，对应于反应的速率慢，我们发现问题 (5.159) 和 (5.160) 有一个处处都很小的解 u. 一个能得到此结果的方法是利用上解和下解. 显然，$\underline{u} \equiv 0$ 满足边界条件，以及 $\nabla^2 \underline{u} + \lambda e^{\underline{u}} > 0$，所以零是一个下解. 令 $\overline{u} = \mu w$，其中 μ 是一个正常数，w 满足一个平凡的 Poisson 方程：

$$\nabla^2 w + 1 = 0, \text{ 在 } D \text{ 中}, \text{有 } w = 0 \text{ 在 } \partial D \text{ 上}.$$

我们发现 $\overline{u}$ 满足边界条件和 $\nabla^2 \overline{u} + \lambda e^{\overline{u}} = \lambda e^{\mu w} - \mu \leqslant 0$，从而在 D 内 $\mu e^{-\mu w} \geqslant \lambda$. 因此，由 $w \geqslant 0$ 得到 $\overline{u}$ 是正的，所以如果有

$$\lambda \leqslant \mu \exp\left(-\mu \sup_D \{w\}\right),$$

则 $\overline{u}$ 就是一个上解. 由此，当 $\lambda \leqslant (e \sup_D\{w\})^{-1}$ 时，存在一个正解.

另外一个证明存在性的方法来自 *压缩映照原理*. 这依赖于是否存在映射 $\mathcal{T}$，将 D 上的函数映射到其他区域，使得在合适的模下 $\|\mathcal{T}(v-w)\| < k\|v-w\|$，其中 $k<1$. $\mathcal{T}$ 的不动点就是解. 在这种情况下，如果 $\mathcal{T}$ 定义成将 w 映射到 v，其中

$$\nabla^2 v + \lambda e^w = 0, \text{ 有 } v = 0 \text{ 在 } \partial D \text{ 上},$$

那么利用迭代 $u_n = \mathcal{T} u_{n-1}$ 来证明的方法就和利用上解及下解的方法本质上是一致的.

---

95 当 $\lambda < 0$，这就是 Liouville 方程的椭圆形式；它也经常在微分几何中以 “核函数” 出现，在 5.12 节和第 6 章中会再次看到.

Helmholtz 问题 (5.27) 可用于说明 (5.159) 和 (5.160) 的解的不存在性. 从 5.7.1 节可以知道, 令 ϕ 和 μ 分别为 $-\nabla^2$ 的正主特征函数和特征值, 因此

$$-\nabla^2\phi=\mu\phi, \text{ 在 } D \text{ 中, 有 } \phi=0 \text{ 在 } \partial D \text{ 上;}$$

如果定义 Fourier 系数 $a=\int_D \phi u \mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 分部积分得到

$$a=\frac{\lambda}{\mu}\int_D \varphi \mathrm{e}^u \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \frac{\lambda}{\mu} I \mathrm{e}^{a/I},$$

其中 $I=\int_D \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{x}$; 最后一步我们利用了 Jensen 不等式[96]. 当 $\lambda>\mu/\mathrm{e}$ 时, 没有 a 满足不等式, 所以没有解存在. 类似地, 非线性特征值问题有一个有界谱, 就是存在某个 λ^*, 它比上面例子中的 μ/e 小, 使得对 $\lambda<\lambda^*$ 至少存在一个解, 而当 $\lambda>\lambda^*$ 就无解.

为了能精确地看到解是如何依赖于 λ, 可以从最简单的情况入手, D 是 m 维空间中的单位球. 如果假设 u 是径向对称, 使得在极坐标中 $u=u(r)$[97], 问题就简化成常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{m-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\lambda\mathrm{e}^u=0, \tag{5.161}$$

有 $u(1)=0$ 和一个在 $r=0$ 处的正规化条件, 即当 $m=1$ 时有 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}r(0)=0$, 当 $m>1$ 时 u 有界. 作变量代换 $r=\mathrm{e}^s$ 和 $u=v-2\log s$ (仅当 $m>1$ 时需要), 微分方程变成自治的. 在习题 5.47 能看到更多关于这个变换的细节. 变换能将问题简化为一个相平面上的问题, 从而画出关于 λ 的函数 u 的最大值的响应图, 参见图 5.7. 其中有趣的特点是不唯一性和无界性; 当我们像第 6 章处理抛物方程那样去验证解的时候, 就会发现在 $\lambda=\lambda^*$ 处稳定性的变化. 从应用数学的观点来看, 通常都是在基于发展模型的框架下讨论稳定性, 就如我们在 6.6.4 节中那样. 然而, 对那些是 Euler-Lagrange 方程的椭圆问题来说, 可以像非时间相关问题的推广那样猜测其稳定性结果. 在这些情况下, 如果能够知道解集是全局能量最小的, 那么解就很可能是稳定的, 能用来描述任何发展模型中的一个稳定过程. 如果我们够幸运, 就

96 Jensen 不等式是这么叙述的, 如果 $w(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 满足 $\int_D w\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$, 则

$$\int_D wf(u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant f\left(\int_D wu\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)$$

对任意光滑的 u 成立, 其中 f 是凸的, 即

$$f(\alpha a+(1-\alpha)b)\leqslant \alpha f(a)+(1-\alpha)f(b)$$

对 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ (见习题 5.51).

97 在某些情况下能严格证明这是 u 必须满足的形式 (见习题 5.46).

能通过将能量写为 Lyapunov 函数实现“时间依赖”和“能量”概念之间的联系, 如同常微分方程中的理论一样.

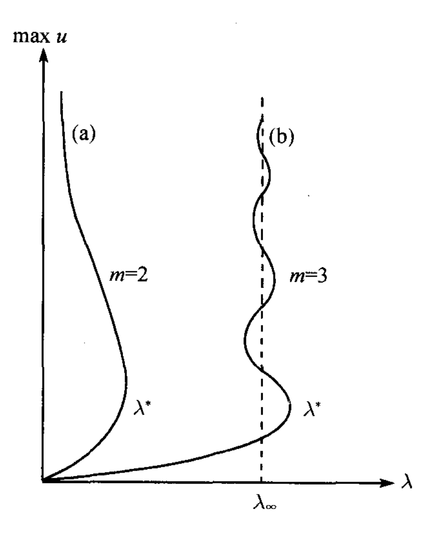


图 5.7 公式 (1.161) 的响应图形

这个讨论引出了另外两个问题. 第一个牵涉解区域上出现“自发”奇异性的可能性.

5.11.3.2 奇异性

从第 3 章的讨论中可以知道椭圆问题解的奇异性不能传播, 因为这些点不能在比空间变量少的一维流形中存在, 但不可能阻止孤立奇异点的出现. 事实上, 在 (5.159) 和 (5.160) 中当 $m \geqslant 3$ 时, 能够证明存在 λ_∞, 使得在某些 D 的内点上当 $\lambda \to \lambda_\infty$ 时解 u 和相应的参数 λ 趋向于无穷. 另外, 奇异解 U 在弱意义下满足

$$\int_D \nabla\psi \cdot \nabla U \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lambda_\infty \int_D \psi \mathrm{e}^U \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

对某个合适空间中的所有试验函数 ψ 都成立. 在对称情况 (5.161)[98], 当 $\lambda_\infty = 2(m-2)$ 和 $U = -2\log r$, 我们能清楚地看到这点.

以上讨论引出一个问题, 当 $u_{\max}$ 很大时, 响应图的可能形式和 f 的增长之间的关系, 其中 f 满足

$$\nabla^2 u + \lambda f(u) = 0, \tag{5.162}$$

98 能证明当 $3 \leqslant m \leqslant 9$ 时 $\lambda_\infty < \lambda^*$, 而当 $m \geqslant 10$ 时 $\lambda_\infty = \lambda^*$. 在二维情况下, 有一个很显然的相似情形, 存在解满足 $0 < r < 1$ 上的方程和 $r = 1$ 的条件, 当 $r \to 0$ 时对数增长. 这个奇异解不是弱解.

有零 Dirichlet 数据. 特别地, 如果当 $u \to \infty$ 时 f 是幂增长, 那么响应是如何依赖于这个幂和维数 m 的? 直接积分容易看到当 $m = 1$ 和 $u \to \infty$ 时, $f(u)/u \to \infty$, 则如图 5.7(a), 对小的 λ 有大的解. 更一般地, 受 (5.161) 的启发, 能够证明对光滑有界的 m 维区域 D, 下列陈述是可能的.

1. 如果 f 线性增长, 满足当 $u \to \infty$ 时 $f(u)/u \to K > 0$, 则对 λ 有大的解逼近 μ/K, 其中 μ 是

$$\nabla^2\phi + \mu\phi = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中} \quad \text{有} \quad \phi = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上} \tag{5.163}$$

的主特征值.

2. 如果增长是次线性的, 即 $u \to \infty$ 时 $f(u)/u \to 0$, 以及 $f(u) > 0$, 那么存在 u 并且大的 λ 对应的 $u_{\max}$ 是大的.

3. 如果 $f(u)$ 是幂增长, 即 $f(u) = u^p$, $p > 1$, 则响应图的形式主要依赖于 p 和 m 之间的关系. 在这种情况下, 总是存在平凡解 $u \equiv 0$. 对 $m = 1$ 或者 2, 或者在 $m \geqslant 3$ 时 $p < (m+2)/(m-2)$, 对所有 λ 存在一个非平凡解. 对 $m \geqslant 3$ 时 $p \geqslant (m+2)/(m-2)$, 不存在非平凡解. 特殊值 $p = p_c \equiv (m+2)/(m-2)$ 称为*临界 Sobolev 指数*. 这种情况下我们能够很容易地通过相平面分析来求解对应于 (5.161) 的方程 (见习题 5.48).

5.11.3.3　不唯一性和分叉

前面的讨论说明在控制系数 λ 取到临界值时, 非线性椭圆问题的解分支是多么容易趋向于无穷或者不存在. 另外一种病态情况是*分叉*, 其意思是当一个 “参考” 解的系数 λ 变化时, 得到一个新的解的分支.

通过仔细验证解对系数的局部依赖性, 就能系统地逼近这种现象. 我们从最简单的非线性特征值问题开始

$$\nabla^2 u + \lambda f(u) = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中} \quad \text{有} \quad u = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}, \tag{5.164}$$

其中 $f(0) = 0$ 以及 $f'(0) \neq 0$, 让我们来看看在平凡解 $u = 0$ 附近是否存在解[99]. 关键的步骤是在特定的 λ 附近搜寻, 假设这个特定的值是 λ_0, 令 $\lambda - \lambda_0 = \varepsilon$, 首先, 将 u 展开成

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots; \tag{5.165}$$

这样我们就能高效地寻找 u 关于 λ 的导数. 马上就能发现

$$\nabla^2 u_1 + \lambda_0 f'(0) u_1 = 0 \quad \text{在 } D \text{ 中} \quad \text{有} \quad u_1 = 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上},$$

99 当 $f(u) = \sin u$ 时, (5.164) 就是一个弹性支杆 (“Euler 支杆”) 的屈曲模型, 其中 u 是横向位移, λ 是沿着支杆的压缩负载.

因此如果 $-\lambda_0 f'(0)$ 是 D 上 Laplace 方程的特征值, 相应标准特征函数为 ϕ, 则 u_1 非零. 令 $u_1=\alpha\phi$, 其中 $\alpha\neq 0$, 则 u_2 满足

$$\nabla^2 u_2+\lambda_0 f'(0)u_2+\frac{1}{2}\lambda_0\alpha^2 f''(0)\phi^2+\alpha f'(0)\phi=0. \tag{5.166}$$

因此, 由 Fredholm 二择性定理, 只有当 α 满足

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda_0 f''(0)\int_D \phi^3 \mathrm{d}\boldsymbol{x}+f'(0)\int_D \phi^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}=0 \tag{5.167}$$

时, u_2 才存在. 如果 $\int_D \phi^3 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\neq 0$, 则从零解得到所谓*跨临界分叉*. 对于特征值 λ_0 附近的 λ 和已知振幅的特征函数 $\alpha\phi$ 来说, 分叉解是局部的. 进一步, 5.7.1 节中的讨论说明主特征值的分叉导出同号的分叉解 (见习题 5.49).

现在来看看 (5.164) 的非平凡参考解 $u_0(\boldsymbol{x},\lambda)$ 的情况. 采用和 (5.165) 中同样的记号, 可以发现

$$\nabla^2 u_1+\lambda_0 f'(u_0(\boldsymbol{x}))u_1=-f(u_0(\boldsymbol{x}))\quad 在\ D\ 中\quad 有\quad u_1=0\quad 在\ \partial D\ 上. \tag{5.168}$$

因此 u_0 有唯一解, 除非 (5.168) 的右边是零, 并且 λ_0 是这个特征值问题 (因为 $\boldsymbol{x}$ 依赖 u_1 的系数) 的特征值. 如果 λ_0 是这样的特征值, 那就存在两种可能性.

最可能的是对不同 λ_0 相应的特征函数 ϕ, $f(u_0)$ 不正交. 在这种情况, u_1 不存在, 通过 (5.165) 也不能找到任何接近 u_0 的解. 这就意味着我们要寻找 u 的更一般的表达式, 比如

$$u=u_0+|\varepsilon|^{1/2}u_1+\varepsilon u_2+\cdots, \tag{5.169}$$

这恰好是前面章节中看到的靠近转折点 $\lambda=\lambda^*$ 的性态. 解局部依赖于 $|\lambda-\lambda_0|^{1/2}$, 并且没有分叉产生. 实际上, 我们能够认为 $\lambda-\lambda_0$ 是关于 $\max_D u_0$ 的局部光滑函数.

第二个可能是

$$\int_D \phi(\boldsymbol{x})f(u_0(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0.$$

在这种情况下, 由 Fredholm 二择性定理, 存在 (5.168) 的解连续统. 注意到 (5.164) 关于 λ 的导数给出

$$\nabla^2\frac{\partial u_0}{\partial\lambda}+\lambda f'(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial\lambda}=-f(u_0),$$

我们看到 $\partial u_0/\partial\lambda$ 是 (5.168) 的一个特别的积分, 它在 ∂D 上为零, 因此有

$$u_1=\frac{\partial u_0}{\partial\lambda}+\alpha\phi,$$

其中 α 是任意常数. 关于 u_2 的问题是

$$\nabla^2 u_2 + \lambda_0 f'(u_0) u_2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \lambda} + \alpha\phi\right)\left(f'(u_0) + \frac{1}{2}\lambda_0 f''(u_0)\left(\frac{\partial u_0}{\partial \lambda} + \alpha\phi\right)\right) = 0.$$

然而, 把 (5.164) 关于 λ 求导两次, 然后反过来使用 Fredholm 二择性定理, 可以发现 $(\partial u_0/\partial\lambda)f'(u_0) + (\lambda_0/2)(\partial u_0/\partial\lambda)^2 f''(u_0)$ 与 ϕ 正交, 因此就得到二择性定理对 (5.166) 的第三个应用, 结果是要么 $\alpha = 0$, 要么

$$\alpha = -\int_D \phi^2 \left(f'(u_0) + \lambda_0 f''(u_0)\frac{\partial u_0}{\partial \lambda}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \Big/ \int_D \frac{1}{2}\lambda_0 \phi^3 f''(u_0) \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{5.170}$$

$\alpha = 0$ 的情况意味着 (5.165) 是 $u_0(\boldsymbol{x}, \lambda)$ 关于 $\lambda = \lambda_0$ 的 Taylor 展开, 对 $f(0) = 0$ 的情况, 光滑连续的零解的情况是类似的. 因此, (5.170) 对应于另外一个跨临界分叉.

注意到当某些积分为零时 (5.167) 或者 (5.170) 会无效 (对 (5.170) 就是 $\int_D \phi^3 f''\cdot(u_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$), 在这种情况下我们必须再次求助于像 (5.169) 那样的表达式. 然而, 这不会导致在响应曲线上有拐点, 而是出现横向分叉, 并且分叉解支垂直于原来的参考解支, 称为 *叉式分叉*.

通过观察, 我们推断在某些时候 (5.164) 可能至多只有一个解. 通过证明当 $f(u)/u$ 是严格递减函数时至多有一个正解就能说明这个问题. 这里必须假设所有解都是光滑的, 如果存在两个解, 则它们在一个合理的正则曲面上相交. 假设 u 和 v 是两个相异正解. 那么 $u - v$ 在某个区域 D_+ 上是正的, 在 ∂D_+ 上为零. 在 D_+ 上分部积分得到

$$\int_{D_+} (vf(u) - uf(v)) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial D_+} u \left(\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}s.$$

因为左边是负的, 右边是非负, 所以与假设矛盾.

5.11.3.4 其他不规则性态

在 5.11.3.2 节中我们已经注意到, 在某些事先并不知道的点上, 非线性方程的解可能是无限的, 而线性问题中通过方程的系数就能确定内部的奇异点. 然而, 有两种更弱的不规则性会出现. 比如, 考虑 $\nabla\cdot(|\nabla u|\nabla u) - 1 = 0$ 的径向对称解, 则当 $r \to 0$ 时有 $|\nabla u| = O(r^{3/2})$. 解虽然处处可导, 但在原点却不可以求导两次. 另外一种现象将在第 7 章深入讨论, 它是建立在如下的半线性问题上

$$\nabla^2 u = u^p \quad \text{在 } D \text{ 中} \quad \text{有} \quad u = g > 0 \quad \text{在 } \partial D \text{ 上},$$

其中 $f(u)$ 是非 Lipschitz 连续的, $0 < p < 1$. 如果区域 D 足够大, 能够证明 (见习题 5.50) 存在一个死核, 即在包含于 D 内的区域 D_0 中有 $u \equiv 0$. 在 D_0 外, u 是正的. 在边界 ∂D_0 上, $\partial u/\partial n$ 以及 u 是零, 显然这个解在 ∂D_0 上是不解析的.

5.12 再论 Liouville 方程

这章的末尾我们指出二维椭圆型 Liouville 方程和 Green 函数之间一个关系. 返回到 5.9.1 节, 考虑封闭区域中 Dirichlet 边界数据的 Laplace 方程的 Green 函数 $G(z, z_0)$. 假设这个区域能被共形映射到 $|\zeta| \leqslant 1$, 映射函数为

$$\zeta = f(z).$$

早先我们假设点 z_0 被映射到 $\zeta = 0$, 因此不同的 z_0 导致不同的映射. 这里我们让 z_0 变化, 因此假设 z_0 被映射到 ζ_0 并保持 f 固定. 于是利用 (5.117) 将单位圆盘映射到自身, Green 函数为

$$\begin{aligned} G(z, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \zeta\overline{\zeta}_0} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi}(\log|z - z_0| + H(z, z_0)). \end{aligned}$$

令 $H(z, z) = T(z)$[100], 再取极限 $z \to z_0$,

$$T(z) = \log\left(\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}\right). \tag{5.171}$$

容易证明

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(z) &= -\nabla^2 \log(1 - |f(z)|^2) \\ &= -4|f'(z)|^2 \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} \log(1 - \zeta\overline{\zeta}) \\ &= 4\mathrm{e}^{2T}, \end{aligned}$$

通过普通的变量变换, 这是 Liouville 方程 (5.159). 显然, 上面的讨论说明 (5.171) 是非线性方程的通解, 从 4.8.3 节的讨论可以知道这一点. 令 $u \equiv 2T + \log 2$ 以及

$$\nabla^2 u = 4\mathrm{e}^u$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = \mathrm{e}^u,$$

100 函数 $H(z, z_0)$ 称为 "Green 函数的正则部分", 它有许多重要的应用 (见习题 5.52). 函数 $T(z)$ 称为 Bergman 核函数.

形式上设 $X = \mathrm{i}f(z)$, $Y = \mathrm{i}\overline{f(z)}$ 和 $\gamma = \mathrm{i}\sqrt{2}$, 可以发现

$$u = 2\log\left(\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\right),$$

这就是 (5.171)!

5.13 后记: ∇^2 或者 $-\Delta$?

许多课本, 特别是更理论的那些, 使用记号 Δ 来表示 Laplace 算子, 将 Laplace 方程写为

$$-\Delta u = 0,$$

而不是 $\nabla^2 = 0$. 除了符号上的不同以外, 有理论上的原因需要引入减号, 它能自动保证许多重要的量是正的. 比如, 当 Poisson 方程写为 $-\Delta u = f$, 在 ∂D 上 $u = 0$, 正的数据 f 会得到正的解 u. 同样地, 有齐次边界条件的算子 $-\Delta$ 的 Green 函数是正的, 并且它的特征值和 "Fourier 记号" $|\boldsymbol{k}|^2$ 也是正的. 经常会很自然地认为椭圆型方程是从一个长时间的发展问题得来的, 比如抛物型方程 $\partial u/\partial t - \nabla^2 u = f$ 会导出 $-\Delta u = f$. 不管如何, 因为大多数偏微分方程研究人员都习惯使用 ∇^2 以及认为 Green 和 Riemann 函数是 "$\mathcal{L}u = \delta$" 的解, 我们在这本书上遵从这个习惯.

习 题

5.1. 证明 (5.23) 和 (5.24) 与 Airy *应力函数* $A(x,y)$ 的存在性是一致的, $A(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y,$$

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \tau,$$

并且 $\nabla^4 A = 0$. 由在边界 $y = f(x)$ 上的牵引力为 0 我们可以证得条件为

$$\sigma_x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - \tau = \tau\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - \sigma_y = 0.$$

证明这些条件导出

$$A = 常数, \quad \frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad 在边界上.$$

(不失一般性, 在单连通区域中, 常数可取为 0).

5.2. 证明边值问题

$$\nabla^2 u = c = 常数 \quad 对\ x^2 + y^2 = r^2 < 1,$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2 \quad 在\ r = 1\ 上,$$

仅在 $c = 4$ 时有解, 且在这种情形下, $u = r^2 + a$, 对于任意的常数 a, 为方程的一个解.

5.3. 假设在二维极坐标下 $\nabla^2 u = 0, 1 < r < 2$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha_1 u = k\cos\theta \quad 在\ r = 1\ 上 \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha_2 u = 0 \quad 在\ r = 2\ 上.$$

寻找一个解 u, 它是关于 r 乘以 $\cos\theta$ 的函数, 并证明除非 $6\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_1 - 10\alpha_2 - 3 = 0$, 这种形式的解存在唯一. 将 $\cos\theta$ 换为 $\cos n\theta$ 重复上面的计算. 推出除非 α_1 和 α_2 满足一个可数的无限条件数, 对于任何的这种问题都有唯一解.

5.4. 证明, 如果

$$\nabla^2 u = 0 \quad 对\ -\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi,$$

有

$$u = 0 \quad 在\ y = 0, \pi\ 上 \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pm\gamma u \quad 在\ x = \pm\pi\ 上,$$

则当 $\gamma \tanh n\pi = n$ 时, 存在非平凡解, 其中 n 为整数.

5.5. 假设在正方形上满足 $\nabla^2 u = 0$, 并且正方形的一边满足 $u = 1$, 另三边满足 $u = 0$, 且 u 有界的. 证明在正方形的中心 $u = \frac{1}{4}$. 对于立方体我 们将有什么相应的结果呢?

5.6. 假设

$$\nabla^2 u - cu = f \quad 在\ D\ 中$$

有

$$u = g \quad 在\ \partial D\ 上,$$

其中 D 有界且 ∂D 光滑. 如果 u 存在, 证明如果 $c > 0$ 解是唯一的. 如果 $c < 0$ 且 $f = g = 0$, D 为区域 $r^2x^2 + y^2 < 1$, 证明

$$u = 常数 \cdot J_0\left(r\sqrt{-c}\right)$$

是一个解, 只要 $\sqrt{-c}$ 为 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的零点, 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 J_0}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}J_0}{\mathrm{d}x} + J_0 = 0.$$

如果 $c<0$ 且 $f=g=0$, D 为区域 $1<x^2+y^2+z^2<4$, 证明当 $c=-n^2\pi^2$, $n=1,2,3,\cdots$ 时, 存在一个非平凡解.

5.7. 在 (5.59) 中设 $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}$, 证明, 二维空间 Laplace 方程的解满足

$$u(\mathbf{0})=\frac{1}{2\pi a}\int_{\partial D}u\mathrm{d}s,$$

其中 ∂D 为圆点在 $\mathbf{0}$ 半径为 a 的圆. 称为 *平均值公式*. 由这个结果推出最大值原理. 对于三维空间我们有什么样的相应结果?

5.8. 对于

$$\mathcal{L}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\lambda^2 \quad 对\ 0\leqslant x\leqslant 1,$$

当 $\lambda>\pi$ 时最大值原理为什么不成立? 利用 $\sin(\pi r)/r$ 满足 $\mathcal{L}u=0$ 有 $u=0$, 在 $r=1$ 上的事实, 证明对 $\mathcal{L}=\nabla^2+\lambda^2$, $0\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 有相同的结果.

5.9. 假设当 $r^2=x^2+y^2\to\infty$ 时 $u(x,y)$ 可以任意快地趋于零, 并且 ∇^2u 在任何地方都是可积的. 证明

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u\nabla^2\log(r^2+\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\log(r^2+\varepsilon)\nabla^2u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明左边项为

$$2\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{ru\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(r^2+\varepsilon)^2}.$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$ 且在 r 上分部积分, 或者假设在 $r=0$ 附近为主要积分区域. 证明它的值为 $2\pi u(0,0)$ 到最低阶, 且推出如果 $G=(1/2\pi)\log r$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u\nabla^2G\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G\nabla^2u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=u(0,0).$$

5.10. 如果在 $r^2=x^2+y^2\leqslant 1$ 中, $\nabla^2u=0$, 并且 $u(\cos\theta,\sin\theta)=g(\theta)$, 用分离变量法证明

$$u=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nr^n\cos n\theta+b_nr^n\sin n\theta),$$

其中 a_n, b_n 为 g 的 Fourier 系数. 证明这个公式也可以从 (5.59) 得到.

5.11. 证明, 如果在矩形上 $\nabla^2u=0$, 在矩形的一边 u 为给定的光滑有界函数, 在另一边为零, 则有界解可以直接写为显式 Fourier 级数. 如果给出矩形四边的任意光滑的 Dirichlet 数据, 可以得到同样的结果.

5.12. 证明, 如果在 $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 中 $\nabla^2u(r,\theta)=0$, 有

$$u=\begin{cases} r^2, & \theta=\alpha, 0<\alpha<\pi/2,\\ 0, & \theta=0,\\ \sin 2\theta, & r=1,\end{cases}$$

则

$$u = r^2 \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}.$$

进一步证明如果 $\alpha = \pi/2$, 则

$$u = -\frac{2r^2}{\pi}(\sin(2\theta)\log r + \theta\cos(2\theta)).$$

*5.13. (i) 证明

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cos(\theta-\alpha)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta-\alpha)} g(\theta)\mathrm{d}\theta \to \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} g(\theta)\mathrm{d}\theta + \pi g(\alpha)$$

当 $r \uparrow 1$ 时将上面积分分为

$$\int_0^{\alpha-\varepsilon} + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{2\pi},$$

其中 $r = 1 - \delta$ 且 $\delta \ll \varepsilon$.

(ii) 假设 $u(r,\theta)$ 在 $r^2 = x^2 + y^2 < 1$ 上满足 $\nabla^2 u = 0$, 且

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \gamma u = g(\theta) \quad \text{在 } r = 1 \text{ 上}.$$

在 (5.52) 中取 $G = (1/2\pi)\log|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$, 证明

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=1} \mathrm{d}\theta,$$

因此在 $r = 1$ 上, u 满足方程

$$u(1,\alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\log\left(\left|2\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right|\right)\mathrm{d}\theta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1,\theta)\left(\gamma\log\left(\left|2\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right|\right) + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta.$$

5.14. (i) 假设函数 $u(r,\theta)$ 可以写为两重 Fourier 逆变换

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r(k_1\cos\theta + k_2\sin\theta)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2.$$

如果 $\widehat{u} = 2\pi\delta(\rho - 1)f(\phi)$, 其中 $\rho^2 = k_1^2 + k_2^2$, $\tan\phi = k_2/k_1$ 且 f 为任意的, 证明 u 满足 Helmholtz 方程 $\nabla^2 u + u = 0$. 因此, 对形如

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\cos(\theta-\phi)} f(\phi)\mathrm{d}\phi$$

的 Helmholtz 方程的解, 得到 Sommerfeld 表达式.

(ii) 由 p. 177 中 Kontorovich-Lebedev 逆公式 (5.106) 得到

$$u(r,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}J_{\mathrm{i}\kappa}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa\theta}g(\kappa)\mathrm{d}\kappa$$

也是 Helmholtz 方程的通解. 通过证明它关于 θ 的标准 Fourier 变换, 来证明这个公式可以从上述的 Sommerfeld 表达式推出,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta-\mathrm{i}r\cos(\theta-\phi)}f(\phi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi&=\int_{-\infty}^{\infty}J_{\mathrm{i}k}(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi}f(\phi)\mathrm{d}\phi\\&=J_{\mathrm{i}k}(r)g(k).\end{aligned}$$

5.15. 证明如果实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有实特征值 λ_i 和正交特征向量 $\boldsymbol{x}_i$, 使得 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i$, 则对于任意的向量 $\boldsymbol{y}=\sum c_i\boldsymbol{x}_i$, 最小特征值 λ_0 满足

$$\lambda_0\leqslant\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}.$$

证明对于下面问题的特征函数 ϕ 和特征值 $-\lambda$

$$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0\quad 在区域\ D\ 中$$

有

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}+\alpha\phi=0\quad 在\ \partial D\ 上,$$

其中 $\partial/\partial n$ 为单位外法向导数, 满足

$$\lambda\int_D\phi^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_D|\nabla\phi|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\alpha\int_{\partial D}\phi^2\mathrm{d}s.$$

在矩阵情形下推出, 最小的或**主特征值**满足

$$\lambda_0\leqslant\left(\int_D|\nabla v|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\alpha\int_{\partial D}v^2\mathrm{d}s\right)\Big/\int_D v^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

对于任意的光滑 v.

5.16. 假设区域 D 中 Laplace 方程 Dirichlet 问题的特征值 λ_n 与单位化特征函数 $\phi_n(x)$ 已知, 即

$$\nabla^2\phi_n=\lambda_n\phi_n\quad 在\ D\ 中\quad 有\quad \phi_n=0\quad 在\ \partial D\ 上.$$

乘以 ϕ_n 并利用 Green 公式证明 $\lambda_n<0$. 进一步, 对于修正的 Helmholtz 方程的 Green 函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, 满足

$$\nabla^2G-k^2G=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\quad 在\ D\ 中\quad 有\quad G=0\quad 在\ \partial D\ 上,$$

证明它可以展开成

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi_n(\boldsymbol{x})\phi_n(\boldsymbol{\xi})}{\lambda_n-k^2}.$$

证明, 只要 $-k^2$ 不等于任何的 λ_n, 上述展开对 Helmholtz 方程也是正确的. 当对于一些 n, $-k^2=\lambda_n$ 时, 利用 p. 159 的讨论, 通过特征函数展开, 选择合适的 c, 求解

$$(\nabla^2-\lambda_n)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})+c\phi_n(\boldsymbol{x})\phi_n(\boldsymbol{\xi}),$$

以此说明怎样得到修正的 Green 函数.

5.17. (i) 假设, 在 (5.58) 的记号中

$$\nabla^2u=0\quad 在\ r>a\ 中$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial r}=g(\theta)\quad 在\ r=a\ 上.$$

利用 Green 公式, 证明, 当 $r\to\infty$ 时,

$$u=a\log r\int_0^{2\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta+O(1).$$

(ii) 利用 (5.58) 的记号, 证明在 $r=a$, $\alpha=0$ 时

$$\frac{\partial}{\partial r}(RR')=\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}(|\boldsymbol{\xi}|^2+a^2-2a|\boldsymbol{\xi}|\cos\theta),$$

其中 $|\boldsymbol{\xi}|>a$, 因此

$$\frac{1}{RR'}\frac{\partial}{\partial r}(RR')=\frac{1}{a}.$$

(iii) 推出

$$\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{RR'}{r}\right)$$

是 Neumann 外问题的 Green 函数.

5.18. 考虑 Neumann 内问题

$$\nabla^2u=0\quad 在\ r<a\ 中$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial r}=g(\theta)\quad 在\ r=a\ 上,$$

其中 $\displaystyle\int_0^{2\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta=0$. 证明, 在 (5.56) 式中当 $\boldsymbol{\eta}=0$ 时,

$$G_M=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{RR'}{r}\right)+常数.$$

常数值有关系吗?

5.19. 从导出 (5.58) 相同的几何条件, 证明 Laplace 方程在半径为 a 的球上的 Dirichlet 问题的 Green 函数为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}-\frac{a}{|\boldsymbol{\xi}||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}'|}\right),$$

其中 $\boldsymbol{\xi}'$ 为 $\boldsymbol{\xi}$ 关于球面的对称点.

5.20. 假设 θ,θ' 分别为以 A,B 为中心的二维极坐标. 证明 $\theta-\theta'$ 在任何不包含 A,B 点的双连通区域中为调和函数. 在任何通过 A,B 的圆周上要满足什么样的 Dirichlet 条件? 由此在平面极坐标上, 可以找到 $\nabla^2 u=0,\ r<1$, 其中

$$u(1,\theta)=\begin{cases}1, & 0<\theta<\pi,\\ -1, & -\pi<\theta<0\end{cases}$$

的有界解.

$*$5.21. 假设在 $y>0$ 中, $\nabla^2 u=0$ 的解满足 $u(x,0)=g_D(x)$ 及 $\partial u/\partial y(x,0)=g_N(x)$. 证明关于 g_D 与 g_N 的 Fourier 变换满足

$$\widehat{g}_N(k)=-|k|\widehat{g}_D(k),$$

因此

$$g_N=-\mathrm{i}h(x)*g_D'(x),\quad g_D'(x)=\mathrm{i}h(x)*g_N(x),$$

其中 $*$ 表示卷积且

$$\widehat{h}(k)=\begin{cases}1, & k>0,\\ -1, & k<0.\end{cases}$$

证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\widehat{h}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\mathrm{i}x+\varepsilon}+\frac{1}{\mathrm{i}x-\varepsilon}\right)\quad 对\ \varepsilon>0,$$

取极限当 $\varepsilon\to 0$ 时推出 $h(x)=-\mathrm{i}/\pi x$. 证明如果 $g_D=1/(1+x^2)$, 则 $g_N=(x^2-1)/(x^2+1)^2$, 并证明 (5.66) 或 (5.68). 用函数 $1/(z+\mathrm{i})$ 来证明结果.

5.22. 证明, 如果 f 在 $|z|<1$ 中是解析的, 满足

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z},$$

则对 $|z|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\quad 及\quad 0=\int_0^{2\pi}\frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{1-\overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

结合这些结果得到 $\mathrm{Re}f(z)=u(x,y)$, 其中

$$u(x,y)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta}{1+r^2-2r\cos(\theta-\arctan(y/x))}.$$

5.23. 假设 $u(x,y)$ 满足

$$\nabla^2 u=0 \quad 在\ y>0\ 中,$$

有 $u(x,0)=u_0(x)$, 其中 $u_0(x)\to 0$ 充分快, 当 $x\to\pm\infty$. 证明由解的 Green 函数表达式得到

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}u_0(x+y\tan\theta)\mathrm{d}\theta.$$

通过直接微分验证 $\nabla^2 u=0$.

5.24. 假设 $\phi(r,z)$ 满足

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\quad \phi(0,z)=\phi_0(z).$$

利用 Hankel 变换证明, 对 $z>0$,

$$\phi(r,z)=\int_0^\infty kf(k)\mathrm{e}^{-kz}J_0(kr)\mathrm{d}k,$$

其中 $kf(k)$ 为 $\phi(0,z)$ 的 Laplace 逆变换. 改变

$$\phi(r,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\phi(0,z)\mathrm{e}^{k\zeta-kz}J_0(kr)\mathrm{d}k\mathrm{d}\zeta$$

的积分次序, 并利用习题 4.11 的结果证明

$$\phi(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\phi(0,z+\mathrm{i}r\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

5.25. 证明, 如果 $\zeta=f(z)$ 是解析的, 则在 z 平面中曲线上的函数满足的 Neumann 数据, 等于在 ζ 平面中相应曲线上的函数满足的 Neumann 数据乘以 $|f'(z)|$.

5.26. 证明, 如果 ϕ 为无旋流体中的速度势, $\phi+\mathrm{i}\psi=w(z)$ 描述一特殊流体, 则

$$w(z)+\overline{w}\left(\frac{a^2}{z}\right)$$

描述一个流体, 满足 $\nabla\phi$ 与 $|z|=a$ 相切.

注. 如果 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则

$$\overline{f}(z)=\overline{f(\overline{z})}=u(x,-y)-\mathrm{i}v(x,-y).$$

5.27. 证明, 对于 $a > b$, (5.121) 可写为

$$\phi + \mathrm{i}\psi = U_\infty \frac{a+b}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)}{a+b} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right)}{a-b}\right).$$

进一步证明, 如果存在绕机翼的封闭曲线 Γ, 使得当 $|z| \to \infty$ 时, $\phi + \mathrm{i}\psi = U_\infty z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} + (\mathrm{i}\Gamma/2\pi)\log z + O(1)$, 则

$$\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\log\left(\frac{z+\sqrt{z^2-c^2}}{c}\right)$$

必须加到这个公式上. 由 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}\zeta$, 证明当 $b \to 0$ 且 $c \to a$ 的极限, 如果 $\Gamma = 2\pi U_\infty c\xi_0 \mathrm{e}^{\xi_0}\sin\alpha$, 则 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z|_{z=c}$ 是有限的.

5.28. 假设我们试图求解双调和方程 $\nabla^4 u = 0$ 在 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 中, 有 $u = \partial u/\partial x = 0$ 在 $x = 0, 1$ 上, 在 $y = 0, 1$ 上给出 u 和 $\partial u/\partial y$. 用分离变量证明候选解为

$$u(x,y) = ((Ax+B)\cos kx + (Cx+D)\sin kx)\,\mathrm{e}^{\pm ky},$$

同样得到乘以 y 的函数, 其中 A, B, C 和 D 为常数, 且 k 为 $k = \pm\sin k$ 的复根. 这些函数对于不同的 k 是相互正交的吗?

*5.29. 考虑 5.9.3 节中的裂缝问题. 证明函数

$$W(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

的边值在整个实轴上除了 $x = \pm c$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \tau\right) = 0,$$

并推出 $\mathrm{Im}((W(z) - \mathrm{i}\tau)^2) = 0$. 利用 Schwarz 反射证明 $W(z)$ 可以延拓为只有在 $z = \pm c$, $z = \infty$ 上有奇异点的解析函数. 利用 u 的对称性和在无穷远处的性态, 证明 $W(z)$ 的最小奇异可能性为

$$(W(z) - \mathrm{i}\tau)^2 = \frac{-\tau^2 z^2}{z^2 - c^2},$$

从而得到 (5.149)[101].

*5.30. 由 $R \to \infty$ 时的极限, 证明

$$\int_{|\zeta|=R>c} \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-c^2}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - x} = 2\pi\mathrm{i},$$

101 对于这个注我们要感谢 A. K. Head 博士.

其中 x 为实的且 $-c < x < c$, 沿着实线区间 $(-c, c)$ 取分支切割. 将这个轮廓变为有包裹着分支切割的轮廓, 在靠近 $\zeta = x$ 时要注意, 从而推出脚注 90.

*5.31. 假设 $\nabla^2 u(x,y,z) = 0$ 在 $z > 0$ 中, 且 $u(x,y,0) = g_D(x,y)$, 在无穷远处 $u \to 0$. 证明, 如果

$$\widehat{u}(k_1,k_2,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,0) = g_N(x,y),$$

则

$$\widehat{g}_D = -\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\widehat{g}_N.$$

推出

$$\frac{\partial \widehat{g}_D}{\partial x} = \frac{\mathrm{i}k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\widehat{g}_N = \widehat{H}\widehat{g}_N$$

及

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{k_1^2+k_2^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\mathrm{i}\cos(\theta-\arctan(y/x))+\varepsilon)^2} = \frac{x}{2\pi(x^2+y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

5.32. (i) 证明, 如果 $\nabla^2 u_\pm = 0$ 在 $y > 0$ 和 $y < 0$ 中, 且 $u_\pm = g_D(x)$ 在 $y = 0$ 上, 其中 g_D 是连续的并且当 $|x| \to \infty$ 时 $g_D(x) \to 0$, 则在 $y = 0$ 上,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_-^+ = \frac{2}{\pi}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g_D(\xi)-g_D(x)}{(\xi-x)^2}\mathrm{d}\xi.$$

(ii) 证明, 如果 $\nabla^2 u_\pm = 0$ 在 $y > 0$ 和 $y < 0$ 中, 且 $\partial u_\pm/\partial y = g_N(x)$ 在 $y = 0$ 上, 其中当 $|x| \to \infty$ 时 $g_N \to 0$ 充分快, 则在 $y = 0$ 上,

$$[u]_-^+ = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g_N(\xi)\log|x-\xi|\mathrm{d}\xi.$$

5.33. 证明, 如果 $r \ll \delta \ll 1$, 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(z-\xi)^2+r^2}}$$

可以近似为

$$\int_{-\infty}^{z-\delta}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{z-\xi} + g(z)\int_{z-\delta}^{z+\delta}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(z-\xi)^2+r^2}} + \int_{z+\delta}^{\infty}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi-z}.$$

进一步证明中间项为

$$2g(z)\operatorname{arccosh}\left(\frac{\delta}{r}\right)=2g(z)\log\left(\frac{\delta}{2r}\right)\left(1+O\left(\frac{r^2}{\delta^2}\right)\right),$$

并推出当 $r\to 0$ 时原来的积分趋于 $-2g(z)\log r$.

5.34. 假设 $\phi(r,z)$ 满足

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\quad \phi(0,z)=\frac{z}{1+z^2}.$$

证明

$$\phi(r,z)=\operatorname{Re}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+\mathrm{i})^2}}.$$

ϕ 的奇点在哪里?

5.35. 假设 $f(x)$ 是可积的, 且在 $0\leqslant x<\infty$ 中可微. 用分部积分证明

$$\begin{aligned}I(k)&=\int_0^\infty x^{1/2}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\&=\frac{\mathrm{i}}{2k}\left(g(0)\int_0^\infty x^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x+\int_0^\infty x^{-1/2}(g(x)-g(0))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

其中 $g(x)=f(x)+2xf'(x)$. 推出当 $k\to\infty$ 时

$$I(k)=\frac{1+\mathrm{i}}{2k^{3/2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}f(0)(1+o(1)).$$

注. $\int_0^\infty s^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\mathrm{d}s=(1+\mathrm{i})\sqrt{\pi/2}$.

5.36. (i) 推广 (5.128) 以后的结论证明, 如果 $\nabla^2u=0$ 在 $y>0$ 中, 且当 $y\to\infty$ 时, $u\to 0$, $u(x,0)=g(x)$, 其中 $g(x)\to 0$ 当 $x\to\pm\infty$, 则 $u(x,y)=\operatorname{Re}w(z)$, 其中

$$w(z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi-z}.$$

推出除非 $\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi)\mathrm{d}\xi=0$, 否则当 $|z|\to\infty$ 时, $w(z)=O(z^{-1})$.

(ii) 假设在 $y>0$ 中 $\nabla^2v=0$, 当 $y\to\infty$ 时 $v\to 0$ 且

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)=f(x)\quad 对\ x<0,\quad v(x,0)=g(x)\quad 对\ x>0,$$

其中 f,g 在 $\mp\infty$ 处分别为零. 记

$$W(z)=\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}$$

且令 $w(z) = z^{1/2}W(z)$. 证明, 在实轴上

$$\mathrm{Re}w(z) = h(x) = \begin{cases} x^{1/2}g'(x), & x > 0, \\ -(-x)^{1/2}f(x), & x < 0, \end{cases}$$

并推出

$$W(z) = \frac{z^{-1/2}}{\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - z}.$$

注. 这个结果容易推广. 如果 v 与 $\partial v/\partial y$ 在实轴的几个区间上交替给定, 则在区间的端点上, 左乘的 $z^{1/2}$ 可以换为适当的有平方根的乘积, 它的函数可以交换实部与虚部 (将 Neumann 数据换为 Dirichlet 数据). 进一步, 如果给出在一个区域上这种类型的混和边值问题, 这个区域可以映射到半平面 (例如多边形, 通过 Schwarz-Christoffel 映射, 见 p. 318), 则解也可以写出, 在这种情形下, 可以通过映射函数的导数, 乘以 Neumann 数据 (见习题 5.25).

5.37. 设 $u(x,y)$ 满足对流扩散方程

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla u = \nabla^2 u$$

在区域 D 的外面有半无限的边界 Γ: $y = \pm f(x)$, $0 < x < \infty$, 其中 $f(0) = 0$ 且当 $x > 0$ 时 $f(x) > 0$. 又设 $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$, 其中 ϕ 给定且满足 $\nabla^2\phi = 0$, 在无穷远处 $\boldsymbol{v} \to (1,0)$, 且在 Γ 上 $u = 1$, 在无穷远处 $u \to 0$.

证明, 通过 Boussinesq 变换, 其中 ϕ 与其调和共轭函数 ψ (流函数) 作为自变量, 问题变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

在 (ϕ, ψ) 平面中去掉正实轴, 且

$$u = 1 \quad 在\ \psi = 0, \phi > 0\ 上, \quad u \to 0 \quad 在无穷远处.$$

证明 $u = \mathrm{erfc}\,\eta$, 其中 $(\xi + \mathrm{i}\eta)^2 = x + \mathrm{i}y$ (证明见习题 5.38).

*5.38. 假设

$$\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial x}$$

在 $y > 0$ 中, 且

$$u(x,0) = 1 \quad 对\ x > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \quad 对\ x < 0,$$

且当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时, 除了在 $y = 0$, $x > 0$ 外, $u \to 0$.

(i) 证明, 如果 $z = x + \mathrm{i}y = (\xi + \mathrm{i}\eta)^2$, 则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 2\left(\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

有 $u = 1$, 在 $\eta = 0$ 上及 $u \to 0$, 当 $\eta \to \infty$ 时. 推出

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\eta^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s,$$

其中在极坐标下, $\eta = r^{1/2}\sin\theta/2$.

(ii) 设 $\widehat{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$, 可以得到相同的结果, 其中

$$u(x,0) = f(x) \quad 对\ x < 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g(x) \quad 对\ x > 0;$$

如同 5.9.4 节中的记号, 首先记

$$\widehat{g}_+ + \sqrt{k^2 - \mathrm{i}k}\widehat{f}_- = \frac{\sqrt{k^2 - \mathrm{i}k}}{(\mathrm{i}k)_+},$$

其中当 $|k| \to \infty$ 且 k 为实数时, $\sqrt{k^2 - \mathrm{i}k} \to |k|$, 又记 $\sqrt{k^2 - \mathrm{i}k} = (\sqrt{k})_+ (\sqrt{k - \mathrm{i}})_-$. 因此, 可以证明 $\widehat{g}_+ = (\sqrt{\mathrm{i}/k})_+$, 从这个结果通过边界积分可以得到 (i) 中的解.

*5.39. (i) 移去附带的区域后, Sommerfeld 问题 (5.102) 和 (5.104) 变成

$$(\nabla^2 + 1)u = 0,$$

有

$$u = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cos\alpha} \quad 在\ y = 0,\ x < 0\ 上,$$

且有放射条件. 令

$$u(x,0) = f(x) \quad 对\ x > 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0-}^{y=0+} = g(x) \quad 对\ x < 0,$$

像习题 5.38 一样, 证明

$$\widehat{f}_+(k) + \frac{\mathrm{i}}{(k - \cos\alpha)_-} = -\frac{\widehat{g}_-(k)}{2\sqrt{k^2 - 1}},$$

其中当 $k \to \infty$ 且 k 为实数时, $\sqrt{k^2 - 1} \to |k|$. 如果 $\sqrt{k^2 - 1}$ 定义为 $(\sqrt{k - 1})_-(\sqrt{k + 1})_+$, 假设满足放射条件, 证明

$$\widehat{f}_+(k)(\sqrt{k + 1})_+ + \mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{k + 1} - \sqrt{\cos\alpha + 1}}{k - \cos\alpha}\right)_+$$

$$= -\frac{\widehat{g}_-(k)}{2(\sqrt{k - 1})_-} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{\cos\alpha + 1}}{(k - \cos\alpha)}_-,$$

因此利用 Liouville 定理证明

$$\widehat{g}_-(k) = -2\mathrm{i}\sqrt{\cos\alpha + 1}\left(\frac{\sqrt{k-1}}{k-\cos\alpha}\right)_-.$$

注. 使用 $\widehat{g}(k)$ 的逆变换可以得到

$$u(r,\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(r-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}}\left(-\mathrm{Fr}\left(\sqrt{2r}\cos\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right) + \mathrm{Fr}\left(-\sqrt{2r}\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\right)\right),$$

其中

$$\mathrm{Fr}(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2}\int_z^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\mathrm{d}t.$$

这个解还可以证明满足 (5.102) 后的放射条件.

(ii) 通过设 $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}r}v$, 且 v 为习题 5.38 中变量 ξ 的函数, 在该习题中, 取 x 轴分别沿着照明与反射区域的边界, 证明在 $u(r,\theta)$ 中的两项的每一项满足 Helmholtz 方程.

5.40. 证明, 在习题 5.38 中的抛物坐标下, $k=1$ 时的 Helmholtz 方程变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 4(\xi^2+\eta^2)u = 0.$$

尽管这显然不是传统的分离变量的形式, 但是可以证明当 $u(\xi,\eta) = U(\xi)V(\eta)$ 时, 解是存在的, 其中

$$U'' + 4(\xi^2+\lambda)U = 0, \quad V'' + 4(\eta^2-\lambda) = 0,$$

且 λ 为分离常数.

函数 U 与 V 称为 *抛物圆柱函数*. 证明, 如果 $U(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^2}\widetilde{U}(\xi)$, 则

$$\widetilde{U}'' + 4\mathrm{i}\xi\widetilde{U}' + \lambda\widetilde{U} = 0.$$

利用 p. 101 的思想证明, $\widetilde{U}$ 有积分表示

$$\widetilde{U} = \int_\Gamma \mathrm{e}^{\xi t - \mathrm{i}t^2/8}t^{-1-\mathrm{i}\lambda}\mathrm{d}t$$

对合适的围道 Γ.

*5.41. 对于下面的二选一的 (5.112) 的推导可以证明 $\nabla\wedge$ 可以认为是 $\nabla\cdot$ 的伴随, 反之亦然.

(i) 假设 $\nabla\wedge\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$ 且 $\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$. 利用等式

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{a})$$

证明, 如果 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 在无限远处充分快地趋于零, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{G}\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{H})-(\nabla\cdot\boldsymbol{G})\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

(ii) 设 $\nabla\wedge\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}$ 且 $\nabla\cdot\boldsymbol{G}=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$. 证明

$$\boldsymbol{H}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(iii) 最后, 证明

$$\boldsymbol{G}=\nabla\left(-\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\right)$$

是一个合适的 Green 向量, 由此推出 (5.112). 向量分布的进一步性质将在习题 9.3 中讨论.

5.42. 证明习题 5.1 中的函数 A 满足

$$\frac{\partial^4 A}{\partial\overline{z}^2\partial z^2}=0$$

且可写为

$$A=\frac{1}{2}(\overline{z}\phi_1(z)+z\phi_2(\overline{z})+\chi_1(z)+\chi_2(\overline{z})),$$

其中 $\phi_{1,2}$ 与 $\chi_{1,2}$ 都是解析的. 按照习题 5.26 中的记号, 利用 A 是实函数的事实, 证明 $\overline{\phi}_2(z)=\phi_1(z)$ 且 $\overline{\chi}_2(z)=\chi_1(z)$, 因此,

$$A=\mathrm{Re}(\overline{z}\phi_1(z)+\chi_1(z)).$$

同时证明

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\phi_1'(z),$$

$$\sigma_x-\sigma_y-2\mathrm{i}\tau=2(\overline{z}\phi_1''(z)+\chi_1'(z)).$$

5.43. (i) 推广方程 $\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0$ 并利用第 3 章的准则证明, 如果 $0<|\nabla u|<\infty$, 则当 $p>1$ 时方程为椭圆的, 当 $p=1$ 时为抛物的, 且当 $p<1$ 时为双曲的.

(ii) 对于边值问题

$$\nabla\cdot(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+1=0 \quad 在\ D\ 中 \quad 有 \quad u=0 \quad 在\ \partial D\ 上$$

得到一个变分公式. 证明当 $p<1$ 时, 这个函数既不是上有界的又不是下有界的.

5.44. 曲面 $z=u(x,y)$ 交 $z=f(x,y)$ 于一个闭合的曲线, 且闭合的柱面为 $h(x,y)=0$. 证明, 如果面积

$$\iint \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2+(\partial u/\partial y)^2}}$$

可以最小化, 则在 $h(x,y)=0$ 的内部

$$\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

在边界上 $u=f$. 证明方程可以写为

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0;$$

方程的左边称为曲面 $z=u(x,y)$ 的 *平均曲率*, 它为两个主曲率的和.

5.45. 假设 D 为 (x,y) 平面中具有光滑边界的区域. 在 D 中方程

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=c,$$

具 $\nabla u\cdot\boldsymbol{n}=\cos\gamma$, 在 ∂D 上, 上面的方程描述了一个由垂直位移所组成的常曲率曲面, 这个位移是由占据在圆柱体里固定体积的流体在其表面张力的作用下产生的, 它的壁在 ∂D 上沿 z 方向上. 证明, 如果

$$\frac{p}{A}<c(1+\sec^2\gamma)^{1/2},$$

其中 p 为 D 的周长, A 为 D 的面积, 上述方程是无解的.

5.46. (i) 利用 5.3 节的结论证明, 如果 $\lambda>0$ 且

$$\nabla^2 u+\lambda \mathrm{e}^u=0 \quad 在\ D\ 中 \quad 有 \quad u=0 \quad 在\ \partial D\ 上, \tag{5.172}$$

则 u 是正的. 同样再证明零是它的下解. 假设方程有一个正解, 运用归纳法和最大值原理, 证明方程有最小的正解 u_M.

(ii) 证明, 如果 T 为正交矩阵且 $\boldsymbol{x}'=T\boldsymbol{x}$, 则 Laplace 算符对 $\boldsymbol{x}$ 的作用与对 $\boldsymbol{x}'$ 的作用相等. 推出, 如果 D 为球体, 则 u_M 为径向对称的.

*5.47. 证明 (5.172) 的径向对称解满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{m-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}+\lambda \mathrm{e}^u=0 \quad 对\ 0<r<1,$$

且 $u(1)=0$, 其中 D 为 m 维单位球. 做变量代换 $s=\log r$ 与 $v=u+2s+\log\lambda$ (这种变换将在 6.5 节中介绍), 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}+(m-2)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\mathrm{e}^v=2(m-2)\quad 对\ s<0,$$

其中

$$v(0)=\log\lambda$$

且

$$v=2s+u_0+\log\lambda+o(1)\quad 当\ s\to-\infty\ 时,$$

u_0 是 u 在 $r=0$ 处的值. 当 $m=2$ 时, 证明

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(2-\mathrm{e}^v)}},$$

当 $v=\log\lambda$ 时 $s=0$, 当 $v\to-\infty$ 时 $s\to v/2$, 对上式积分或者考虑 $s(v)$ 的图像, 证明在 $\lambda>2$ 无解, 在 $\lambda<2$ 时有两个解.

证明, 对 $m\geqslant 3$, $(v,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)$ 的相平面在 $(\log 2(m-1),0)$ 处有一个临界点, 并且当 $m\leqslant 9$ 有一个稳定焦点. 假设在螺旋物上 $v\leqslant v_0$, 在其上当 $v\to-\infty$ 时 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}s\to 2$. 证明如果 $\log\lambda<v_0$, 则有唯一解, 而当 $\lambda=2(m-2)$ 时有无穷多个解.

5.48. 证明 m 维方程

$$\nabla^2u+\lambda u^p=0\quad 对\ p<1,\ \lambda>0$$

的球对称解满足 $u=r^{2/(1-p)}\lambda^{1/(1-p)}v$, $r=\mathrm{e}^s$, 其中

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}s^2}+\left(m-2+\frac{4}{1-p}\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+v^p+\frac{2}{1-p}\left(m-2+\frac{2}{1-p}\right)v=0.$$

如果在 $r=1$ 上 $u=1$, 证明

$$v=\lambda^{-1/(1-p)}\quad 在\ s=0\ 处,\quad v\to 常数\cdot\mathrm{e}^{-2s/(1-p)}\quad 当\ s\to-\infty\ 时.$$

证明, 当 p 等于临界的 Sobolev 指数 $p=(m+2)/(m-2)$ 时, 方程可以积分得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{m-2}{2}\right)v^{2m/(m-2)}-\left(\frac{m-2}{2}\right)^2v^2=0.$$

推出在这种情形下 λ 不能超过 v_0^{p-1}, 其中 v_0 是通过 $(v,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)$ 平面原点的闭合抛物轨道上的 v 的最大值.

5.49. 考虑方程

$$\nabla^2u+\lambda(u-\alpha u^2)=0\quad 在\ D\ 中\quad 有\quad u=0\quad 在\ \partial D\ 上$$

在主特征值 λ_0 下的零解的分叉问题. 假设 ϕ_0 是对应的正特征函数. 证明, 如果 $\lambda > \lambda_0$, ϕ_0 为一个下解, 且 ϕ_0 的最大值不超过 $(\lambda - \lambda_0)/\alpha\lambda$. 推出当 $\lambda > \lambda_0$ 时存在一个解是严格正的, 所以分叉为跨临界的或者是所谓的 "超临界".

*5.50. 证明 $w = Mr^{2/(1-p)}$ 为 m 维单位球上的方程

$$\nabla^2 w = w^p \quad 对\ 0 < p < 1$$

的解, 在边界上 $M > 0$, 只要

$$M^{p-1} = \frac{2}{1-p}\left(m - 2 + \frac{2}{1-p}\right).$$

现在假设 u 为方程 $\nabla^2 u = u^p$ 在 D 中的上解, 且在 ∂D 上 $u = \overline{M} > M$, 其中 D 使得单位球闭合. 作关于唯一性的适当的假设, 并可以应用最大值原理, 证明在球的中心 $u = 0$. 通过细微地调整球的位置, 证明 u 在 D 的子区域里为零, 即存在一个 "死核".

5.51. (Jensen 不等式) 假设 $f'' \geqslant 0$, 所以, 对于任意的 X 和 Y,

$$f(Y) \geqslant f(X) + (Y - X)f'(X).$$

令 $w(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$ 且 $\int_D w(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$. 证明, 对任意的 X 和任意光滑的 $u(\boldsymbol{x})$, 有

$$\int_D w(\boldsymbol{x}) f(u(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \int_D w(\boldsymbol{x})(f(X) + (u(\boldsymbol{x}) - X)f'(X))\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

因此

$$\int_D w(\boldsymbol{x}) f(u(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant f\left(\int_D w(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right).$$

*5.52. 一实心小球置于张紧在 (x, y) 平面上的铅丝 ∂D 上的薄膜的 $x = \xi, \eta = \eta$ 处, (ξ, η) 是待求的. 证明垂直位移 $z = u(x, y)$ 近似满足

$$\nabla^2 u = \frac{W}{T_0}\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \quad 有 \quad u = 0 \quad 在\ \partial D\ 上,$$

其中 W 为球体的重量, T_0 为膜的张力. 进一步证明, 如果球体和膜都是光滑的, 则 $\xi + \mathrm{i}\eta = \zeta$, 这里采用 (5.171) 的记号,

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\zeta} = 0.$$

第 6 章　抛物型方程

前　　言

正如我们在前面已经提到的, 也正如本章所要强调的: 在应用科学领域中, 抛物型方程将比其他类型的偏微分方程更频繁地出现. 然而, 这并不是本章成为本书中最长一章的唯一原因. 它同时也反映了近十年来我们在抛物型问题上所获得的大量研究成果. 这也是许多实际应用和大量适用的数学方法互相结合促进的结果.

只是因为存在太多的模型和太多的技巧, 对于我们来说, 将所有的内容都以一种容易理解的形式展现出来是一件相当困难的任务. 唯一贯穿于整章的抛物型方程的性质是抛物型算子的几乎处处光滑性以及正向、反向抛物方程的差异性. 在双曲型方程和椭圆型方程中我们应用了 Riemann-Green 和 Fourier 方法, 而接下来我们所要使用的技巧则是它们的进一步延伸. 除非进行积分的计算, 我们将不会使用复变函数理论. 我们将会叙述一些其他的方法, 比如最大值原理、比较原理、能量法以及群不变性.

本章中, 我们将遵循惯例, 以 D 表示扩散系数, 以 Ω 表示一个空间区域.

6.1　扩散过程的线性模型

6.1.1　热量和质量的传递

抛物型方程伴随着许多物理过程的模型而产生. 其中最为基本的是描述热量在固定、均匀、各向同性的介质中流动的热传导方程. 这是 5.1.3 节中所引入的一个依赖于时间类型的问题, 所以温度 T 不再固定不变, 同时单位体积的热量 ρcT 也随时间而变化. 这里 ρ 是密度, c 是比热. 再由热传导的 Fourier 定律, 热流为 $\boldsymbol{q} = -k\nabla T$, 则当存在单位体积的热源 f 时由热量守恒得

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + f, \tag{6.1}$$

假定 ρ, c 以及热导系数 k 都是正的常量.

当不存在热源的时候, (6.1) 化为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T, \tag{6.2}$$

其中 $D = k/\rho c$ 被称为 **热扩散系数**. 我们把 (6.1) 和 (6.2) 都称为 **热传导方程**. 对于 (6.1) 和 (6.2), 除了 5.1.3 节中所描述的几类空间区域上的边界条件 (有可能以有限的速度运动), 我们还希望了解 $t = 0$ 时 T 的分布.

这些方程也常常被称为 **扩散方程**, 因为它们也建立了质量传输模型. 假设有一种物质 (比如草莓酱), 它能在分子扩散运动的帮助下自由地穿过另一种固定的物质 (比如酸乳酪), 同时假定单位总体积内的草莓酱和酸乳酪的质量比, 即浓度 $c(x,t)$, 是比较低的. 那么 Fick **定律** 便通过 $\boldsymbol{q} = -D\nabla c$ 把流动相的质量通量和 c 联系在一起, 其中 D 被称为 **扩散系数**. 对于不变的扩散系数, 质量守恒意味着

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} = D\nabla^2 c,$$

其中扩散系数为常数. 然而, 如果介质以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动, 对流运动也会产生质量的传递. 我们可以通过推广导出 (6.1) 的讨论, 或者通过认识到总质量的通量由 $\boldsymbol{q} = c\boldsymbol{v} - D\nabla c$ 给出来建立这个模型. 于是 c 满足 **对流 – 扩散方程**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 c - \nabla \cdot (c\boldsymbol{v}),$$

如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ 的话, 上式还可以写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) c = D\nabla^2 c. \tag{6.3}$$

当我们建立河流中污染物的扩散分布 c 模型的时候, (6.3) 沿 x 轴方向呈现出来. 若有一个单向流 $\boldsymbol{v} = (v(y,z), 0, 0)$, 我们有

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right), \tag{6.4}$$

但此时将 D 解释为代表湍流的效应而不是分子的扩散运动可能更有物理意义. 当河流很长的时候, (6.4) 中的 $\partial^2 c/\partial x^2$ 项经常被略去, 而且在这样的情形中, 河流的下游终点处的边界条件也常被忽略. 当做出了这样的近似并且限制于静态时, c 便满足:

$$v\frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right), \tag{6.5}$$

上式表明时间不一定作为扩散方程左端的独立变量而出现. 并且在稳定的对流状态, “到下游的距离” 通常与热传导中的 “时间” 具有相同的意义.

6.1.2 概率与金融

扩散方程也可以从 “随机游动” 或者 “Brown 运动” 中得到. 下面是一个非常简单的一维方程的导出过程, 类似于 1.1 节中的校对模型. 假设在时间 t, 一些质点

占据了 $x=0,\pm k,\cdots$ 处的格点, 浓度 $c(x,t)$ 定义为 t 时刻 x 处的质点的期望数. 在下一个时间段 (比如长度 h), 任意质点均可以向左或者向右移动 (概率均为 p), 或者停留在它当前的位置 (概率为 $1-2p$). 则 x 处的新的期望数为

$$c(x,t+h)=pc(x-k,t)+(1-2p)c(x,t)+pc(x+k,t), \tag{6.6}$$

因此

$$c(x,t+h)-c(x,t)=p(c(x+k,t)-2c(x,t)+c(x-k,t)). \tag{6.7}$$

假设时间步长和网格间距都很小, 并关于 (x,t) 进行 Taylor 级数展开, 同时记 $k^2/h=D/p$, 我们重新得到了热传导方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \tag{6.8}$$

因为热传导是某些原子振动模态的随机激励的结果, 所以这是可行的. 如果左移和右移的概率有所不同的话, 那么将会出现一个和 $\partial c/\partial x$ 成比例的漂移项. 正如 (6.3) 的一维形式所表达的那样.

同样, 金融领域的建模也常常会产生抛物型方程. 假设我们考虑一个 期权, 它是一份合约, 给予持有者在某个特定时刻, 如 T, 以 执行价格 (一个事先约定的金额 E) 买 (或卖) 一些资产 (如股票市场上若干份额) 的权利 (但不是义务). 假设潜在的资产是能在 $0<t<T$ 内增值的股份, 但其价格服从不可预见的波动; 假设我们购买期权而不是股份. 则我们能在股份升值的时候赚钱, 相对的, 我们也可能在股份减值的时候赔光所有的钱, 这是因为在市场中, 没有什么能说明如何用 E 来购买比它花费更少的东西. 然而, 我们可以通过建立期权以及确定数目的股权的 "投资组合" 来为我们的期权保值, 即通过股份持有来保护我们远离不确定性. 就像我们现在所看到的, 这个过程允许我们计算在 T 时刻购入股份的期权的价值 $V(S,t)$, 而它是现在时刻 t 以及资产的名义价值 S 的函数. 假设我们有现金余额 M, 同时持有数目为 Δ, 且随时间变化的资产. 这样, 在购买了一个期权后, 投资组合的价值为 $P=M+S\Delta+V$. 现金余额会以利率 r 产生利息, 同时它也会随着我们买进或卖出资产而发生变化, 所以, 在一个短时期 $\mathrm{d}t$ 内, 我们由利息获得 $rM\mathrm{d}t$ 同时在资产上花费 $-S\mathrm{d}\Delta$. 与此同时, 资产的名义价值和期权价值分别变化了 $\mathrm{d}S$ 和 $\mathrm{d}V$, 则投资组合的整体变化是

$$\mathrm{d}P=rM\mathrm{d}t-S\mathrm{d}\Delta+S\mathrm{d}\Delta+\Delta\mathrm{d}S+\mathrm{d}V=rM\mathrm{d}t+\Delta\mathrm{d}S+\mathrm{d}V.$$

我们现在给出三个重要的模型假定. 首先, 资产的瞬时 "回报率" 是随机变化的, 因此

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}X, \tag{6.9}$$

其中 μ 是一个确定的资产"增长率"; 较为重要的是, $\mathrm{d}X$ 是一个满足均值为 0, 方差为 $\mathrm{d}t$ 的较小的正态随机变量[102], 它刻画了股份价值在面对新信息时的不确定的反应; σ 则是一个反应股份价值"波动"程度的参数. 我们可以通过下式估计 $V = V(S,t)$ 在一个时间区间内的变化

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 + \cdots.$$

现在我们经由 (6.9) 得到 $\mathrm{d}S$, 然后我们给出第二个大胆的假设: 为 $\mathrm{d}S^2$ 作出最大贡献的是 $\sigma^2 S^2 \mathrm{d}X^2$, 又因为 X 的均值为 0 且方差为 $\mathrm{d}t$, 我们用 $\mathrm{d}t$ 来代替 $\mathrm{d}X^2$. 第二步假设其实等价于从 (6.7) 推导到 (6.8) 所需要的假定, 也就是 $k^2 = O(h)$, 这可以用随机微积分中的 Itô *引理*[31] 来加以系统地描述. 结果就是

$$\mathrm{d}P = rM\mathrm{d}t + \Delta \mathrm{d}S + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t).$$

上式使我们可以得到重要的结果, 通过在投资组合中将 Δ 选为 $-\partial V/\partial S$, 我们能够立刻去除所有的由 $\mathrm{d}S$ 表示的随机性.

最后一步用到了 *无套利* 行为的思想, 这是不存在"免费午餐"的技术假设. 在这里的含义就是, 对于一个无风险的投资组合, 所获收益不可能超过无风险利率 r, 所以 $\mathrm{d}P = rP\mathrm{d}t$. 由此, 关于期权的价值, 我们得到了 Black-Scholes *方程*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right). \tag{6.10}$$

注意到, 与热传导方程相比, Black-Scholes 方程是一个带有对流项 $rS\partial V/\partial S$ 以及一个"源"项 rV 的"后向"抛物型方程, 而且我们凭直觉希望加上一个最终条件. 即若 $S > E$, $t = T$ 的时候 V 等于 $S - E$, 这代表了使用期权并迅速将资产卖出的收入; 另一方面, 如果 $S < E$ 的话, 持有者不会愿意付出超过资产本身价值的钱, 也就是说在这个情形中期权并未被使用, 那么 $V = 0$. 我们还注意到, 如果 S 在某个时间趋零的话, 由 (6.9) 可知其为零, 因此 $S = 0$ 处 $V = 0$ 的边值条件也必须被保留[103].

6.1.3 电磁学

热传导方程还以向量形式出现在电磁学中. 我们回忆 4.7.2 节, 在适当的单位系统中若不存在静电荷, 电场 $\boldsymbol{E}$, 磁场 $\boldsymbol{H}$ 以及电流密度 $\boldsymbol{j}$ 满足

$$-\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{E}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0.$$

102 世界资本市场上有着更多更大的波动情况, 而并不会完全符合一个正态随机变量的假设; 此模型务必小心使用.

103 我们所做的讨论仅仅是基于 Black-Scholes 框架下的期权定价问题的一个起点; 它们中的大多数都是 Black-Scholes 方程的边值问题, 或者是该问题的一个异体, 我们建议读者参考文献 [47].

假设我们现在考虑, 时间尺度比电磁波的传播要长得多的情形, 也就是说 ε 非常小; 第二个方程于是成为最低阶的 $\boldsymbol{j} = \nabla \times \boldsymbol{H}$. 同时假设存在载流材料, 也就是说为了使模型变得完整, 必须在材料中引入一个和 $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{E}$ 有关的定律. 对于多数的材料来说, 这就是 Ohm 定律 $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, 其中 σ 是电导率, 同时不妨假定其为常数. 因为 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$, 则 $\nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{E}) = -\nabla^2 \boldsymbol{E}$, 利用这个事实并结合上述方程, 同时在 σ 为常数的假定下, 便得到了向量形式的扩散方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \sigma} \nabla^2 \boldsymbol{j}, \tag{6.11}$$

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 也满足同样的方程, 它被称为 *涡流方程*.

6.1.4 一般注记

下面这个形式所代表的模型的盛行

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u = D \nabla^2 u + f \tag{6.12}$$

提示我们在着手分析抛物型方程的时候不妨先研究这个形式的线性问题, 其中 f 关于 u 至多是线性的, $\boldsymbol{v}$ 和 D 与 u 无关. 独立变量 $\boldsymbol{x}$ 和 t 通常分别代表了空间和时间. 变量 t 可以是增加的 ($\mathrm{d}t > 0$), 也可以是减少的 ($\mathrm{d}t < 0$), 我们很快就能看到 $D\mathrm{d}t$ 的符号所扮演的重要角色. 在上文的例子里那些利用前向方程来预测未来的模型中, 这个乘积是正的. 唯一一个后向方程是 Black-Scholes 方程, 它建立了接近终止日期的时候信息聚集的模型, 而不是信息消失的模型; 在终止日期到来的时候, 期权的价值是确定的. 注意到, 如果 D 是常数的话, 那么通过一个合适的变量代换后它可以成为 ± 1, 同时这个变换不会影响时间的逆转. 关于学术命名, 如果有 $f = 0$ 或者 $\boldsymbol{v} = 0$ 的话, (6.12) 通常分别被称为对流 – 扩散或者 *反应 – 扩散方程*.

然而, 在我们开始研究 (6.12) 之前, 我们首先需要考虑如何给定合适的初 – 边值条件这一重要的问题.

6.2 初–边值条件

就像第 3 章中所说的, 在一维空间时 (6.12) 的特征线由 $\mathrm{d}t^2 = 0$ 给出, 因此任意一条直线 $t =$ 常数都是一个二重特征 (在更高的维数中, $t =$ 常数是特征曲面). 这样, 信息便以无限的速度沿特征线传播. 此外很容易发现, 当关系式 (3.20) 成立的时候, 需要沿特征方向满足的 (3.21) 自动成立. 因此, 我们能要求初始数据 $u = g(\boldsymbol{x})$ 给定在 $t = 0$, 这正是实际应用中经常出现的情形. 进一步地, 除非方程对全空间成立, 否则我们必须再加上边界条件[104]. 正如 5.1.3 节中所述, 线性的边值条件只有

[104] 对于无界区域中的问题, 必须给定无穷远处的增长性条件以确保唯一性, 就像我们即将在 6.4.2 节所看到的那样.

Dirichlet, Neumann 以及 Robin 这几类, 分别指定了 u, 外法向导数 $\partial u/\partial n$ 或者两者的组合 $\partial u/\partial n+\alpha u$; 在最后的 Robin 条件中[105], 我们必须牢记先前在 p.151 中对 α 的符号所做的约定.

对于一维空间的问题, 边界条件被加在 (x,t) 平面上的两条曲线 C_1, C_2 上, 如图 6.1 中所示. 为了不与特征线平行, 这些曲线上不能有任何一段与 t 轴垂直. 这样它们便有有限的速度, 且关于时间通常是常数, 也就是说, 和 t 轴平行, 因此特征线便和每条边界仅相交一次. 此外, 对于一个热传导材料, 由于我们希望通过它的初值以及边界上的条件来决定它内部的温度, 我们就要求在 "类时" 的边界 C_1, C_2 上仅有一个边界条件. 对于一维以上空间的问题, 由 (6.12) 中二阶导数的椭圆组合以及我们在 5.2 节中的讨论, 说明了我们需要在一个闭合的类时边界上给定适当的边界条件, 而不是在一些区域给定两个条件但对外部分不给条件.

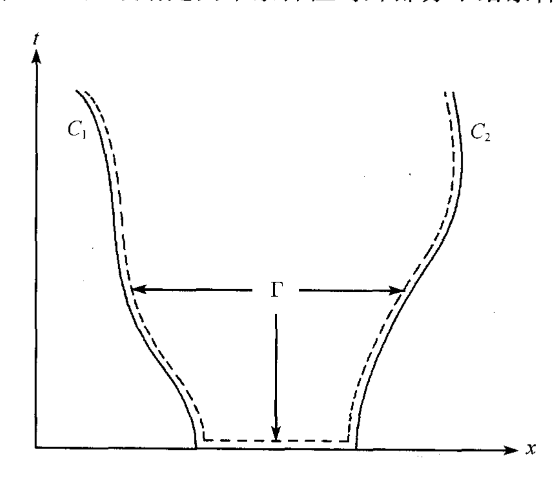


图 6.1 边界曲线 C_1, C_2 和抛物边界

图 6.1 和模型的物理解释之间的关系说明了 $t=0$ 时所给出的条件称为解决 $t>0$ 时的问题的 *初始条件*, 于是 $t=0$ 被称为 "类空" 的. 回忆在 3.1 节中, 第一个例子阐明了需要给出一个初值条件而不是一个 "终值" 条件. 这个结论也能由另一种方式得出, 如果我们考虑由以下的双曲型方程到热传导方程的 $\varepsilon\to 0$ 的极限过程的话

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3.4.3 节的讨论也说明了当 $D\mathrm{d}t>0$ 的时候只能给定一个在 $t=0$ 时的初值条件.

有许多方法可以用来证明抛物型方程解的存在性和唯一性, 但大部分对于本书来说过于抽象. 如先前的两章, 在 6.4 节和 6.5 节中我们会更关心解的显式表达式, 所

105 在最初的一类 Robin 边界中, 我们令 $\beta=1$.

以存在性问题并不会出现. 然而, 极值原理是证明唯一性的广泛适用工具, 因此我们在开始叙述线性方程的积分和级数形式的显式解之前, 先在 6.3 节中介绍极值原理及其应用. 另一个得到特解的方法是通过不变性性质来减少独立变量个数, 该方法在第 4 章和第 5 章中只被简要提及. 我们会先在 6.5 节中较为详细地描述这个方法, 然后在 6.6 节中将其应用于非线性方程, 同时也会介绍一些其他的适合这类方程的解法. 最后一节简要地介绍了二阶抛物型方程组以及高阶抛物型方程.

6.3 极值原理和适定性

与在椭圆型方程中的应用相比, 极值原理被用于处理抛物型方程的适定性时更显得非常重要. 和先前的几章一样, 抛物的极值原理对任意维数的空间都成立. 对于最简单的非齐次热传导方程的极值原理是这样叙述的, 如果

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u+f(x,t)$$

并且 $f\leqslant 0$, 那么 u 在 *抛物边界* Γ 上取到最大值, Γ 即为给定初 - 边值条件的边界 (参见图 6.1). 这样, 当方程在 x 属于 Ω 以及 $0<t<T$ 满足, 那么 u 在 $\partial\Omega$ 上或者 $t=0$ 时取到最大值. 这当然是物理上期望的. 如果热量经由一个体积热汇失去, 即 $f\leqslant 0$, 那么热量会从边界流进 Ω 并在内部消失, 于是最高温度不在 $t=0$ 时取到的话, 便只可能在边界上得到; 类似地, 如果 $f\geqslant 0$, u 在抛物边界上取到最小值.

这里的证明和 5.3 节中 Laplace 方程的极值原理的证明相类似. 首先考虑 $f<0$; 那么, 如果在内部取到最大值, $\partial u/\partial t=0$, $\nabla u=\mathbf{0}$ 而且 $\nabla^2 u\leqslant 0$, 便导致了矛盾; 如果在 $t=T$ 时取到最大值, 就有 $\partial u/\partial t\geqslant 0$, $\nabla u=\mathbf{0}$ 及 $\nabla^2 u\leqslant 0$, 再次引出矛盾. 因此, 最大值只能在 Γ 上取到. 对于 $f\leqslant 0$ 的情形, 记 $v=u+\varepsilon|\boldsymbol{x}|^2/2m$, m 为空间维数, 于是

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nabla^2 u=f-\varepsilon<0,$$

因此, v 在 Γ 上取到最大值. 这样, 有 $u\leqslant v\leqslant \max_\Gamma v\leqslant \varepsilon a^2/2m+M$, 其中 M 是 u 在 Γ 上的最大值, a 是 $|\boldsymbol{x}|$ 的最大值. 令 $\varepsilon\to 0$, 我们便得到 $u\leqslant M$, 于是 u 在 Γ 上取到最大值. 注意到此时, 当 $t>0$ 的时候 u 也能在区域内部取到这个值.

可以证明, 对于下面这个更一般的方程, 只要 D 为正数且 $\boldsymbol{v}$ 为有界, 极值原理也是成立的,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla u=D\nabla^2 u+f(\boldsymbol{x},t).$$

甚至当我们用下面这个更一般的椭圆算子代替 Laplace 算子的时候, 极值原理依然成立,

$$\mathcal{L}u=\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

其中 (a_{ij}) 是正定阵. 然而, 对于稍加改动的方程 $\partial u/\partial t = \nabla^2 u + au$, 我们需要格外当心. 例如, 考虑它的一维情形并给出边界条件: $x = 0, 1$ 时 $u = 0$, 以及 $t = 0$, $0 < x < 1$ 时 $u = \sin \pi x$. 于是 u 在抛物边界上所取得的最大值是 1; 但这个方程的精确解为 $u = e^{(a-\pi^2)t} \sin \pi x$, 当 $a > \pi^2$ 时它在 $t > 0$ 所取到的最大值大于 1.

在证明以下 Dirichlet 问题的基本的唯一性定理的时候, 极值原理是最为关键的工具

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u = \nabla^2 u + f(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{对 } \boldsymbol{x} \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, t > 0, \tag{6.13}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = g(\boldsymbol{x}) \quad \text{对 } \boldsymbol{x} \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \tag{6.14}$$

$$u = h(\boldsymbol{x}) \quad \text{对 } \boldsymbol{x} \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, t > 0. \tag{6.15}$$

这是因为, 两个不同的解之差必然满足令 f, g, h 等于零后的 (6.13)~(6.15), 而由于这个差必须在 Γ 上取到它的最大值和最小值, 则它必须处处为零. 同样地, 初始与边界数据的微小变化能够控制方程解由此而产生的变化, 于是如果解存在的话, 那么这个问题一定是适定的.

*6.3.1 强极值原理

某些唯一性结论的证明依赖于 *抛物型不等式* 的 *强极值原理*. 假设 u 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u \leqslant \nabla^2 u,$$

其中 x 属于 Ω 且 $0 < t < T$, $\boldsymbol{v}$ 为关于 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的有界函数, 同时令 M 为 u 在 Γ 上的最大值. 于是, 粗略地说, 这个原理阐述了: 或者对于所有 Ω 中的 x 及 $0 \leqslant t < T$ 都有 u 小于 M, 同时 $\partial\Omega$ 上 $u = M$ 的任何点成立 $\partial u/\partial n$ 严格为正; 或者在某个区间 $0 \leqslant t \leqslant \tau < T$ 上对于所有的 $\boldsymbol{x}$ 都有 u 恒等于 M; [35] 中将给出更为确切的叙述与证明. 例如, 这个更强的结果使我们可以证明, 若

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla u = \nabla^2 u \quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

$t = 0$ 时有 $u \geqslant 0$, 且在 $\partial\Omega$ 上 $\partial u/\partial n + \alpha u \geqslant 0$, 其中 $\alpha \geqslant 0$, 那么对于 Ω 中任意 x 及 $t > 0$ 都有 $u \geqslant 0$. 这个结果这样得出: 由极值原理, 任何严格的负最小值 m 都会在 $\partial\Omega$ 上达到. 因此, 由强极值原理, 或者在 Ω 中有 $u > m$, 这同在 $\partial\Omega$ 上的一点有 $0 > \partial u/\partial n = -\alpha m$ 相矛盾; 或者在某个包含 $t = 0$ 的区间上有 $u \equiv m$, 而这又会导出矛盾.

有趣的是, 当我们将 (6.13) 和 (6.14) 配上以下的边值条件, 并考虑这个 Robin 问题的解的唯一性的时候, α 的符号就不再显得那么重要了.

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = h(\boldsymbol{x}) \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{6.16}$$

为了建立这个唯一性, 我们需要用到强极值原理. 假设 $\alpha \geqslant 0$ 且两个解之差在某处为正, 于是差的最大值 M 在边界上取到. 因为差值不恒等于 M, 那么由强极值原理法向导数是正的, 这同边界条件相矛盾. 同样地, 差值也不能为负. 另一方面, 如果 $\alpha < 0$ 的话, 我们可以做一个变量代换 $u = g(\boldsymbol{x})u'$, 使 g 在 Ω 中严格为正并且在 $\partial\Omega$ 上 $\partial g/\partial n + \alpha g > 0$; 那么可对 u' 用上述论证并得唯一性. 这同 5.2.1 节中椭圆型方程的 Robin 问题形成了强烈的对比, 那时唯一性本质依赖于 α 的符号[106].

注意到, 如果我们试图在 $t < 0$ 解上述问题, 即 "关于时间回溯", 那么极值原理会允许在 $t = \tau < 0$ 处出现一个最大值. 于是不再会有唯一性和适定性的结果. 事实上, 关于这个倒向热传导方程由于缺乏对数据的连续依赖性而造成的不适定性在 3.1 节中已经给出了证明. 在下一节我们将看到, 如果考虑倒向热传导方程的解的存在性, 我们将会面对更糟糕的结果.

6.4 Green 函数和热传导方程的变换方法

6.4.1 Green 函数: 一般注记

为了在第 4 章中构造双曲型方程的 Riemann 函数, 以及在第 5 章中构造椭圆型方程的 Green 函数, 最快的方法是一个合适的区域中对 $G\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*G$ 的积分用 Green 公式. 其中 $\mathcal{L}$ 代表了微分算子, 因此有 $\mathcal{L}u = f$, 同时 $\mathcal{L}^*$ 表示共轭算子, 它的选取使得被积函数成为散度形式. 我们希望读者现在已经对这个过程中的广义函数方法十分熟悉, 因此我们认为重复经典的推导不再必要. 因此, 为了构造以下热传导方程的 Green 函数

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = f(\boldsymbol{x}, t), \tag{6.17}$$

其中在区域 Ω 上给定初始条件 $u(x, 0) = g(x)$ 并在 $\partial\Omega$ 上给定 Dirichlet 边界条件 $u = h(x)$, 则我们要求 $G(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ 满足

$$\mathcal{L}^*G \equiv -\frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{6.18}$$

进一步, 还需要

$$G = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 上}. \tag{6.19}$$

另外, 与常微分方程初值问题 (4.11) 的类似, 我们设

$$G = 0 \quad \text{对 } t = T > \tau \text{ 成立}. \tag{6.20}$$

106 当然, 抛物型方程的解的长时间性态与 α 的符号密切相关.

考虑到 G 是由 $t=T$ 的反推得到, 且因为 δ 函数是非负的, 便由极值原理得到 G 是正的. 更重要的是, 由 (6.17)~(6.20), 我们得到

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(G\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u\right) + u\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \nabla^2 G\right)\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t = \int_0^\tau \int_\Omega fG\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t - u(\boldsymbol{\xi}, \tau),$$

由此便得到一个基本的结果

$$u(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x}, 0)G(\boldsymbol{x}, 0; \boldsymbol{\xi}, \tau)\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^\tau \int_\Omega fG\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t - \int_0^\tau \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t. \quad (6.21)$$

就像第 4 章和第 5 章中的那些相应的 Riemann 函数和 Green 函数表示的情形, 只要我们知道 G 存在并且唯一, (6.21) 式便可以用来证明抛物形方程中的适定问题. 当然, (4.14), (5.52) 以及 (6.21) 这几个表达式为我们去除了三类线性偏微分方程中的难点, 因为它们显示了我们在这几章中所遇到的所有偏微分算子的 "逆" 的结构. 这三个结果的价值无论如何都不会被高估.

在开始寻找某些特殊情形的 G 之前, 我们先按照惯例给出由 (6.18) 的右端项所诱导出的那些远离 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$, $t=\tau$ 的点的奇异性的影响的一些注释. 首先, 通过考虑双曲型方程在特征线重合时的极限, 促使我们期望 G 中有某些不连续性沿特征线 $t=\tau$ 方向传播, 虽然我们不得不等到下节才能确切地看到这些不连续是什么. 然而, 我们能够通过下面的比较来阐明在 $t=\tau$ 上究竟发生了什么.

- 考虑对下面的问题上作 Laplace 变换的效果

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nabla^2 u_1 = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t), \quad (6.22)$$

其中 $u_1(\boldsymbol{x}, t) = 0$, $t<0$. 结果是

$$\widetilde{u}_1(\boldsymbol{x}, p) = \int_0^\infty u_1(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\varepsilon}^\infty u_1(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

其中 $p\widetilde{u}_1 - \nabla^2\widetilde{u}_1 = \delta(\boldsymbol{x})$.

- 然而, 如果在 $t>0$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nabla^2 u_2 = 0,$$

且在 $t=0$

$$u_2 = \delta(\boldsymbol{x}), \quad (6.23)$$

那么 $p\widetilde{u}_2 - \delta(\boldsymbol{x}) - \nabla^2\widetilde{u}_2 = 0$.

因此, 当 $t>0$ 时有 $u_1=u_2$, 也就是说 (6.22) 右端项的效果等价于 (6.23) 的边界条件. 这说明了, 通过用 $\tau-t$ 来替换 t, 我们能断言 (6.18)~(6.20) 等价于

$$\mathcal{L}^*G = 0 \text{ 对 } D<t<\tau \quad (6.24)$$

其中

$$G=0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{6.25}$$

并且

$$G=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) \quad \text{在 } t=\tau, \tag{6.26}$$

$$G=0 \quad \text{在 } t>\tau. \tag{6.27}$$

由此我们可以看到 G 代表了 $t=\tau$ 处的一个“热点”, 同时它是一个仅和 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\tau-t$ 有关的函数. 作为 $\boldsymbol{x}$ 和 t 的函数, G 满足共轭倒向热传导方程 (6.17). 以后我们会用 $G(\boldsymbol{x},\tau-t;\boldsymbol{\xi})$ 来代替 $G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$.

6.4.2 无边界热传导方程的 Green 函数

这是最简单的几何情形, 对于它的研究能使我们确定 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$, $t=\tau$ 处奇性的准确形式, 且我们希望其与任何给定维数的 Ω 无关. 我们从一维情形开始, 为方便起见, 我们令 $t'=\tau-t$, $x'=x-\xi$ 及 $G(x-\xi,\tau-t)=G'(x',t')$, 便得到下面的初值问题

$$\frac{\partial G'}{\partial t'}=\frac{\partial^2 G'}{\partial x'^2} \quad \text{对 } t'>0,$$

$$G'=\delta(x') \quad \text{对 } t'=0, \quad G'\to 0 \quad \text{当 } |x'|\to\infty. \tag{6.28}$$

可以用一系列方法, 如 Fourier 变换来显式求解这个问题. 其解描述了热量由一个固定热点在无限导热介质中的传导. 为了帮助解释这个问题, 我们分别用 x, t 和 $\mathcal{G}(x,t)$ 来代替 x', t' 和 $G'(x',t')$.

由 Fourier 变换 $\widehat{\mathcal{G}}(k,t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathcal{G}(x,t)\mathrm{d}x$, 问题成为

$$\frac{\partial\widehat{\mathcal{G}}}{\partial t}=-k^2\widehat{\mathcal{G}} \quad \text{对 } t>0, \quad \widehat{\mathcal{G}}(k,0)=1. \tag{6.29}$$

这便得到

$$\widehat{\mathcal{G}}(k,t)=\mathrm{e}^{-k^2t}.$$

同时由 Fourier 逆变换理论, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k^2t-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t(k+\mathrm{i}x/2t)^2}\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}\int_{-\infty+\mathrm{i}x/2\sqrt{t}}^{\infty+\mathrm{i}x/2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中 $k = s/\sqrt{t} - \mathrm{i}x/2t$. 最后的被积函数在 $0 < \mathrm{Im}s < x/2\sqrt{t}$ 内解析, 对于很大的 $\mathrm{Re}s$ 则会消失. 由 Cauchy 定理, 上式应等于沿实轴的积分. 这样, 因为 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}$, 我们最后得到

$$\mathcal{G}(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}} \quad 对\ t > 0. \tag{6.30}$$

它在 $t=0$ 处的 δ 函数性质就是 (4.12) 的一个例子. 方程 (6.30) 揭示了 $\mathcal{G}$ 在 $t=0$ 处的一个 *本质奇性*: 除 $x=0$ 外所有的时间导数都为 0. 这就是把一个热源放在原点, 非常弱的奇性沿通过原点的特征线传播. 我们希望对于所有满足 (6.18) 的 G 在特征线 $\tau = t$ 都具有这种奇性.

回到原来的符号, 即 x, t 为物理变量, 则在一维情形下, 由 (6.24)~(6.27) 在全直线上的解为

$$G(x,\tau-t;\xi) = \mathcal{G}(x-\xi;\tau-t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4(\tau-t)}. \tag{6.31}$$

我们现在可以用

$$G(x,\tau-t;\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4(\tau-t)} + O(1) \quad 当\ x\to\xi,\ t\to\tau$$

来替换 (6.26), 就像在 (5.49) 的二维问题下的 Laplace 方程中用

$$G = \frac{1}{2\pi}\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}| + O(1)$$

一样. 函数 (6.30) 被称为热传导方程的 *基本解*, 对它我们能给出一些注记[107].

当 $u(x,0) = g(x)$ 的时候, 由 Green 函数的表示得到

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4\tau}\mathrm{d}x, \tag{6.32}$$

上式可以被认为是基本解以密度 g 分布在 $t=0$ 处的结果. 在 $t<0$ 的时候, 可以发现这个解关于 x 和 t 都是解析的, 甚至对于很不规则的初始数据也是如此[108], 同时它保证了当初值为正时 u 也为正.

虽然 (6.32) 给出了一个解的显式表示, 但它隐含要求了 $g(x)$ 不能随 $|x|\to\infty$ 而增长得过快. 为了保证 (6.32) 确实表示了唯一解, 则要有这样的增长条件, 即存在常数 K 使得当 $|x|\to\infty$ 的时候 $|g| = O(\mathrm{e}^{Kx^2})$. 这可以通过考虑有限区间上的零初值问题来加以证明, 参见习题 6.4. 然而, 满足 $u(x,0)=0$ 的非零 "特征解" 也许

107 (6.30) 对于 Brown 运动模型 (6.8) 的推论在习题 6.6 中加以说明.

108 注意到在 g 的跳跃不连续点, 当 τ 趋于 0 时, $u(\xi,\tau)$ 会在 ξ 的任意一侧趋于 g 的平均值.

会存在, 如果我们注意到

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{6.33}$$

只要 f 无限次可微并且级数收敛, 对于任意 x 和 $t\geqslant 0$ 均满足热传导方程. 如果允许 f 以及它的导数随 $t\downarrow 0$ 而趋于零的话, 只要级数收敛 (6.33) 即为一个特征函数 (参见习题 6.5). 不幸的是, 在 $|x|\to\infty$ 的时候很难判断 (6.33) 的性质[109].

(6.30) 使我们可以在更基础的层次上再次用显式说明倒向的热传导方程的不适定性. 假设我们求满足下式的 u

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad 对\ t>0,$$

且 $t=0$ 时有 $u=\sqrt{\varepsilon}\mathrm{e}^{-x^2/4\varepsilon}/2\sqrt{\pi}$, 并当 $|x|\to\infty$ 时 $u\to 0$, 所以对于所有的 x 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $u(x,0)\to 0$. 于是, 由 (6.30) 得到

$$u=\frac{\varepsilon\mathrm{e}^{-x^2/4(\varepsilon-t)}}{2\sqrt{\pi(\varepsilon-t)}},$$

上式在 $x=0$ 处随着 $t\to\varepsilon$ 而趋于无穷, ε 取得任意小.

解 (6.32) 的形式也指出, 随着 u 的演化, 初值数据的细节会失去, 在经过相当长的时间后还能剩下的记忆就是基本解的某个倍数. 我们可以通过下式来得到这个结果

$$u(\xi,\tau)=(4\pi\tau)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-y^2/4}\mathrm{e}^{-x^2/4\tau+xy/2\sqrt{\tau}}\mathrm{d}x,$$

其中 $\xi=\sqrt{\tau}y$. 对于较大的 τ, 它可以由下式的近似

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-y^2/4}\mathrm{d}x=\frac{g_0}{2\sqrt{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\xi^2/4\tau}, \tag{6.34}$$

这里 g_0 是初始条件中的热量的总和[110].

上文中的很多结果可以被平凡地推广到 $\Omega=\mathbb{R}^m$ 的情形 $(m>1)$. 当我们回到原来的变量时, 由此得到主要的结果是 (6.31) 成为

$$G(\boldsymbol{x},\tau-t;\boldsymbol{\xi})=(4\pi(\tau-t))^{-m/2}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2/4(\tau-t)} \quad 当\ 0<t<\tau \tag{6.35}$$

(6.35) 可以用 m 维 Fourier 变换并利用 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}$ 的球对称性质导出, 我们会在 6.5 节中用另一个方法导出.

109 能够证明一个有点令人意外的结果: 假如我们允许 $|x|\to\infty$ 时充分增长, 那么热传导方程可在 $-\infty<x<\infty$ 中, 任意给定 $t=0$ 和 $t=T>0$ 时的数据求解. 另一方面, 如果对于任意 $K>0$, 当 $|x|\to\pm\infty$ 时有 $|u(x,t)|<\mathrm{e}^{Kx^2}$, 那么对于任意 $t>0$, 初值问题的解存在并且唯一.

110 $g_0=0$ 时, 由更加精确的估计得到, 一般来说当 $\tau\to\infty$ 时 u 的阶为 $O(\tau^{-3/2})$.

6.4.3 边值问题

6.4.3.1 Green 函数和镜像

原则上, 我们能够去除由 (6.30) 或 (6.35) 表示的 Green 函数的奇异性质, 来获得一个具有良好性质数据的关于 G "正则部分" 的边值问题. 然而, 和椭圆型方程一样, 对于任何给出的特例要寻找 Green 函数是一件相当困难的事情. 于是, 我们不得不再次进行逐例列举. 这里先给出两个一般的注记.

由 Laplace 算子是自共轭的事实, 我们希望 G 的空间部分在合适的边界条件下是对称的, 即

$$G(\boldsymbol{x},\tau-t;\boldsymbol{\xi})=G(\boldsymbol{\xi},\tau-t;\boldsymbol{x}),$$

显然, 如果我们交换 τ 和 t 则不会有任何对称性质. 此外, 我们可以用将在第 8 章引入的方法证明, 边界的存在使得 G 和 (6.35) 的形式相差一个随 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 间的 "测地线距离" $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 减少而增加的函数, 至少对于比较小的 $\tau-t$ 值. d 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 间的最短路径, 如果必要的话可以沿着边界. 这便产生了一个和 5.12 节中 Laplace 方程的 Green 函数的 "边界修正" 的有趣对比.

我们以某些简单例子中的一些 Green 函数的显式表达式来结束本节. 一个更为全面的目录可以在 [9] 中找到. 我们首先介绍两个一维空间中的例子.

例 6.1 (单位区间上的 Neumann 问题) 通常要解决的问题是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f \quad 对\ 0<x<1,\ t>0,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=h_0 \quad 对\ x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}=h_1 \quad 对\ x=1, \quad u=g(x) \quad 在\ t=0.$$

则 Green 函数 G 必须满足

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0 \quad 对\ 0<x<1,\ 0<t<\tau,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=0 \quad 在\ x=0\ 和\ x=1, \quad G=\delta(x-\xi) \quad 在\ t=\tau.$$

我们可以推广 5.6.1.3 节中介绍的镜像法. 回忆 $(4\pi t)^{-1/2}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4t}$ 代表了由一个在 $t=0$, $x=\xi$ 的热点产生的温度, 要在 $x=0$ 处使导数为零, 则必须在 $x=-\xi$ 处引入一个镜像的热点. 接着, 为了在 $x=1$ 处满足 $\partial G/\partial x=0$, 在 $x=2-\xi$ 和 $x=2+\xi$ 处还需要引入两个镜像. 不断重复这个过程, 除了在 $x=\xi$ 处的 "真正的" 热点外, 我们还得到了 $x=-\xi,\cdots,-4\pm\xi,-2\pm\xi,2\pm\xi,4\pm\xi,\cdots$ 处的一系列镜像 (参见图 6.2).

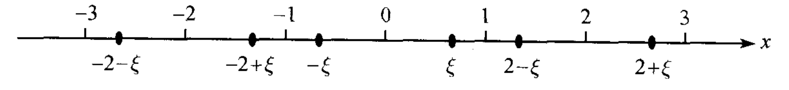


图 6.2 热点位于 $x=\xi$, 以及它的镜像

于是, 便得到 Green 函数[111]

$$G(x,\tau-t;\xi)=(4\pi(\tau-t))^{-1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-(x+2m-\xi)^2/4(\tau-t)}+\mathrm{e}^{-(x+2m+\xi)^2/4(\tau-t)}\right),\tag{6.36}$$

显然上式关于 x 和 ξ 是对称的, 而且是正的. 这个问题也可以如下例用分离变量的方法来求解.

例 6.2 (单位区间上的零 Dirichlet 数据) 就像在双曲型和椭圆型方程中那样, 分离变量法可以用于求 Fourier 级数形式的 Green 函数. 单位区间上的零 Dirichlet 资料的热流问题是

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 对\ 0<x<1,$$
$$u=0\quad 在\ x=0\ 和\ x=1,\quad u=g(x)\quad 在\ t=0.$$

分离变量的解 $u=T(t)X(x)$ 为

$$u=\mathrm{e}^{-m^2\pi^2 t}\sin(m\pi x),\quad m\ 是整数,$$

$\{\sin m\pi x\}$ 是自共轭算子 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 在零 Dirichlet 条件下的一个完备正交的特征函数集.

于是得到通解

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\mathrm{e}^{-m^2\pi^2 t}\sin(m\pi x);$$

Fourier 系数 a_m 可由初值条件决定

$$a_m=2\int_0^1 g(\xi)\sin(m\pi\xi)\mathrm{d}\xi.$$

于是边值问题的解为

$$u(x,t)=2\int_0^1 g(\xi)\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-m^2\pi^2 t}\sin(m\pi x)\sin(m\pi\xi)\mathrm{d}\xi,\tag{6.37}$$

因此, 由 (6.21), Green 函数为 $G(x,\tau-t;\xi)$, 其中

$$G(x,\tau-t;\xi)=2\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-m^2\pi^2(\tau-t)}\sin(m\pi x)\sin(m\pi\xi).\tag{6.38}$$

111 习题 6.8 给出了另外一种推导方法.

当然, (6.38) 可以写成和 (6.36) 相似的形式, 只要把所有其他的热点都替换成数值相等但性质相反的 "冷点" 即可[112]. 我们还注意到 G 可以写成 θ 函数的形式 (对 Neumann 情形见习题 6.8).

在第 5 章中我们提到, 当我们离开边界的时候, Fourier 级数的表示方式能使我们得到关于椭圆型方程的解的性态的有用信息. 在这里, Green 函数的 Fourier 级数表示对于寻找解的长期性态尤其有用: 只要 $\int_0^1 g\sin(\pi x)\mathrm{d}x \neq 0$, 那么对于较大的 t, 级数中的支配项也就是 m 最小的项, 即 $a_1\mathrm{e}^{-\pi^2 t}\sin\pi x$. 这便使我们的预期得到确认: 一个一开始是热的物体, 如果其表面温度一直保持在零度的话, 那么它会以指数的速度迅速冷却. 对于满足 $x=0,1$ 处 $\partial u/\partial x=0$ 的绝热边界, 其主特征值是零, 而且容易证明当 $t\to\infty$ 的时候有 $u\to\overline{g}$, 这里 $\overline{g}=\int_0^1 g\mathrm{d}x$ 是初始温度的平均值 (参见习题 6.9). (6.37) 式与 Neumann 问题的解都表明了扩散的平滑效应: 高频的谐波经长时间衰减迅速, 就像第 3 章中所预测的那样. 我们注意到, 在估计解的短期性态的时候, 级数解如 (6.36) 要比 (6.37) 更有用, 于是 "物理存在" 的那个热点便占据了支配地位 (除非接近边界的情形, 那里还会产生一个镜像的贡献); 当然, 对于长时间来说则恰恰相反.

6.4.3.2 高维边值问题

高维情形下的问题不太容易用镜像法求解, 不过有时却能通过分离变量或者对空间变量的特征函数展开的途径来求解. 例如, 考虑以下有界区域中的 Robin 边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad u=g \quad \text{在 } t=0.$$

关于这个问题, 在 (6.16) 后已给出了一般的注记, 但如果我们把解写成以下形式的话, 我们能发现更多有用的结论:

$$u(\boldsymbol{\xi},\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} g_m\mathrm{e}^{-\lambda_m\tau}\phi_m(\boldsymbol{\xi}),$$

上式中的 ϕ_m 经过适当标准化, 且满足下面的 Helmholtz 特征值问题

$$\nabla^2\phi+\lambda\phi=0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}+\alpha\phi=0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

其中特征值 $\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, 并且 $g_m=\int_\Omega \phi_m(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 因此

$$u(\boldsymbol{\xi},\tau)=\int_\Omega g(\boldsymbol{x})\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_m\tau}\phi_m(\boldsymbol{x})\phi_m(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{6.39}$$

112 两者的等价性是 Poisson 求和公式 的一个例子.

这不仅向我们揭示了 Green 函数是 $G(\boldsymbol{x},\tau-t;\boldsymbol{\xi})$, 其中

$$G(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{\xi})=\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_m t}\phi_m(\boldsymbol{x})\phi_m(\boldsymbol{\xi}),$$

而且还预言了当 $t\to\infty$ 时, 若 $g_0\neq 0$, 则 $u(\boldsymbol{x},t)$ 趋于 $g_0\phi_0(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$.

现在让我们考虑这个表达式所蕴涵的解是如何依赖于 α 的. 当 α 是正数的时候, 这代表了 Newton 冷却过程, 此时主特征值是正的, 表明 u 会衰减至零. 然而, 该表达式具有一个 “能量输入” 型的边界条件, 这通常代表了一个活动的或者受控的边界, 则 α 和主特征值都是负数, 于是解随时间以指数增长; 此时稳定性已近丧失同时问题是不适定的. 我们指出, 如果 $\partial\Omega=\partial\Omega_-\cup\partial\Omega_+$, 在 $\partial\Omega_+$ 上满足 $\alpha\geqslant 0$ 并且在 $\partial\Omega_-$ 上满足 $\alpha\leqslant 0$, 那么两段边界的相对尺寸和 α 的数量级决定了 λ_0 的符号, 如下例所见.

例 6.3 (*正方形的 Robin 边界条件*) 在正方形 $-1<x,y<1$ 中考虑具有以下边界条件的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=0 \quad 在\ y=\pm 1\ 上, \quad \frac{\partial u}{\partial n}-\beta u=0 \quad 在\ x=\pm 1,$$

其中 $\alpha,\beta>0$, 所以热量经由边界 $x=\pm 1$ 输入再由边界 $y=\pm 1$ 输出.

主特征函数是 $\phi_0=\cosh\mu x\cos\nu y$, 其中

$$\lambda_0=\nu^2-\mu^2,\quad \mu=\mathrm{artanh}\beta,\quad \nu=\mathrm{arctan}\alpha,$$

同时 $0<\nu<\pi/2$. 若 $\mathrm{arctan}\alpha=\mathrm{artanh}\beta$, 则有 $\lambda_0=0$, 而若 $\beta>\tanh(\pi/2)$, 无论 α 有多大, $\lambda_0<0$ 且平凡解是不稳定的.

6.4.3.3 变换方法

当热传导问题没有边界时, 空间算子便有了一个连续谱, 这便是为什么我们通过 Fourier 变换而不是 Fourier 级数来得到 (6.30). 此外, 通常我们会在无界的时间区间 $0<t<\infty$ 上寻找解, 这便提出使用 Laplace 变换的可能性. 然而, 想要决定对哪个变量进行变换并不是一件容易的事情, 只有经验才能告诉我们如何选择变换的变量使变换在技术上最易实现. 因此, 我们将进一步给出一些变换求解的例子.

例 6.4 (*Fourier 变换与 Laplace 变换 (i)*) 假设我们不使用 Fourier 变换来导出 (6.32), 而是使用 Laplace 变换

$$\widetilde{u}(x,p)=\int_0^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

于是我们会得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{u}}{\mathrm{d}x^2}-p\widetilde{u}=-g(x),$$

既然我们希望 u 随着 $|x| \to \infty$ 而衰减, 则

$$2\sqrt{p}\widetilde{u}(x,p) = \int_{-\infty}^{x} g(\xi)\mathrm{e}^{-\sqrt{p}(x-\xi)}\mathrm{d}\xi + \int_{x}^{\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{\sqrt{p}(x-\xi)}\mathrm{d}\xi,$$

上式中定义 $\sqrt{p}$ 具有正实部. 为了重新得到 (6.32), 我们不得不面对交换 $\widetilde{u}$ 的 Laplace 逆中的积分次序这一棘手的问题, 这牵涉 $\mathrm{e}^{-\sqrt{p}x}/\sqrt{p}$ 的 Laplace 逆变换为 $\mathrm{e}^{-x^2/4t}/\sqrt{\pi t}$ 这一事实.

例 6.5 (Fourier 变换与 Laplace 变换 (ii)) 假设我们试图解以下边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.40}$$

其中

$$u(0,t) = h(t) \quad 对\ t > 0 \quad 以及 \quad u(x,0) = 0 \quad 对\ x > 0,$$

通过对 t 的 Laplace 变换, 我们得到

$$\widetilde{u}(x,p) = \widetilde{h}(p)\mathrm{e}^{-x\sqrt{p}},$$

像往常一样, 有 $\mathrm{Re}\sqrt{p} > 0$. 因此, 由卷积理论,

$$u(x,t) = \int_0^t h(s)w(x,t-s)\mathrm{d}s, \tag{6.41}$$

其中 w 满足 $\widetilde{w}(x,p) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{p}}$. 通过一些对积分求逆的处理, 能够得到

$$w(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt}\sin x\sqrt{p}\mathrm{d}p, \tag{6.42}$$

接着我们能够发现上式等于 $x\mathrm{e}^{-x^2/4t}/2\sqrt{\pi t^3}$ (进一步的讨论参见习题 6.13).

由 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2$ 在 $x=0$ 处零 Dirichlet 问题的谱的性质的提示, 如果我们类似 5.7.2 节那样定义如下的 Fourier 正弦变换的话, 问题会变得简单起来, 令

$$\widehat{u}_s(k,t) = \int_0^{\infty} u(x,t)\sin kx\mathrm{d}x.$$

由此得

$$\widehat{u}_s(k,t) = \mathrm{e}^{-k^2 t}\int_0^t kh(\tau)\mathrm{e}^{k^2\tau}\mathrm{d}\tau,$$

通过逆变换, 有

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k\mathrm{e}^{-k^2 t}\sin kx\left(\int_0^t h(\tau)\mathrm{e}^{k^2\tau}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}k,$$

如果我们交换一下积分次序并且令 $k=\sqrt{p}$, 上式就是 (6.41) 和 (6.42) 的结合.

例 6.6 (另一个两点边值问题) 让我们再次求解热传导方程, 不过这次我们给出以下边界条件

$$u(\pi,t)=g(t)\quad 对\ t>0,\quad u(0,t)=0\quad 对\ t>0,\quad u(x,0)=0\quad 对\ 0<x<\pi.$$

我们可以尝试分离变量, 但提 $x=\pi$ 处的边界条件是困难的. 我们能用 Green 函数 (6.38), 但 Laplace 变换其实更为简单, 这是因为

$$\widetilde{u}(x,p)=\widetilde{g}(p)\frac{\sinh\sqrt{p}x}{\sinh\sqrt{p}\pi},$$

只要能求 $\sinh\sqrt{p}x/\sinh\sqrt{p}\pi$ 的逆, 我们便能得到一个直接的卷积表示. 这个函数的唯一一类奇点是 $\sqrt{p}=\pm\mathrm{i}n$, $n=1,2,3,\cdots$ 处的单极点, 并且 $\mathrm{e}^{pt}\sinh\sqrt{p}x/\sinh\sqrt{p}\pi$ 的相应留数是 $(-1)^{n+1}(2n/\pi)\sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2t}$, 因此

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t(-1)^{n+1}n\sin(nx)\mathrm{e}^{-n^2s}g(t-s)\mathrm{d}s.$$

*6.4.4 对流–扩散问题

在热传导方程的时间导数旁引入对流项 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u$, 使空间偏导数不再自伴. 这令特征函数展开方法变得难以使用, 因为非正交的性质使得系数的确定变得非常棘手. 当然, 如果没有边界且 $\boldsymbol{v}$ 为常量的话, 那么便可以通过将 "位置" 改变到 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t$ 来消去对流项. 为了描述 $\boldsymbol{v}$ 不是常量时的复杂性, 我们通过对河流污染排放建模简化的对流 – 扩散方程 (6.4) 进行 Laplace 变换来结束本节. 简单起见, 我们忽略 $\partial^2c/\partial x^2$, 并假设河流是二维的, 于是 $c=c(x,y,t)$. 我们还假定水流以速度 $v(y)>0$ 沿 x 方向流动, 同时河流占据的部分为 $0<y<1$, $x>0$, 并且河岸 $y=0,1$ 上没有污染物的排放, 另外在初始时刻河水是干净的. 这样, Laplace 变换 $\widetilde{c}(x,y,p)=\int_0^\infty c(x,y,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 满足

$$D\frac{\partial^2\widetilde{c}}{\partial y^2}=v(y)\frac{\partial\widetilde{c}}{\partial x}+p\widetilde{c}\quad 对\ 0<y<1,\ x>0,$$

并且

$$\frac{\partial\widetilde{c}}{\partial y}=0\quad 在\ y=0,1\quad 以及\quad \widetilde{c}=\widetilde{c}_0(y,p)\quad 在\ x=0,$$

其中 $c_0(y,t)$ 是 $x=0$ 处排入的污染物.

这个关于 $\widetilde{c}$ 的复杂问题可以通过对 x, y 分离变量并利用特征函数展开来加以完美地解决. 由此得到的结果是

$$\widetilde{c}(x,y,p)=\sum_{m=0}^{\infty}\widetilde{c}_{0m}\mathrm{e}^{-\lambda_m x}\psi_m(y,p),\tag{6.43}$$

其中 ψ_m 为标准化的特征函数, 它满足

$$D\frac{\mathrm{d}^2\psi_m}{\mathrm{d}y^2}-(p-\lambda_m v(y))\psi_m=0,$$

且有

$$\frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}y}=0 \quad 在\ y=0,1,$$

以及

$$\widetilde{c}_{0m}=\int_0^1\widetilde{c}_0\psi_m\mathrm{d}y.$$

只有在 p 很小的时候才能容易地求得 λ_m. 可以通过令 t 变得较大来说明这个结论, 而这又通常是一个很有实际意义的极限过程. 正如习题 6.19 中所示的, 对于较小的 p, 有

$$\lambda_0=\frac{p}{v_0}-\frac{D_0p^2}{v_0^3}+\cdots,$$

其中 $v_0=\int_0^1 v(y)\mathrm{d}y$, 而 D_0 的定义由习题 6.19 给出. 这说明了 (6.43) 中的第一项的 Laplace 逆变换满足著名的 Taylor 扩散模型

$$\frac{\partial c}{\partial t}+v_0\frac{\partial c}{\partial x}=D_0\frac{\partial^2 c}{\partial x^2};$$

为了验证这个结论, 我们只需对 Taylor 扩散模型作 Laplace 变换, 并研究其在较小的 p 时的性态即可. y 和 u 的依赖效应代表了水流的 "剪切", 即相对于 x 方向的纵向扩散.

当我们所关心的区域速度变号时, 对流 - 扩散问题会变得更加难以求解[113]. 比如, 假设我们在 $v(y)=2y-1$ 的条件下考虑上述问题的稳定状态. 这意味着我们需要解一个抛物型方程, 它在 $y>\frac{1}{2}$ 时关于 x 是前向的, 而在 $y<\frac{1}{2}$ 时关于 x 则是倒向的. 因此, 我们不能在所有满足 $x=0$ 的地方给定污染输入, 而只能在 $\frac{1}{2}<y<1$ 中给定 $c(0,y)$; 类似地, 对于某个 $L>0$ 在 $0<y<\frac{1}{2}$ 给定 $c(L,y)$[114]. 实际上, 如果我们试图像以前一样分离变量的话, 我们会发现

$$c(x,y)=\sum_m A_m\mathrm{e}^{-\lambda_m x}\psi_m(y),$$

其中特征函数 ψ_m 满足

$$D\frac{\mathrm{d}^2\psi_m}{\mathrm{d}y^2}+\lambda_m(2y-1)\psi_m=0,\quad \frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}y}(0)=\frac{\mathrm{d}\psi_m}{\mathrm{d}y}(1)=0.$$

113 这种情况通常在工业过程中出现, 比如在蒸馏过程中, 质量传递的 "逆流" 便会出现.

114 有其他更多的较为一般的 "正向 - 倒向" 问题, 通常它们被称为 Gevrey 抛物问题, 例如 v 在穿越一般边界时改变符号的稳态问题.

事实上, ψ_m 是一个 Airy **函数** (参见习题 4.10) 而且特征值 λ_m 都可正可负, 然而在先前所讨论的简单情形中它们都是正的. 虽然 ψ_m 在 $0<y<1$ 中是完备的, 但无论在 $0<y<\frac{1}{2}$ 还是在 $\frac{1}{2}<y<1$ 中它们都是不完备的. 因此, 从边界条件

$$c(0,y)=\sum_m A_m\psi_m(y),\quad c(L,y)=\sum_m A_m\mathrm{e}^{-\lambda_m L}\psi_m(y)$$

不能直接得到系数 A_m.

在以上的几个例子中可以看到抛物型方程的有趣性质, 它们可以用一些完全不同的方法来求解, 而这些方法也可以被应用到非线性的问题上, 而这正是我们在下一节所将要讨论的.

6.5　相似解和群

如果 $u(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

显而易见的是, $u(\mu x,\mu^2 t)$ 也同样满足这个方程, 其中 μ 为任意常数. 这启示了我们, 对于所有的 x 和 t, 来寻找以下形式的解的可能性.

$$u(x,t)\equiv u(\mu x,\mu^2 t). \tag{6.44}$$

现在, 对于 t 的任意特定值, 我们可以令 $\mu=1/\sqrt{t}$, 则这个恒等式意味着对于某个函数 F 成立 $u=F(x/\sqrt{t})$. 事实上, 我们记 $\eta=x/\sqrt{t}$, 马上得到

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}=0,\quad \text{即 } F=A\,\mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)+B,$$

其中 $\mathrm{erf}\frac{y}{2}$ 是 **误差函数** $(2/\sqrt{\pi})\int_0^y \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$, 而 A 和 B 均为常数.

这个观察结果使我们能够解决带有数据在变换

$$x=\frac{1}{\mu}x',\quad t=\frac{1}{\mu^2}t',\quad u=u'$$

下不变的任意初/边值条件的热传导方程. 例如, 在 $u(0,t)=1$ 和 $u(x,0)=0$ 的条件下

$$u(x,t)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s=\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \tag{6.45}$$

其中 $\mathrm{erfc}\,y$ 是 **余误差函数**.

这个解的过程初看有点莫名其妙, 所以我们现在更为系统地来说明什么是通常所说的 **相似解**.

基本想法其实非常简单, 我们只问以下问题.

"因变量和 (或) 自变量的哪些变化, 使得方程变为或保持为关于一个或多个自变量是 自 治 的, 也就是说, 使得哪些变量仅能通过微分出现在方程中?"

这个问题的有趣之处在于, 如果方程关于 x 是自治的, 那么它就有不依赖于 x 的解. 当然, 那些都是特解, 不过要说明的是, 首先它们比通解更易被找到, 其次如果足够幸运的话, 我们可以用它们来满足初始和边界条件. 事实上, 我们在 (4.15) 的处理过程中已经见过了这个方法, 我们把独立变量的数目由 2 个减至 1 个, 并通过简单地求解一个常微分方程而得到了电报方程的 Riemann 函数. 另一方面, 即使我们得到的解不能满足所有必备的条件, 它仍然可能在某些限制下给出一个近似结果, 比如对很短或者很长的时间. 当然, 在 (6.34) 中我们已经看到了, 一个一般的初值问题的解当时间趋于无穷时, 趋向于一个有着特殊形式的函数.

虽然对于前述问题并没有一个系统的答案, 但仍然可以进行一项非常有用的观察. 其结果来自对单变量函数 $f(x)$ 的变量作任意变化的研究. 如果 $f(x)$ 作为一个微分方程的解的一部分而出现, 那么它就需要被微分并且服从一些其他的处理, 则任何通常意义上的变量变换 $x' = g(x)$ 产生了伴随 "函数的函数" 的所有复杂性. 然而, 如果我们考虑一族特别的变换

$$x' = g(x, \lambda), \tag{6.46}$$

上述问题中的绝大部分将迎刃而解. 其中 λ 是一个选定的连续变化的参数[115], 使得 $g(x, 0) = x$, 倘若 g 满足一个显然很严格的条件的话, 即对于某些 F_1 和 F_2 有

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x; \lambda) = F_1(\lambda) F_2(g(x; \lambda)).$$

这个例子中我们可以重新参数化以使得

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = F(g), \tag{6.47}$$

并且, 使用 $g(x, 0) = x$ 的事实, 我们可以看到 f 将要发生的变化. 通过对相应级数的一点处理, 我们得到

$$\begin{aligned} f(x') &= f(g(x; \lambda)) \\ &= f\left(x + \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}\bigg|_{\lambda=0} + \cdots\right) \\ &= f(x) + \lambda \frac{\partial g}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} f'(x) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}\bigg|_{\lambda=0} f'(x) + \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)^2\bigg|_{\lambda=0} f''(x)\right) + \cdots. \end{aligned} \tag{6.48}$$

115 我们将在下面看到, (6.44) 中的参数 μ 等于 e^{λ}, 而这保证了 $g(x, 0) = x$.

现在, 如果我们通过下面的运算来定义 *无穷小生成元* $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U}f(x) = \left(\left.\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) f(x) = F(x)f'(x), \tag{6.49}$$

于是 (6.48) 便简化成为

$$f(x') = f(x) + \lambda \mathcal{U} f(x) + \frac{\lambda^2}{2!}\mathcal{U}^2 f(x) + \cdots. \tag{6.50}$$

这是由于

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^2 f(x) &= \left(\left.\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^2 f(x) \\ &= \left.\left(\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right)^2\right|_{\lambda=0} f''(x) + \left.\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}\right) f'(x),\end{aligned}$$

而且我们知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left.\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = F'(x),$$

那么, 由 (6.47)

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} = F'(g)\left.\frac{\partial g}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = F'(x)F(x).$$

这样, (6.47) 便成为将 (6.48) 化为 (6.50) 的最关键的因素; 这个过程能被应用于关于 λ 的任意阶. 同时级数的和可以在形式上求和得

$$f(x') = \exp(\lambda\mathcal{U})f(x).$$

为了把这个思想应用到微分方程上, 我们需要处理至少两个变量, 无论它们是因变量还是自变量, 在这种情况下 (6.46) 和 (6.49) 推广为

$$x' = g(x, y; \lambda), \quad y' = h(x, y; \lambda), \tag{6.51}$$

其中

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = G(g, h), \quad \frac{\partial h}{\partial \lambda} = H(g, h), \tag{6.52}$$

并且

$$g(x, y; 0) = x, \quad h(x, y; 0) = y, \tag{6.53}$$

$$\mathcal{U} = G\Big|_{\lambda=0}\frac{\partial}{\partial x} + H\Big|_{\lambda=0}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{6.54}$$

6.5.1 常微分方程

假设 x 和 y 分别是一个常微分方程中的自变量和因变量. 方程关于 x 是自治的结论相当于说它在变换 $x' = x + \lambda$, $y' = y$ 下是不变的, 而这显然满足 (6.52). 更一般地, 我们也许会问: "给定的常微分方程能通过变量代换变成自治的吗?" 如果方程在变换 (6.46) 下保持不变, 那么答案将是肯定的, 因为我们只要简单地转化到一个新的自变量 X 和一个因变量 Y 就可以了, 其中 $\mathcal{U}Y = 0$ 且 $\mathcal{U}X = 1$. 这意味着, 当 X 关于一个任意常数作平移, 同时 Y 不作变化时, 关于 $Y(X)$ 的微分方程是不变的. 例如, 考虑线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + q(x)y = 0, \tag{6.55}$$

它不是自治的, 但在下面的变换下它是不变的: $g = x$, $h = \mathrm{e}^{\lambda}y$, $G = 0$, $H = h$ 以及 $\mathcal{U} = y\partial/\partial y$[116]. 这告诉我们, 如果我们做一个变换, 比如在 (6.55) 中令 $Y = x$ 以及 $X = \log y$ 的话, 则我们会得到一个关于 X 自治的方程. 事实上, 就是

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2}\Big/\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right)^3 - 1\Big/\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right)^2 = q(Y).$$

此时, 我们不会利用方程的自治性质来直接寻找一个与 X 无关的解; 当然我们注意到自治性保证了微分方程的阶数可以被降低, 比如把 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$ 当作是关于 Y 的函数. 同样地, 当我们知道 $y_0(x)$ 满足 (6.55) 后, 那么方程在 $g = x$ 和 $h = y + \lambda y_0(x)$ 的变换下将保持不变. 这就是说, 当得到一个解以后, 我们可以对其进行一个变换. 比如 $Y = x$ 和 $X = y/y_0(x)$, 这正是众所周知的降低线性常微分方程的法则.

6.5.2 偏微分方程

为了尽量使事情简单化, 我们在一开始只考虑自变量的变换. 于是, 假设在关于 $u(x,y)$ 的偏微分方程中 x 和 y 都是自变量, 然后我们对其应用 (6.51)~(6.53) 的变换, 它使方程保持不变. 现在, 为了把自变量的数目由 2 个减为 1 个, 我们所要做的就是解出一个满足 $\mathcal{U}Y = 0$ 的新的变量 Y, 然后将其他变量 (比如 X) 都变换为 Y 的. 于是我们就得到了一个在 X 发生单参数变化下保持不变的偏微分方程, 因此它有一个解满足 $u = F(Y)$. 例如, 在 (4.15) 前的计算中

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + R = 0,$$

变换 $g = \mu x$, $h = y/\mu$ 将不会使方程发生变化. 接着, 令 $\mu = \mathrm{e}^{\lambda}$ 有

$$G = g = \mathrm{e}^{\lambda}x, \quad H = -h = -\mathrm{e}^{-\lambda}y, \quad \mathcal{U} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},$$

---

116 出于方便, 我们记 $h = \mathrm{e}^{\lambda}y$ 而不是 $h = \lambda y$, 因为这保证了 $\lambda = 0$ 是恒等式, 从而不需要再引进参数来推导 (6.47).

因此 $Y = xy$. 和本章更有关系的是, 变换 $x' = G = g = \mathrm{e}^{\lambda}x$, $t' = H/2 = h = \mathrm{e}^{2\lambda}t$ 不会使方程 $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ 发生变化, 所以

$$\mathcal{U} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t};$$

这样, 就像我们在本节开始所观察到的那样, "自治" 的自变量, 即前述的 Y 的一个可能的选择就是 x^2/t.

当然, 对于足够聪明的人来说, 他们可以通过观察的方式来得到相似解. (6.51)~(6.53) 的关键点在于, 如果已经获得了 g 和 h, 那么它就为寻找近似解提供了一个相对系统的步骤. 就像在下面将要阐述的, 这个方法意义重大, 已经有很多可用的计算机软件包可以自动地实现这个过程以及它的一些推广. 我们在这里不会详细地讲述相关的推广, 但需要提及的是, 我们首先可以考虑 "扩展" 的变换, 即函数 g 和 h 不仅依赖于自变量, 而且还依赖于因变量及其导数, 其次, 可以尝试形如 $g = g(x, \lambda_1, \lambda_2)$ 的多参数变换以及 (6.47), 比如 $\partial g/\partial \lambda_1 = F^{(1)}(g)$, $\partial g/\partial \lambda_2 = F^{(2)}(g)$ 代替.

关于术语, 由 (6.47) 和 (6.51)~(6.53) 所提出的要求以及逆的存在性, 是使 (6.47) 中的 g, 或者 (6.51)~(6.53) 中的 (g, h) 被称为变换的 Lie 群 或者 连续群 的条件. 证明 (6.47) 和极为重要的群封闭条件相等价是易证的, 即对于所有的 λ 和 μ, 以及某个 $\nu = \nu(\lambda, \mu)$, 有 $g(g(x;\lambda);\mu) = g(x;\nu)$, 将在习题 6.20 中给出.

与本节开始时所描述的相比, 在有了这些想法后我们已经能够给出一个更系统化的方法来寻找热传导方程的相似解. 假设我们考虑一个一般的关于自变量变换

$$x' = f(x, t; \lambda), \quad t' = g(x, t; \lambda) \tag{6.56}$$

的连续群, 其中群的参数使得 $\lambda = 0$ 为恒等元, 由此 $x \equiv f(x, t; 0)$ 且 $t \equiv g(x, t; 0)$, 不失一般性它可像 (6.51)~(6.53) 那样得到闭合运算为加. 这样, 对于较小的 λ, 有

$$x' = x + \lambda U + \cdots, \quad t' = t + \lambda V + \cdots, \tag{6.57}$$

其中 U 和 V 是无穷小生成元 $\mathcal{U} = U\partial/\partial x + V\partial/\partial t$ 中的分量, 它们只是关于 x 和 t 的函数. 这意味着, 对于较小的 λ, 可由变量代换的链式法则得到 $O(\lambda)$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} = \left(1 + \lambda\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t'} + \lambda\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \left(1 - \lambda\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x},\\
&\frac{\partial}{\partial x} = \lambda\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \left(1 + \lambda\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} + \left(1 - \lambda\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

我们现在可以通过选择 U 和 V 来强制实现关键的不变性质, 并由热传导方程在变换下是左不变的条件得到了群. 通过使用上述的链式法则, 关于自变量 x' 和 u' 的

热传导方程在 $\lambda \to 0$ 时, 对于最低阶[117] 有

$$\left(1+\lambda\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t'}+\lambda\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x'}=\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\lambda\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x'}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t'}\right)$$
$$+2\lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x'\partial t'}\right)+O(\lambda^2). \tag{6.59}$$

因此, 要求

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{6.60}$$

看上去上式似乎并不比我们以前所面对的热传导方程更好, 但 (6.60) 其实是一个 2 个未知变量, 3 个方程的超定系统, 于是很快就能发现唯一的解为

$$U=\frac{cx}{2}+d,\quad V=ct+e, \tag{6.61}$$

其中 c, d 及 e 都为常数. 因此, 当 $d=e=0$ 的时候, 我们可以用 $\partial x'/\partial\lambda=cx/2$ 和 $\partial t'/\partial\lambda=ct$ 来求得

$$x'=\mathrm{e}^{\lambda c/2}x,\quad t'=\mathrm{e}^{\lambda ct}t. \tag{6.62}$$

它给出了 (6.44) 不同符号的表达. 作为另一选择, 对 $c=0$, $d=v$ 及 $e=1$, 我们得到

$$x'=x+\lambda v,\quad t'=t+\lambda. \tag{6.63}$$

由此可以导出 $u=F(x-vt)$ 形式的 "行波解"; 对于自治的偏微分方程, 这样的 Galileo 变换通常都是可行的.

关于上述的方法, 我们要注意以下的几点:

1. 通过解下列关于变量 ξ 的方程

$$\mathcal{U}\xi=\left(U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial t}\right)\xi=0, \tag{6.64}$$

类似于 (6.62) 和 (6.63) 中的自变量 $x/\sqrt{t}$ 及 $x-vt$ 可以颇为系统地被列举出来.

2. u 在所有的情形下都必须满足一个合适的常微分方程. 对于 (6.63), 我们有

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2}+v\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}=0.$$

因此, $F=A+B\mathrm{e}^{-v(x-vt)}$, 其中 A 和 B 为常数.

3. 类似于 (6.60) 这样的方程组看上去会很令人害怕, 即使它们通常都是线性并且超定的. 现代符号处理所给予的一个便利就是, 已经有数个软件包可以被用来自动导出并求解类似的方程组, 我们将在第 9 章再回到这个问题.

117 事实上, 利用群性质 (6.51)~(6.53) 可以知道这对于 λ 的所有阶都是成立的.

4. 可以较为容易地将 (6.57) 推广到用于解决因变量 u 的变换. 这在习题 6.21 中将加以解决, 并容易看到将导出以下形式的相似解

$$u = t^{\alpha} F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \tag{6.65}$$

其中 α 为任意常数. 记得我们以前所获得的基本 "热源" 解 (6.30), 就具有上述形式且 $\alpha = -1/2$.

一个重要的例子是 m 维空间中的热传导方程的基本解 $(m > 1)$, 它可以作为一个这样的相似解之一来加以确定. 球对称要求

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

其中 $r = |\boldsymbol{x}|$, 而且一个很明显的相似解就是 $u = t^{\alpha}F(r/\sqrt{t}) = t^{\alpha}F(\eta)$. α 的值必须使得总热量是守恒的, 也就是

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = t^{\alpha}\int_{\mathbb{R}^m} F\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 常数 \cdot t^{\alpha + m/2}$$

为常数, 可以看到 $\alpha = -m/2$. 现在关于 F 的方程便是

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(\frac{m-1}{\eta} + \frac{\eta}{2}\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} + \frac{m}{2}F = 0. \tag{6.66}$$

不可思议的是, 有一个显解 $F = 常数 \cdot \mathrm{e}^{-\eta^2/4}$ 满足正则条件 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\eta(0) = 0$. 最后当我们要求 $\int_{\mathbb{R}^m} u\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$ 时, 我们求得

$$u(\boldsymbol{x}, t) = (4\pi t)^{-m/2}\mathrm{e}^{-r^2/4t},$$

而这与 (6.35) 相一致.

另一个推广是在热传导方程中引入一个恒定的源项, 此时 (6.65) 形式的一个近似解也可能是合适的. 例如, 对于半直线问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1 \quad 在\ x > 0, \tag{6.67}$$

满足在 $x = 0$ 处 $u = 0$, $t = 0$ 时 $u = 0$, 它描述了半空间上具有零初 - 边值条件的均匀加热过程. 现在对我们来说, 一个 (6.65) 形式的相似解对我们有足够的自由度允许群不变性是重要的: (6.67) 在群 $x' = \mathrm{e}^{\lambda}x$, $t' = \mathrm{e}^{2\lambda}t$, $u' = \mathrm{e}^{2\lambda}u$ 下是不变的, 由此我们可以记 $u = tF(\eta)$ 及 $\eta = x/\sqrt{t}$. 于是得到

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} - F + 1 = 0 \quad 对\ \eta > 0,$$

其中 $F(0) = 0$, 并且由 $t \to 0$ 时 $tF(x/t^{1/2}) \to 0$, 当 $\eta \to \infty$ 时, $F(\eta)/\eta^2 \to 0$. 可以证明, 这边给出了足够的信息以将解表示成抛物柱面函数的形式 (其定义将在习题 5.40 中给出).

*6.5.3 一般注记

尽管我们已经为建立相似解的系统理论尽了极大的努力, 但仍然留下了一些令人困惑的问题. 群不变性方法的最大的缺点是, 在最后, 我们不得不找出那个使得微分方程不变的群; 这个方法虽然识别比直接求相似变量要容易些, 但这个过程并非是自动完成的.

我们希望读者注意这个理论的另外两个方法. 首先是不变性方法和分离变量法之间的关系. 后者在先前的章节中几乎不加注释地被任意使用, 在它出现的每个例子中读者不得不默认这个变量分离是可行的. 群不变性的出现使我们可以清楚地明白这件事情, 如果我们回到导出 (6.65) 的过程, 尤其是习题 6.21 的计算, 我们可以很快发现热传导方程在由最小生成元

$$\mathcal{U} = U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial t} + W\frac{\partial}{\partial u},$$

所定义的群下是保持不变的, 其中 U, V 及 W 的一个解为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(A_1 + 2A_2 t)x + A_3 + A_4 t, \\ V &= A_5 + A_1 t + A_2 t^2, \\ W &= \left(A_6 - \frac{1}{2}A_2 t - \frac{1}{2}A_4 x - \frac{1}{4}A_2 x^2\right) u, \end{aligned} \tag{6.68}$$

其中 A_i 为常数. (通解是在 W 的基础上再加上一个热传导方程的任意解.) 现在可以容易看到, 一个可能是

$$\mathcal{U} = A_3\frac{\partial}{\partial x} + A_6 u\frac{\partial}{\partial u},$$

所以, 对于 $\mathcal{U}Y = 0$, $Y_1 = t$ 和 $Y_2 = u\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 都是其不变量, 其中 $\alpha = A_6/A_3$. 因此, 存在一个解满足 $Y_2 = F(Y_1)$, 即

$$u = \mathrm{e}^{\alpha x}F(t),$$

而这正是分离变量所得到的结果!

虽然我们在本书中并不提倡这种分离变量法的处理, 但有趣的是, 倘若将其应用到 Laplace 方程上, 甚至当我们作出了仅仅针对自变量 x 和 y 限制的变换, 我们会发现

$$x' = x + \lambda U + \cdots, \quad y' = y + \lambda V + \cdots,$$

其中无限小生成元为 $\mathcal{U} = U\partial/\partial x + V\partial/\partial y$, 且 U 和 V 满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

(参见习题 6.24). 因此, U 和 V 为调和共轭的, 而且我们得到了 5.9.1 节的保形不变性.

这导出了我们最终的观察. 很显然, 偏微分方程及其初 – 边值条件中的项越多, 群不变性越难成立. 因此, 相似解用来表示解在某些我们所感兴趣的初始条件、边界条件取简单形式的自变量的点的邻域中的渐近性态时, 通常有最佳的实际价值. 例如, 当我们为一个抛物型方程的解加上一个不同于其初值条件的边值条件, 我们期望解在边界附近的开始性态能由相似解 (6.45) 所描述, 其中 x 为垂直于边界的法向量. 如果这个结果正确, 其对于确保问题的离散形式以正确的方式开始有着极大的价值, 因为在 $t=0$, $x=0$ 附近并不存在 Taylor 展开. 同样地, 如果在直线 $-\infty<x<\infty$ 上给定了任何合适的局部热量分布, 我们期望在 $t\to\infty$ 的时候温度会趋于相似解 (6.34). 这是因为, 在 (x,t) 平面上远离原点的地方, 初值可以用一个 δ 函数的倍数来加以逼近[118].

这样的期望通常是正确的, 但它们的证明已经超出了本书的范畴. 然而, 我们还是要提及 "局部相似性" 迷人的一面, 而用一个椭圆型方程的 Dirichlet 问题来加以描述是最恰当不过的了. 假设

$$\nabla^2 u=0$$

在二维极坐标中成立, 且有

$$u=\begin{cases}0, & \theta=0,0<r<1,\\ r^2, & \theta=\alpha,0<r<1,\\ f(\theta), & r=1,0<\theta<\alpha.\end{cases}$$

假定现在我们还不够聪明以至于不能用分离变量法来精确地解出问题, 但是我们仍会寻找 u 在 "奇点" $r=0$ 附近的性质. 实际上, 我们利用分离变量法得到了一个局部的相似解 $u\propto r^n\sin n\theta$, 为了满足边界条件我们需要 $n=2$ 且

$$u=\frac{r^2\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}. \tag{6.69}$$

但是, 这个近似在 $\alpha=\pi/2$ 的时候显然是不成立的. 如果我们考虑以下的精确解, 则所有的事情都清楚了,

$$u=\frac{r^2\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n r^{n\pi/\alpha}\sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right), \tag{6.70}$$

其中 b_n 是由下式决定的 Fourier 正弦级数的系数

$$f(\theta)-\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi\theta}{\alpha}\right),\quad 对\ 0<\theta<\alpha.$$

118 如果 $f(x)$ 光滑并且它的积分为 1, 很容易验证 $\lim_{\varepsilon\to 0}(1/\varepsilon)f(x/\varepsilon)=\delta(x)$.

只要 $\alpha \neq \pi/2$, 级数表达式 (6.70) 对于任意 $0 < \alpha < \pi$ 都是成立的, 甚至它可以被修改以适用于 $\alpha = \pi/2$ 的情况 (见习题 6.25). 因此, 当 $r \to 0$ 且 $\alpha < \pi/2$ 的时候, (6.69) 显然是仅有的支配项; 而对于较大的 α 值, 这项便会被 Fourier 级数的第一项 $b_1 r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha)$ 所 "淹没", 尽管其依然是一个相似解, 但在 $r = 0$ 附近它和微分方程以及边界条件的关系并不能一目了然. 实际上, 它的确定需要我们首先求解一个特征值问题来寻找要求 r 的幂次, 然后利用整体信息来找到 b_1. 这便是所谓的*第二类相似性* 的一个例子. 它具有非常重要的实际价值, 因为通常来说, 我们希望知道一个偏微分方程的解在奇点附近的性质是否是由局部因素而非整体因素所控制.

6.6 非线性方程

6.6.1 模型

6.6.1.1 *半线性方程*

反应 - 扩散方程多半为半线性方程, 并具有形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f(u, x, t). \tag{6.71}$$

这类模型出现在种群动力学中, 它的非齐次项依赖于局部种群密度. 在物理化学或化学工程中, f 随温度或反应器中的化学浓度变化. 函数 f 的正负在不同模型中有着不同的涵义, 它的正负分别代表诞生和死亡或代表放热反应和吸热反应.

如果 $f = f(u)$, 则问题是齐次的且为自治的. 例如, 如果 u 为 N 阶化学反应体的浓度, 则 $f(u) = \lambda u^N$. 另一方面, 如果 u 为放热反应温度, f 通常具有形式 $\lambda e^{u/(1+\varepsilon u)}$, 这就是在 5.11.1 节中所提到 Arrhenius 函数[119], 因为 ε 在实际中通常都比较小, 所以 f 可以像 (5.159) 那样用 λe^u. 其他的自治模型还出现在下面情形, 扩散要将因变量均匀地散布到空间中, 而非线性项要将它保持在某一数值上. 一个著名的方程是群体总数 u 的 Fisher *方程*, $f = u - u^2$, 其中的第一项代表线性出生率, 第二项代表有食物供给的限制, 当 $u \to 1$, 供给逐渐减少. 另一个为 Cahn-Allen *方程*, 其中 $f = u - u^3$, u 为一种物质的一小部分, 这种物质经历某一特定的相变, 它从一种稳定状态 $u = -1$ 变到另一种稳定状态 $u = 1$.

通常半线性方程包含小参数乘以 f 或者在 (6.71) 中包含 Laplace 算子, 在习题 6.26 中简要地介绍了如何利用这些参数.

---

119 关于温度 T 的 Arrhenius 函数是 $e^{-E/RT}$, 通过变换 $T = T_0(1 + \varepsilon u)$, $\varepsilon = RT_0/E$ 和 $\lambda = e^{-E/RT_0}$, 这里的 T_0 为所选择的参考温度, 则它可以写为 $\lambda e^{u/(1+\varepsilon u)}$.

6.6.1.2 拟线性方程

流体力学中的许多问题都可以归结为拟线性方程而不是半线性方程. 一个简单的例子是通过多孔介质的可压流体. 令 u 代表流体的密度, 由 Darcy 定律 (5.26), 速度 $\boldsymbol{v}$ 与压力 p 的关系可以写为 $\boldsymbol{v} = -(k/\mu)\nabla p$, 由质量守恒, $\partial u/\partial t + \nabla\cdot(u\boldsymbol{v}) = 0$, 状态方程为 $p = p(u)$, 将它们结合起来, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(K(u)\nabla u),$$

其中 $K(u)$ 与 $u\mathrm{d}p/\mathrm{d}u$ 成正比. 如果进一步研究等温理想气体, 我们得到 $p \propto u$, 然而对于绝热的状态 (没有热传入或传出), 则 $p \propto u^\gamma$, $\gamma > 1$, 在这两种情形, 这种模型可以写为 *多孔介质方程*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(u^n\nabla u), \tag{6.72}$$

这里的 n 为正常数.

这种方程也发生于热辐射的研究, 这里的能量通过电磁以及以传导和对流的方式传输. 因此, 在任何点, 不仅有绝对温度 $T(\boldsymbol{x},t)$, 而且还有电磁能密度 Q (依赖于在 $\boldsymbol{x}$ 点的方向 $\boldsymbol{y}$), 所以记

$$Q = Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t), \quad |\boldsymbol{y}| = 1; \tag{6.73}$$

电磁能在各向同性的介质中沿着所有方向 $\boldsymbol{y}$ 以光速 c 传播. 在没有热传导的情形物质以 βT^4 每单位体积的速率辐射电磁能是模型假设的关键[120], 这里 β 为常数, 吸收电磁能量的速率与 Q 成比例. 由于 c 很大, 这两个能量的平衡得到

$$c\boldsymbol{y}\cdot\nabla Q = \beta T^4 - \alpha Q, \tag{6.74}$$

这里是对 $\boldsymbol{x}$ 方向的梯度.

$$\rho\bar{c}\frac{\partial T}{\partial t} = \int_{|\boldsymbol{y}|=1}(\alpha Q - \beta T^4)\mathrm{d}S = \alpha\int_{|\boldsymbol{y}|=1}Q\mathrm{d}S - 4\pi\beta T^4, \tag{6.75}$$

这里的 ρ 为密度, $\bar{c}$ 为比热, α 为常数. 式子 (6.75) 中出现的积分的含义和大多数辐射传热问题一样, 模型为积分 – 微分方程而不是偏微分方程. 然而, 在所谓的 "光学厚" 极限, 即经适当的无量纲化后 α 和 β 比较大并且两者相近时, (6.75) 可以用一个微分方程来近似. 然而 Q 是弱依赖于 $\boldsymbol{y}$, 并且利用 (6.74) 进行迭代, 我们得到

$$Q = \frac{\beta}{\alpha}\left(T^4 - \frac{c}{\alpha}(\boldsymbol{y}\cdot\nabla)T^4 + \frac{c^2}{\alpha^2}(\boldsymbol{y}\cdot\nabla)^2T^4 + \cdots\right). \tag{6.76}$$

---

120 实际上, 四次幂可以认为是黑体发射的能量密度是其辐射频率 ω 的函数, 通过量子统计, 它可以表示为 $8\pi h(\omega/c)^3(\mathrm{e}^{h\omega/kT} - 1)$, 这里的 h 为 Planck 常数, k 为 Boltzmann 常数, T 为绝对温度, 积分区域为 $0 < \omega < \infty$, 我们可以发现总能量与 T^4 成比例.

再利用

$$\int_{|\boldsymbol{y}|=1} T^4 \mathrm{d}S = 4\pi T^4, \quad \int_{|\boldsymbol{y}|=1} (\boldsymbol{y}\cdot\nabla) T^4 \mathrm{d}S = \nabla(T^4)\cdot\int_{|\boldsymbol{y}|=1} \boldsymbol{y}\mathrm{d}S = 0$$

并且

$$\int_{|\boldsymbol{y}|=1} (\boldsymbol{y}\cdot\nabla)^2 T^4 \mathrm{d}S = \frac{4\pi}{3}\nabla^2(T^4),$$

所以最终 (6.76) 的最后一项可对 (6.75) 有贡献, 经过尺度变换[121] 我们可以得到 $n=3$ 时的 (6.72) 式.

多孔介质方程同样也可用于建立黏性液滴在重力作用下在水平面蔓延开的厚度 h. 正如修改 1.1 节中的油漆模型可见, 水平速度与 $y(2h-y)\nabla p$ 成比例, 但是这里的 p 差不多是静水压力, 近似于 $\rho g(h-y)$. 所以 ∇p, ∇h 的水平分量到主要的阶是成比例的. 最后, 在适当的时间尺度下, 质量守恒为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla(h^3\nabla h).$$

同样的方程还可以用于建立高裂缝火山水平方向蔓延的模型, 它可以认为是岩浆从下面穿过浅多孔介质的流动, 火山上表面以正比于岩浆到达的速度沿垂直于表面的方向运动, 再取 h 为火山表面的水平高度, 岩浆的压力几乎为静水压力. 所以岩浆的 Darcy 速度与 $-\nabla h$ 成正比, 总的水平流速与 $-h\nabla h$ 成正比, 应用质量守恒得到

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla(h\nabla h),$$

我们希望上面方程的解中的 h 有着比如富士山这样的地势.

另一个关于流体动力学中所导出的拟线性方程为不同于多孔介质方程的例子是 Burgers 方程 (2.50), 它是在研究一维黏性气体动力学中出现的. 由于它非常重要, 在习题 (6.27) 中我们给出它详细的推导.

我们以另一种著名的拟线性方程来结束关于模型的讨论, 这个方程用于描述二维稳定的不可压缩流体在有界墙体表面层流动. 这就是关于流函数 $\psi(x,y)$ 的 Prandtl 方程. 当流经平板时, 满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad 对\ 0<y<\infty,\ x>0, \tag{6.77}$$

且有

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad 在\ y=0 \tag{6.78}$$

121 遗憾的是热辐射在许多工序, 比如玻璃制造中, 经常处于光学厚和光学薄的中间值, 但是多孔介质方程依然被广泛应用.

及

$$\psi = y + O(1) \quad 在无穷远处. \tag{6.79}$$

在此模型中, 流体速度为 $(\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$, 为便于问题成为封闭的, 在 "主要边缘" $x = y = 0$ 处对性态作一些规定是非常必要的. 在此给出 (6.77)~(6.79) 的导出过于复杂, 所有的基本思想将在第 9 章给出. 可以说明, (6.77) 的左端项是对流体的惯性建模, 右端项是对流体黏性力的建模. (6.78) 表示流体黏附在板上面. (6.79) 则表示在边界层外的部分均匀流动. 而 (6.77) 严格讲不是抛物型方程, 它可能通过 4.8.2 节中介绍的部分速度图变换变成抛物型方程, 当认为 $u = \partial\psi/\partial y$ 为 x 与 ψ 的函数时, 由链式法则得到

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = u\frac{\partial}{\partial \psi}\left(u\frac{\partial u}{\partial \psi}\right),$$

则 (6.77) 变为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left(u\frac{\partial u}{\partial \psi}\right),$$

这恰好是 (6.72) 的一种特殊型式, 然而在许多应用中, 利用 (6.77) 式, 则更为简单.

6.6.2 理论注记

我们已经阐述了几乎所有的非线性偏微分方程, 在这些方程中有双曲型、椭圆型和抛物型, 它们都有着各自的特点. 对于抛物型方程, 通常有以下几个问题提出:

1. 有无稳定的解?

2. 有无关于空间的均匀解?

3. 有无类似于 6.5 节的对称性可用来求对称解? (问题 1, 2 是这个问题的特殊情形.)

下面将提出其他更一般的问题.

4. 解是否允许变号? 在上面的例子中, 除了 Burgers 和 Cahn-Allen 方程, 物理解释要求因变量为非负的.

5. 极值原理是否可以应用? (如果可以应用的话, 它可用来回答前面的问题.)

6. 有没有退化即方程是否为 "恰当抛物型" 的? 例如多孔介质方程, 可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^n\nabla^2 u + nu^{n-1}|\nabla u|^2,$$

它不是一致抛物的, 因为当 $u \to 0$ 时, 椭圆算子 $\nabla^2 u$ 的系数是趋于零的. 事实上将右端项视作 $u^{n-1}(u\nabla^2 u + n|\nabla u|^2)$, 那么当 u 变小时, 右端项是由梯度控制而不是 Δu 来控制, 因此当 $u \to 0$, 此方程越来越像一阶方程.

对于退化的问题, 我们将在本节后部和第 7 章中看到. 由 *自由边界* 来分离 u 的 *支集* (即 $u > 0$ 的区域) 与 u 为零的区域. 当然, 如果确有这样的自由边界, 比如

多孔介质方程, 我们就不能指望方程 (6.72) 在它的附近满足, 因为 u 的导数几乎肯定不存在. 因此, 像第 1 章一样, 我们需要考虑在适当广义的情形下, 通过积分定义其弱解.

下面两节将针对多孔介质、反应扩散及 Burgers 类型来回答我们上面所提出来的问题.

6.6.3 相似解与行波

首先考虑多孔介质方程 (6.72). 从 5.11.1 节中的 p-Laplace 算子问题所知, 它也没有平凡的空间的均匀解. 然而, 在一维空间, 我们能找到行波解, 它可以认为是一个自由边界, 将 $u > 0$ 的区域 (如 $\xi = x - vt < 0$) 与 $u \equiv 0$ 的区域分离. 非退化的抛物型方程是不可能出现这种现象的, 例如, 从 (6.32) 中得知热传导方程的 Cachy 问题, 当初值在很小区域为正其余为零 (如图 6.3), 那么在 $t > 0$ 时, 它的解为严格正的.

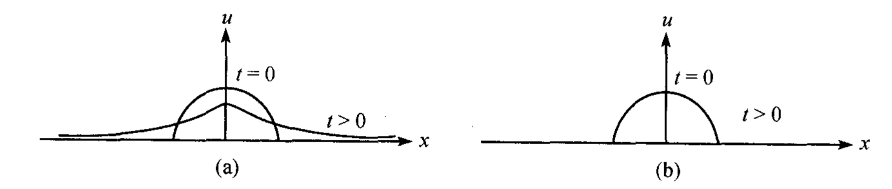


图 6.3 初识热源的扩散: (a) 非退化; (b) 退化

令 $u = F(\xi)$, 则 $\partial u/\partial t = \partial/\partial x(u^n \partial u/\partial x)$ 变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(F^n \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}\right) + V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} = 0,$$

所以一种可能是

$$u = \begin{cases} (nV(Vt - x))^{1/n}, & x < Vt, \\ 0, & x > Vt. \end{cases} \tag{6.80}$$

如果 $n \geqslant 1$, 则 u 在 $x = Vt$ 处是不可导的. 所以多孔介质方程在那儿肯定是不满足的, 但是我们可以看到

$$V = \lim_{x \uparrow Vt}\left(-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial x}u^n\right), \tag{6.81}$$

这可以认为是 2.5 节中提出的 Rankine-Hugoniot 关系. 事实上, 这个方程表示在 6.6.1.2 节的流体动力学解释中, 在 $x = Vt$ 点质量守恒. 在任何情形下, 建立多孔介质方程的弱解理论是一条畅开的路, 这是通过乘以适当的试验函数, 关于空间时间变量积分, 求一个可能是具有 (6.80) 那样性质较差的函数 u, 但它满足积分恒等式. 这恰是我们在第 1 章中采用的过程, 而且毫不惊讶地发现任何弱解都满足

(6.81) 式. 这个分析太复杂, 我们不能在此进一步叙述, 但是有趣的是无需类似于熵准则来保证其唯一性.

遗憾的是当我们寻求半线性方程的行波解时, 不可预料的事情有时会出现. 对于 (6.71) 的自治情形 $\partial u/\partial t = \nabla^2 u + f(u)$, 我们遇到常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2} + V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} + f(F) = 0,$$

对于其中的 F 与 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\xi$ 项, 我们可以用相平面来分析. 对于 Fisher 方程, 其中 $f = F(1-F)$, 在习题 6.28 中揭示它是存在传播波的, 当在波前 $(\xi \to +\infty)$, F 趋向于零, 当在波后 $(\xi \to -\infty)$, F 趋于 1. 但是 V 必须超过[122]2. 非线性的作用限制了连续谱 $(V \geqslant 0)$ 时的慢波, 当 $\xi \to +\infty$, 温度为零的热传导方程是存在的.

当我们处理一个三次非线性项的半线性方程不同的情况时, $f = u(u-a)(1-u)$, $0 < a < 1/2$, 则 $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u > 0$. 习题 6.29 中相平面说明存在唯一的正波速 $u = F(\xi)$, 将 $F(\infty) = 0$ 与 $F(-\infty) = 1$ 两个稳定平衡点连接起来. 然而当 $a = 1/2$ 时, 它事实上是 Cahn-Allen 方程, 有 $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 0$. 则唯一的波速也是零, 连结 $u = 0$ 与 $u = 1$ 的行波就是稳定态.

我们仿照 (2.50) 预测如下 Burgers 方程行波解的结构

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6.82}$$

在习题 2.18, 我们证明了如果 $V > 0$ 且

$$-V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} + F\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2}, \tag{6.83}$$

当 $\xi \to \pm\infty$ 时, F 分别取定值 $F_\pm$, 则

$$V = \frac{1}{2}(F_+ + F_-).$$

因此, 波速能够取得任何值, 但是我们记得还要加以 $F_- > F_+$ 的限制. 注意 (6.83) 中的二次非线性项的重要性. 如果模型为带有三次非线性项的 Burgers 方程, 例如

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

我们发现由以下方程叙述

$$-V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} + F\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2}$$

---

122 可以证明, 在 $t \to +\infty$ 时, 可观测到波的最小速度为 2, 这是因为此时它具有最佳稳定性.

的行波解不必受 $F_- > F_+$ 限制. 这可用不仅允许压缩波而且也允许疏散的激波会引起 2.52 节的复杂性来说明.

这些行波的存在性也可以 (或不恰当地) 看作相关的偏微分方程在 x, t 的任意平移不变性的结果, 项数越少的方程可能有越多的不变量. 现在我们重新回到多孔介质方程 (6.72). 为简单起见, 我们只考虑一维问题 (虽然大多数情形下也适用于径向对称的情形). 为了易于表达, 我们限于讨论 $n=1$ 的情形. 既可采用 6.5 节的群理论分析, 也可直接观察得到

$$u = t^{\alpha}F(\eta), \quad \eta = \frac{x}{t^{\beta}},$$

只要

$$t^{\alpha-1}\left(\alpha F - \beta\eta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right) = t^{2\alpha-2\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(F\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right)$$

满足多孔介质方程, 因此 $\beta = (\alpha+1)/2$, 并有

$$F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + \beta\eta\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} - (2\beta-1)F = 0. \tag{6.84}$$

使用群理论是有好处的, 因为使用者能观察到 (6.84) 本身有一个不变量, 从而有

$$F = \eta^2 G, \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} = \eta H.$$

进而导出一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}G} = \frac{(G+\beta)H + (1-2\beta)G + H^2}{G(2G-H)}.$$

对于此方程的相平面分析, 我们可以得到多孔介质方程的广泛的一大类解. 例如, 取临界点 $G=-1/6$, $H=-1/3$, 对应于 $F=-\eta^2/6$, 这使我们能够造出解

$$u = \begin{cases} x^2/(6(t_0-t)), & x \leqslant 0, t < t_0, \\ 0, & x \geqslant 0, t < t_0 \end{cases}$$

在 $0 < t < t_0$, 当 $t \uparrow t_0$ 为奇异的. 又当 $\beta = \dfrac{1}{3}$, $F = \dfrac{1}{6}(a^2 - \eta^2)$, 得到

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{6}t^{-1/3}(a^2 - x^2/t^{2/3}), & |x| < at^{1/3}, \\ 0, & |x| > at^{1/3}, \end{cases} \tag{6.85}$$

这个解则更为有趣, 因为这个解代表初始位置在 $x=0$ 的水滴的扩散, 如图 6.3(b) 所示. 事实上, 可以证明当 $t \to 0$, 此 Barenblatt-Pattle 解趋于 $\delta(x)$ 的倍数. 在接近点 $x = \pm at^{1/3}$ 时, 它也有 (6.80) 中的形式.

还有其他的可能性, 包括 $\beta=1$ 时, 则恢复为 (6.80) 式, 但 (6.85) 更符合实际, 当写成径向对称的情形时, 用好的精度它能够预测出类似富士山的形状.

对于简化后的抛物型方程, 更加戏剧性的、有用的结果随着看似可怕的 Prandtl 模型 (6.77) 而出现. 现在易见在变换

$$x=\mathrm{e}^{-2\lambda}x',\quad y=\mathrm{e}^{-\lambda}y',\quad \psi=\mathrm{e}^{-\lambda}\psi'$$

下的不变性, 因此相似解可能有以下形式

$$\psi=x^{1/2}F(\eta),\quad \eta=\frac{y}{x^{1/2}}.$$

这就导出了众所周知的 Blasius 方程

$$\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}\eta^3}+\frac{1}{2}F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2}=0,$$

当 $\eta=0$ 时, $F=\mathrm{d}F/\mathrm{d}\eta=0$, 且当 $\eta\to+\infty$ 时, $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\eta\to1$. 像对 (6.84) 一样, Blasius 方程有更进一步的群不变性, 如果将 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\eta$ 看作 F 的函数, 并将 log 作用在 F 上 (见习题 6.31), 则它可被写成一阶方程.

我们对于这一节中提到的这种方法做简短的小结. 相似解与行波解适用于 Cauchy 问题 (u 在 $t=0$ 时给出). 有时我们会遇到小参数区别空间与时间导数的大小问题, 例如, 考虑具有如下形式半线性问题 (6.71)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon\nabla^2u+f(u), \tag{6.86}$$

所以当 $\varepsilon=0$ 时, u 可以演变成的唯一稳定状态为 $f(u)$ 的稳定零点. 然而, 在一维空间, 当 $\varepsilon\to0$, (6.86) 的摄动分析是困难的奇摄动问题. 这是因为在某些情形下, 前分离区域将以 ε 的指数级慢慢移动, u 在这些区域里是靠近 f 的不同零点的.

在二维空间里, 情形甚至变得更加有趣. 假设, 我们考虑 Cahn-Allen 方程满足 $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=0$, 且简单起见, 只考虑方程是球对称的, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+u-u^3,$$

现假设有一个波前, 记为 $r=R(t)$, 将 $r>R$ (在其中 u 很接近 -1) 与 $r<R$ (在其中 u 很接近 1)) 分离. 在靠近 $r=R$ 时, 我们期望 u 是迅速变化的, 就像当 Burgers 方程写成 (2.50) 时的那种形式. 所以能用 u_0 来近似解, 这里 u_0 满足

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial^2u_0}{\partial r^2}+u_0-u_0^3, \tag{6.87}$$

且 u_0 是行波, 形如

$$u_0 = F(r - R).$$

现在 (6.87) 是有两个未知函数 f 与 R 的一个方程, 然而, 通常考虑在窄区域内的近似的抛物型方程, 我们将由 u_0 的校正记为 u_1 来恢复得到额外的信息, 我们发现

$$-\dot{R}F'(r - R) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + (1 - 3u_0^2)u_1 + \frac{1}{R}F'(r - R),$$

直观上[123], 如果

$$\dot{R} = -\frac{1}{R},$$

u_1 比 u_0 一致地小, 这个所谓的 *曲率流定律*, 即波前的速度与它的曲率成正比, 可以证明对非圆型结构也适用, 它给出了一个比过去曾经导出的波前运动如双曲问题中激波的运动简单得多的特性. 如果在一般情况下我们将波前写为 $y = f(x,t)$, 定律变为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Bigg/ \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right), \tag{6.88}$$

有趣的是, 这又是一个拟线性抛物型方程, 它有非常好的性质[124]. 值得注意的是当最初除了小的凸起, f 为直的, 如果解这个曲率流方程, 则直的线段马上运动, 即使它们的初始速度处处为零, 因为扩散是在瞬间发生的. 曲率流 (6.88) 也描述了 "曲线缩短", 如同在习题 6.33 中重新改后, 我们可以证明曲线的总长度随时间递减.

最后, 我们重新回到行波在求解 Burgers 方程中的作用, 这给我们机会来提及关于非线性抛物型方程中最引人注目的结果, 即我们能够精确地求解在 $-\infty < x < \infty$ 中 Burgers 方程的 Cauchy 问题. 回到我们关于群不变性的讨论, 我们注意到常微分方程 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 + y = 0$ 的阶通过变成新变量 $\log y$ 可以降低. 如果我们在上面的讨论中颠倒自变量和因变量的作用, 即 $X = x$, 这时得到 Ricatti 方程 $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}x + Z^2 + 1 = 0$, 此时 $Z = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$ 是相当有效的. 因此, 稍微改变符号, 并进行追溯, 于是我们记 $W = -2\mathrm{d}/\mathrm{d}x(\log y)$, 方程 $\mathrm{d}^2W/\mathrm{d}x^2 - W\mathrm{d}W/\mathrm{d}x = 0$ 可被线性化. 在 Burgers 方程 (6.82) 中, 我们记[125]

$$u = -2\frac{\partial}{\partial x}\log v,$$

这就是著名的 Hopf-Cole 变换, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right) = 0,$$

123 这一关于 u_1 的特殊积分的不可靠讨论可用 Fredholm 二则性系统化.
124 如果波前的速度与负曲率成正比, 则我们得到一个非线性倒向热传导方程.
125 这个变换与我们应用于第 4 章和第 5 章中的 Liouville 方程的变换一样.

并且, 如果 v 满足热传导方程和初始条件

$$v(x,0)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int^{x}g(\xi)\mathrm{d}\xi\right),$$

则 $u=-(2/v)\partial v/\partial x$ 为 Burgers 方程满足初值条件 $u(x,0)=g(x)$ 的解. 所以可以将 Burgers 方程的稳定解与热传导可分离解等同起来.

6.6.4　比较方法与极值原理

对于某些类型的半线性抛物型方程的定性分析上的一个有用工具就是比较方法, 它基于极值原理, 其思想是 5.11.2.1 节中对非线性椭圆型方程中引入的想法的推广. 例如, 半线性问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u+f(u)\quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上,\quad u=g\quad 在\ t=0, \tag{6.89}$$

则 $\underline{u}$ 被称为下解, 如果

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\leqslant\nabla^2\underline{u}+f(\underline{u})\quad 在\ \Omega\ 中,\quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial n}+\alpha\underline{u}\leqslant 0\quad 在\ \partial\Omega\ 上,\quad \underline{u}\leqslant g\quad 在\ t=0. \tag{6.90}$$

同样, 如果 $\overline{u}$ 满足相反的不等式, 则 $\overline{u}$ 称为上解. 只要 f 为 Lipschitz 连续的. 6.3 节中所述的强极值原理可直接应用于 $u-\underline{u}$ 和 $\overline{u}-u$ 从而保证 $\underline{u}<u<\overline{u}$ 成立. 这意味着从 $\underline{u}$ 或 $\overline{u}$ 开始的基于常微分方程的 Picard 定理的单调迭代有时能够确定局部的存在性、唯一性与连续依赖性. 就像 5.11.2.1 节, 必须假设存在常数 K, 使得 $f(u)+Ku$ 是递增的. 那么当 $n\geqslant 1$, 我们考虑以下迭代

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}-\nabla^2 u_n+Ku_n=f(u_{n-1})+Ku_{n-1}\quad 在\ \Omega\ 中,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial n}+\alpha u_n=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上,\quad u_n=g\quad 在\ t=0,$$

迭代的起始点可以取为 $u_0=\underline{u}$ 或 $u_0=\overline{u}$. 现在, 因为

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_0)-\nabla^2(u_1-u_0)+K(u_1-u_0)\geqslant 0.$$

在取 $u_0=\underline{u}$ 时, (6.90) 后面的讨论应用于 u_1-u_0, 证得 $u_1\geqslant u_0$, 强极值原理可用来归纳地证明, 如果 $u_{n-1}\leqslant u_n\leqslant\overline{u}$, 则 $u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\overline{u}$. 由此得 u_n 是一个递增序列, 且小于 $\overline{u}$, 所以当 $n\to\infty$ 时, 对某个介于 $\underline{u}$ 与 $\overline{u}$ 之间的 u, $u_n\to u$. 这个证明为 5.11.2 节中结果的推广. u 是初 – 边值问题的解的事实可以推得. 假设存在 Green 函数 G, 通过构造如下积分方程的迭代格式

$$u(x,t)=\int_{\Omega}Gg\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}+\int_{0}^{t}\int_{\Omega}G(f(u)+Ku)\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\mathrm{d}\tau; \tag{6.91}$$

仿照常微分方程 Picard 类方法的讨论, 我们还可以得到解 u 的唯一性[126].

例 6.7 (Fisher *方程*) 考虑下面问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)\quad \text{对 } 0<x<1, \tag{6.92}$$

在 $x=0,1$ 时, $u=0$, 且在 $t=0$ 时, $u=\sin\pi x$.

很明显, 它的上下解分别为 $\overline{u}=1$ 和 $\underline{u}=0$. 但是, 我们还可以取到一个更好的上解 $\overline{u}=A\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\pi x$, 其中 $A\geqslant 1$, $0<\alpha<\pi^2-1$. 后者表明当 $t\to\infty$, $u\to 0$ 即群体灭绝.

例子表明对于更一般的半线性情形, 解的界可以简单地由关于稳态问题线性化后所得问题的主特征函数确定. 假设 U 为如下面静态问题的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u+f(u)\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},\quad u=h(x)\quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \tag{6.93}$$

利用 $u=U+\widetilde{u}$ 来线性化上述方程, 近似的有

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}=\nabla^2\widetilde{u}+f'(U)\widetilde{u}\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},\quad \widetilde{u}=0\quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{6.94}$$

为了利用我们熟知的线性稳定性理论的技巧 (在 5.11.3 节中我们已经间接提到), 我们必须确定下述谱问题的实主特征值 μ_0

$$\nabla^2\phi+f'(U)\phi+\mu\phi=0\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},\quad \phi=0\quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}; \tag{6.95}$$

如果 μ_0 为正的, 则我们希望静态为稳定的. 然而, 在这种情形下, 我们可以通过比较法来证明稳定性, 因为我们可以利用主特征函数 ϕ_0 的单一符号性 (在 5.7.1 节中已证明). 取 $\phi_0\geqslant 0$, 取数 c 足够小使得对某个满足 $0<\beta<\mu$ 的 β 当 $c\to 0$ 时

$$f(U-c\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0)-f(U)-c\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0 f'(U) \text{ 是 } o(c).$$

然后, 若令

$$\underline{u}=U-c\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0,\quad \overline{u}=U+c\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0,$$

我们求得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}-\nabla^2\underline{u}-f(\underline{u})&=c(\beta-\mu_0)\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0+o(c),\\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}-\nabla^2\overline{u}-f(\overline{u})&=c(\beta-\mu_0)\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0+o(c),\end{aligned}$$

126 一般来说, 一旦任何偏微分方程的求解有行如 (6.91) 的表示, 我们可以有效地将这个问题转化为常微分方程. 这一点将在第 9 章讨论.

所以, 如果 c 为正的, $\overline{u}$ 与 $\underline{u}$ 分别为上下解. 最后取初始值满足 $U - c\phi_0 \leqslant u(\boldsymbol{x}, 0) \leqslant U + c\phi_0$, 我们推出

$$U - c\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0 < u < U + c\mathrm{e}^{-\beta t}\phi_0,$$

因此当 $t \to \infty$, $u \to U$.

我们给出在如下情况下的一个一般的注记, 在 (6.93) 当 $h = h_0 =$ 常数时, 且 $U \equiv h_0$, 则 (6.95) 恰为 Helmholtz 方程, 它的特征值全为正的. 所以只要 $f'(h_0) \leqslant 0$, 就能保证 $\mu_0 > 0$, 对于空间均匀的问题, 扩散是不能扰动静态解的. 但是在 6.7.2 节中, 将看到对于抛物型方程组是不成立的.

如果线性化后的方程有负的特征值, 利用完全相同的方法可以证明这个问题是不稳定的. 但是当 $\mu_0 = 0$ 时, 线性化后的问题不足以提供关于稳定型的足够信息. 从下述例子可以说明上下解的技巧甚至更加重要.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 \quad 对\ 0 < x < 1, \tag{6.96}$$

当 $x = 0, 1$ 时, $\partial u/\partial x = 0$. 空间均匀问题的解是抛物型方程满足边界条件的精确解, 因此它们被用作初 - 边值问题的上下解. 所以平衡点 $u \equiv 0$ 是不稳定的.

以上的讨论说明, 我们有利用比较原理与 Helmholtz 方程的特征值信息来推断半线性方程静态解的稳定性的广阔余地. 在习题 6.35 中我们给出了另一个例子, 但是在这里我们只提及一种对放热燃烧理论有着重要意义的像 (6.71) 那样建模的特殊情形. 当 $\lambda f(u) > 0$ 时, 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + \lambda f(u) \quad 在\ \Omega\ 中 \quad 且 \quad u = 0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上$$

的 "最小的" 静态解是稳定的, 证明如下.

由 5.11.3 节的讨论, 我们假设在区间 $0 < \lambda < \Lambda$ 中 U 连续依赖于 λ. 因此, 取 λ_i 满足 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda$, 并令对应的静态 U_i 作为 $\lambda = \lambda_0$, $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ 时发展问题的上下解. 如果初始条件充分接近 U_0, 使得

$$U_1 \leqslant u(\boldsymbol{x}, 0) \leqslant U_2,$$

则比较法保证 u 保持在 U_1, U_2 之间, 因此令 $\lambda_1 \uparrow \lambda_0$, $\lambda_2 \downarrow \lambda_0$ 我们得到定态 U_0 的稳定性.

*6.6.5　破裂

在本书中, 我们不止一次地看到, 非线性会使适定的偏微分方程, 不论是椭圆、双曲或抛物型方程的解中产生奇异点. 这种奇性的发展为一种整体现象, 它依赖于离奇性位置比较远的数据, 这使得预测产生困难.

对于半线性方程, 利用比较法研究解关于时间的单调性, 我们可以得到一些非常有用的线索. 例如, 对于 (6.89) 的 Robin 问题, 初始值 $u(\boldsymbol{x},0)=g(\boldsymbol{x})$ 可以作为一个下解, 则它满足 $\partial\underline{u}/\partial t=0$ 的 (6.90). 因此得到 $u(\boldsymbol{x},t)\geqslant g(\boldsymbol{x})$ 并且还可证明[127] 在比较短的时间内 $\partial u/\partial t\geqslant 0$. 所以我们可以取 $u(\boldsymbol{x},h)$ 作为从足够小时间 $t=h$ 开始的新的解. 重复这个过程, 可以证明 $\partial u/\partial t$ 恒正, 因此如果我们又可以找到最小的大于 g 的静态, 则当 $t\to\infty$ 时, u 必须趋于这个静态.

这些讨论揭示了如下半线性问题的下述一般二择性: 如果 g 是下解, 由于 u 为单调递增的, 所以 u 或者趋于超过 g 的最小平衡点, 或者 u 为无界的. 例如, 6.6.1 节的点火模型

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u+\lambda \mathrm{e}^u \quad 在\ \Omega\ 中, \quad u=0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上, \quad u=0 \quad 在\ t=0. \tag{6.97}$$

回忆一下 5.11.3.1 节, 静态性质是由 λ^* 的存在性刻画的. 该 λ^* 使得正解从响应图原点出发的最小连续分支 ω 在 $\lambda=\lambda^*$ 处第一次发生翻转. 对于发展问题, 初始条件零为一个严格的下解, 所以对于任意的 $\lambda>0$, $\partial u/\partial t>0$. 因此, 如果 $\lambda<\lambda^*$, 则当 $t\to\infty$, $u\to\omega$. 实际上, 我们可以将上述的讨论推广证明, 最小平衡态无论从上方还是下方均是稳定的.

相反, 如果在 (6.97) 中 $\lambda>\lambda^*$, 并且事实上如果 $\lambda\leqslant\lambda^*$, $u(\boldsymbol{x},0)$ 很大, 则有 $t\to\infty$ 时, u 为无界的可能. 并且在有限的时间内, u 很可能会趋于无穷, 这种情形我们称之为破裂发生. 为了证明当 λ 充分大时必然发生破裂, 我们只需考虑 u 按以下 Helmholtz 问题的特征函数展开的首项 Fourier 系数的性态,

$$\nabla^2\phi_i+\mu_i\phi_i=0, \quad \phi_i=0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{6.98}$$

不失一般性, 取 ϕ_0 为正的且 $\int_\Omega \phi_0\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$, 并设 $a=\int_\Omega u\phi_0\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 由 Green 定理得到

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\int_\Omega \phi_0\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega \phi_0(\lambda\mathrm{e}^u+\nabla^2 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega \phi_0(\lambda\mathrm{e}^u-\mu_0 u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

现在, 由 Jensen 不等式 (见脚注 97)

$$\int_\Omega \phi_0\mathrm{e}^u\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\exp\left(\int_\Omega \phi_0 u\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right),$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\geqslant\lambda\mathrm{e}^a-\mu a,$$

这里可以清楚地看到当 λ 充分大时, a 破裂.

127 为证明这个问题, 我们注意到对 $h\geqslant 0$, $u(\boldsymbol{x},h)\geqslant u(\boldsymbol{x},0)$, 考虑 $u_h(\boldsymbol{x},t)=u(\boldsymbol{x},t+h)$ 的演变可得到 $u_h(\boldsymbol{x},t)\geqslant u(\boldsymbol{x},t)$, 因此取 $h\downarrow 0$ 的极限得 $\partial u/\partial t\geqslant 0$.

我们认可用这样的讨论来证明甚至当 $\lambda < \lambda^*$ 时若初始值 g 充分大, 也可以出现破裂 (见习题 6.35 和下面的式 (6.99)). 实际上, 可以提出更多深入的关于破裂的问题, 例如, 在 $\lambda = \lambda^*$ 处附近的性质与预测 u 在破裂附近的空向变化. 后者在实际中非常重要, 这主要因为在大量即使可能经受过温和放热效应的固体材料中可能出现热点[128].

在这里对这些问题的细节不再进行复杂的讨论, 我们简短地提出另外一个定性方法来求解破裂, 即利用积分估计的应用. 这可能需要大量的技巧, 对于具有零 Dirichlet 数据的半线性方程 $\partial u/\partial t = \nabla^2 u + f(u)$, 乘以 $\partial u/\partial t$ 并且积分得到

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \left(f(u)\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u \cdot \nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - F(u))\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

其中 $F(u) = 2\int^u f(s)\mathrm{d}s$. 因此, “能量”

$$E = \int_\Omega (|\nabla u|^2 - F(u))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

是递减的. 现在, 我们用 (6.98) 中的正主特征值 μ_0 的 Rayleigh-Ritz 表述 (见 5.7.1 节) $\min \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} / \int_\Omega u^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}$. 这意味着 $E \geqslant \int_\Omega (\mu_0 u^2 - F(u))\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 我们需要的是对小的 u 上述积分为正. 例如 $f(u) = u^p$, $p > 1$ 就是这种情况.

另一方面, 我们考虑

$$J = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

现在简单的计算可以证明, 当 $f(u) = u^p$ 时仍然对 $p > 1$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \int_\Omega (u^{p+1} - |\nabla u|^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x} - E(t).$$

我们按照 J 来估计 $\int_\Omega u^{p+1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 再次利用 Jensen 不等式, 并且由 E 的单调性得到

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \geqslant 常数 \cdot J^{(p+1)/2} - E(0). \tag{6.99}$$

因此, 如果 $u(\boldsymbol{x}, 0)$ 足够大使得 $E(0) < 0$, 我们得到有限时间的破裂.

作为这一节的后记, 我们指出甚至 *线性抛物型方程* 也会产生破裂. 这一点在 (6.33) 后的讨论中提示过, 那时我们说明倒向热传导方程产生破裂是常见的, 但对

128 这样的热点曾作为一种人体自然机制而提出.

于向前热传导方程破裂也会发生. 可以通过在热方程 $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ 中, 令[129]

$$u = v\mathrm{e}^{x^2/2}, \tag{6.100}$$

由此得到表面上平凡无奇的向前热传导方程

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial v}{\partial x} + (x^2+1)v. \tag{6.101}$$

因此, 如果寻找满足在 $t=0$, $v=g(x)$ 的解, 我们从 (6.30) 与 (6.100) 得到

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\mathrm{e}^{(\xi^2-x^2)/2-(\xi-x)^2/4t}\mathrm{d}\xi$$

而非 (6.32), 假设当 $|x|\to\infty$ 时 $g(x)$ 衰减得不是太快, 很明显当 $1/2-1/4t$ 的符号改变时, 即 $t=1/2$ 时会产生破裂. 这一粗看 (6.101) 似乎出乎意料的性质可以用热传导方程的解 $\mathrm{e}^{x^2/4(1-t)}/\sqrt{1-t}$ 在 $t\uparrow 1$ 时由于它的无穷增长而破裂或 (6.101) 的系数的空向变化的无界性这一事实来解释.

*6.7 高阶方程和方程组

我们通过引用一些更加奇异的抛物型方程来结束这困难而又重要的一章, 这进一步强调这些方程的解对于数据的敏感依赖性. 我们的例子包括许多物理过程的模型, 它们所导出的方程的阶高于 2, 并且为向量或标量形式. 然而, 我们限于注意时间项为一阶, 空间项为偶数阶的方程, 因为只有这种方程与我们本章前面讨论过的方程有共同之处. 例如, 三阶标量方程呈现的振动性态令人多方面引起对双曲型方程的回忆. 正如在第 9 章我们将看到的.

即使有这些强加的限制, 我们还是遇到了在前几章已经明显看到的表述问题. 这是因为方程的阶数越高, 对解的性质作一般的叙述就越难. 因此, 必须增加对特殊类型方程个案的研究. 为了本节不至于退化为关于特殊问题的更枝节的叙述, 我们将让读者对可能的误区和有关的模型与方法有一个初步的了解. 因此, 当然会丧失通常考虑特殊情形可以得到的东西.

6.7.1 高阶标量问题

四阶抛物型方程的来源之一是对二阶不适定问题的 "正则化". 如在 6.6.1 节中提到, 现在比较流行的是通过 u 来表示已经变换材料的百分比的相分离模型, 而不是 Cahn-Allen 模型, 即设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 f(u), \tag{6.102}$$

129 对于这个注我们衷心地感谢 R. Hunt 博士.

其中 f 根据统计力学理论与 u 相关, 事实上, $f(u)$ 是材料的所谓 *自由能* $F(u)$ 的导数, 如图 6.4 所示. 在 $u=\pm 1$ 处的势阱表示不同的相, 在 $|u|>1$ 的区域无物理意义.

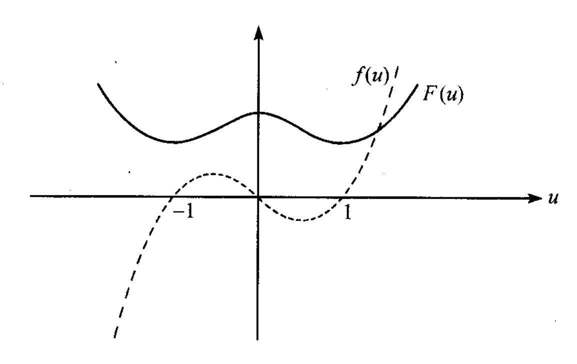


图 6.4　相位分离的自由能量

如果边界和初始值完全落在一个相中, 即在 $u=-1$ 或 $u=1$ 附近, 则在 (6.102) 的右边 $\nabla^2 u$ 的系数可以简单地成为 $f'(u)$, 并仍保持为正的. 应用最大值原理, 这个问题为适定的, 但是没有相变. 为得到不同的相, 解必须同时包含 u 在 ± 1 的附近的区域. 所以在某些地方, u 取值使得 $f'<0$, 这就是所谓的 "旋节线" 区域. 在这些区域中方程为倒向热传导方程, 如果初始值也是旋节线的, 则这个问题是不适定的. 特别指出破裂一般发生在这些旋节线区域上. 在破裂产生之前的时间, 最大值趋向增加, 最小值趋向减少. 因此, u 向排斥旋节线区域的趋势变化, 增加对应于相分离的趋势.

在任何情况下, (6.102) 需要进行正则化. 一种方法为通过引入具有正确符号的更高项, 一个这样的正则化方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 f(u)-\varepsilon^2\nabla^4 u,$$

其中 ε 为正的小常数. 这个四阶的抛物型方程称为 Cahn-Hilliard *方程*, 最后的重调和项可以用相交面曲面上包含的能量密度确定. 选择符号的理由, 事实上这样方程的适定性准则是来自于按 3.1 节的思想考虑一个带有振动初始数据线性一维问题. 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\quad 对\ t>0,\quad 具\quad u(x,0)=\sin nx. \tag{6.103}$$

它有解 $u(x,t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\sin nx$, 其中 $\lambda=n^2(1-\varepsilon^2 n^2)$. 虽然低波数 (即 $n<1/\varepsilon$) 导致解随时间增长, 高波数 (即 $n>1/\varepsilon$) 解会衰减. 零解是不稳定的, 这与热传导方程不同, 不再有任何像在倒向热传导方程发生的那种任意迅速增长的迹象. 同样地, 只要 ε 为实的, 则 Cahn-Hilliard 中的 $-\varepsilon^2\nabla^2 u$ 项将限制 u 的快速变化. 这证实了物

质减少其界面能量的预测. 对低波数摄动缺乏的稳定性, 清楚地预示对此特殊的方程没有最大值原理. 虽然 $-\partial^2u/\partial x^2$ 导致了方程 (6.103) 的不稳定性和最大值原理的失效, 事实上对 $\partial u/\partial t = -\partial^4 u/\partial x^4$ 最大值原理也不成立, 如果我们在 $x = \pm 3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$ 取

$$u = 105 - 24t > 0,$$

且在 $t = 0$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$ 取

$$u = x^4 + 24 > 0,$$

我们可以看到四阶方程有解 $u = x^4 + 24(1-t)$, 它在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 中为正, 在 $1 < t \leqslant 2$ 中为负.

注意到虽然 Green 函数与变换法原则上也可应用于任何阶的抛物型方程. 当我们对高阶线性方程做 Laplace 变换时, 解里面会出现 $\mathrm{e}^{-p^{1/4}x}$ 项, 但是这使得逆变换比起热传导方程来更加可能.

另外一类导致四阶抛物型方程的问题是有关在表面张力作用下的黏性薄膜流体, 如油漆式涂料的流动. 通常我们令薄膜的厚度为 h, 压力为 p. 与 6.6.1 节中没有重力的影响下压力约等于它在薄膜表面的值的情况不同, 现在它等于表面张力与曲率的乘积, 所以 p 与 $-\nabla^2 h$ 近似成比例. 假设膜很薄且 $|\nabla h|$ 非常小, 这里 ∇ 为在薄膜表面上的二维梯度. 我们仍然能用 近似润滑理论 得到平面内速度与 $-h^2\nabla p$ 成正比, 所以流体的通量与 $h^3\nabla^2 h$ 成正比. 最后, 由质量守恒定律, 在适当的尺度下, 我们得到

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h^3 \nabla(\nabla^2 h)), \tag{6.104}$$

我们得到了具有三次扩散系数的四阶扩散方程.

类似于 Cahn-Hilliard 方程, 对 (6.104) 有很多需要讨论的问题. 而在 6.6 节中对于半线性方程所应用的方法特别是积分估计方法, 对于前者是可以应用的, 而后者显然具有某种群不变性可以用来求得相似解. 遗憾的是, (6.104) 在 $h = 0$ 时的退化比多孔介质方程更加严重. 这一点对于漆匠是件遗憾的事, 这是因为他们对 "针孔" 发生的判别标准感兴趣, 所谓 "针孔" h 关于空间与时间是局部趋于零的[130].

按照本节开始的注释, 我们以对向量方程的小心阐述作为结束.

6.7.2 高阶方程组

当考虑不同物种相互影响时, 或当化学反应中不只一种化学浓度起主导作用时, 当同时考虑热传导与质量扩散时, 抛物型方程耦合方程组形式的模型出现了. 在没有对流的情形下, 这种方程组的基本形式有时可以写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \nabla \cdot (\boldsymbol{D} \nabla \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \quad 在\ \Omega\ 中,$$

130 然而可以证明, 如果 h 在图 6.1 中抛物线边界 Γ 上是严格为正的, 那么 h 在区域内部是平格为正的.

这里的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$ 为 n 元向量, $\nabla \boldsymbol{u}$ 为 $n\times m$ 矩阵 $(\partial u_i/\partial x_j)$, $\boldsymbol{D}$ 为 $n\times n$ 具有正的对角元的对角矩阵[131], $\boldsymbol{u}$ 的每个分量在 $\partial\Omega$ 上满足边界条件.

这些方程组的一个特殊性质为所谓的 *转向* 或 *双扩散不稳定性*. 即使对于单个方程扩散稳定化与光滑化的机制, 现在我们也有下面的可能性: $\boldsymbol{u}$ 可能为常稳定形式, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$, 且作为常微分方程 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 的解它是稳定的. 所以对于 Jacobi 矩阵 $(\partial f_i/\partial u_j)$ 所有特征值有负的实部, 但是 $\boldsymbol{u}$ 作为这个抛物型方程组的解可能是不稳定的. 例如, 考虑线性方程组

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\begin{pmatrix}14 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x^2}+\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}\quad 对\ 0<x<2\pi,$$
$$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}\quad 对\ x=0\ 且\ x=2\pi.$$

常微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},$$

只有零解才是它唯一的稳定形. 它的稳定性是由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 决定的, 它们满足 $\lambda^2+\lambda+2=0$, 所以它的特征值有负的实部且零为它的稳定解.

对于边值问题且有如下形式的解

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mu t}\sin kx$$

对于任意的 $k=1/2,1,3/2,\cdots$, 假设

$$(\boldsymbol{B}-\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}-2-14k^2-\mu & -2\\ 2 & 1-k^2-\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

现在特征值 μ 满足

$$\mu^2+(1+15k^2)\mu+4-(1-k^2)(2+14k^2)=0.$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的迹仍为负的, 但是行列式也为负的, 所以当 $(1-k^2)(2+14k^2)>4$ 时, 特征值为实的且有相反的符号. 取 $k=1/2$ 上面的不等式是满足的, 从而平凡解是不稳定的. 这里 $\boldsymbol{u}$ 各分量之间的耦合作用与方程组 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-x+\lambda y$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-y+\lambda x$ $(\lambda>1)$ 的耦合项的作用是相同的.

尽管这些方程组是非常重要的, 例如在密度与温度相互影响下海洋中的不稳定性, 但是其数学理论远不如标量情形. 当扩散矩阵 $\boldsymbol{D}$ 不是对角阵并且依赖 $\boldsymbol{u}$ 时会遇到特殊的问题, 因为判断 $\boldsymbol{D}$ 是否正定, 即方程组是否是严格抛物型的变得很困难.

---

131 在某些热力学模型中 $\boldsymbol{D}$ 是对称的而不是对角阵.

习　题

6.1. 假设污染浓度 c 满足

$$\frac{\partial c}{\partial t}+v\frac{\partial c}{\partial x}=D\nabla^2 c,\quad v=\text{常数}$$

且

$$\frac{\partial c}{\partial y}=0\quad \text{在 } y=\pm d$$

做变换 $x=LX$; $y=dY$ 和 $t=(L/v)\tau$ 得到

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}+\frac{\partial c}{\partial X}=k\left(\frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}+\delta^2\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}\right),\tag{6.105}$$

这里 $k=DL/vd^2$ 且 $\delta=d/L$. 证明存在稳定解 $c=c(X)$, 除了在 $X=1$ 的附近满足当 $\delta\to 0$, $c\to c_0$. 如果当 $\delta\ll 1$ 时, (6.105) 的最后一项忽略不计, 你认为应该满足什么样的边界条件呢?

6.2. 求以下方程的时间周期解

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\quad \text{对 } x>0\quad \text{具}\quad -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=Q\cos\omega t$$

当 $x\to\infty$, T 为有界的. 取 $\omega=2\pi$ (年)$^{-1}$, 来说明一年中最长 (最短) 天后的六个星期为一年中最热 (最冷) 的理由.

6.3. 假设 ω 为下面方程两个解的差

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla^2 u+\alpha u+f(x,t)\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

有

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=g(x,t)\quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}$$

和

$$u=h(x)\quad \text{在 } t=0,$$

这里 a 与 α 为常数, 且 $\alpha>0$. 证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega w^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\int_\Omega(|\nabla w|^2-\alpha w^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{\alpha}{2}\int_{\partial\Omega}w^2\mathrm{d}S=0.$$

推出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\text{常数}\right)\int_\Omega w^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant 0,$$

因而 $w \equiv 0$.

*6.4. 假设

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad 在\ -L < x < \infty\ 中,$$

有

$$u(x,0)=0, \quad u(-L,t)=u_0=常数, \quad u \to 0 \quad 当\ x \to \infty\ 时.$$

证明存在解

$$u(x,t) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{(x+L)/\sqrt{t}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2/4} \mathrm{d}\eta.$$

因为对大的正 X, $\int_X^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2/4}\mathrm{d}\eta < \mathrm{e}^{-X^2/4}$, 若 $u_0 = \mathrm{e}^{KL^2}$ 且 $L \gg 1$, 则

$$u < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{KL^2-(x-L)^2/4t},$$

除非 x 比较大时且为负数. 推导如果边界条件用 $u < \mathrm{e}^{Kx^2}$ 代替, 当 x 充分大时且为负数, $K>0$, 那么当 t 充分小时, $u \equiv 0$.

6.5. 证明如果 $f(t)$ 为无穷次可导的, 则

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

满足热传导方程, 并且证明热传导方程有非零解满足当 $u(x,0)=0$.

6.6. 一个质点从原点出发, 在每个时间步长 k 中以概率 1/2 用步长 $\pm h$ 沿实轴移动, 若 $p(x,t)$ 为 t 时刻质点位置的概率密度函数, 利用 6.12 节中的讨论证明, 当 $h^2 = k$, 取 h, $k \to 0$ 的极限, 有

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

解释为什么初始条件应为 $p(x,0) = \delta(x)$, 并证明 $p(x,t) = (1/\sqrt{2\pi t})\mathrm{e}^{-x^2/2t}$ 是以期望为零方差为 t 的正态分布的概率密度.

注. 这就是 Brown 运动的密度函数. 离散的随机游动 (在 $h,k \to 0$ 之前) 服从二项式分布, 正态极限分布是中心极限定理的一个实例, 由二项分布取极限得到.

6.7. 在数值上, 我们得到

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2}\right)^2 \approx 3.142.$$

利用一维热传导方程的周期解来证明 $\sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2} > \sqrt{\pi}$.

6.8. 令 $G(x,t;\xi)$ 满足

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\quad \text{对 } 0<x<1,\ t>0,$$

且

$$\frac{\partial G}{\partial x}=0\quad \text{在 } x=0,1\quad \text{和}\quad G=\delta(x-\xi)\quad \text{在 } t=0.$$

证明 G 的 Laplace 变换, 满足于

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{G}}{\mathrm{d}x^2}-p\widetilde{G}=\delta(x-\xi),\quad \frac{\mathrm{d}\widetilde{G}}{\mathrm{d}x}=0\quad \text{在 } x=0,1,$$

因而

$$\widetilde{G}(x,\xi;p)=\begin{cases}\cosh(x\sqrt{p})\cosh((1-\xi)\sqrt{p})/(\sqrt{p}\sinh\sqrt{p}), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \cosh(\xi\sqrt{p})\cosh((1-x)\sqrt{p})/(\sqrt{p}\sinh\sqrt{p}), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

推出

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(x,t;\xi)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathrm{Re}p=\text{常数}>0}\widetilde{G}\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\\ &=\begin{cases}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x\cos n\pi(1-\xi), & x\leqslant\xi,\\ \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi\xi\cos n\pi(1-x), & \xi\leqslant x,\end{cases}\end{aligned}$$

所以得到

$$G(x,t;\xi)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2t}\cos n\pi x\cos n\pi\xi.$$

注.

(i) 这个问题的 Green 函数为 $G(x,\tau-t;\xi)$, 这里的函数 G 不同于 p. 234 的函数 G'.

(ii) G 能够写为

$$\frac{1}{2}\left(\theta_3\left(\frac{x-\xi}{2\pi},\mathrm{e}^{-\pi^2t}\right)-\theta_3\left(\frac{x+\xi}{2\pi},\mathrm{e}^{-\pi^2t}\right)\right),$$

这里的 θ_3 为 θ 函数.

(iii) 通过把 $\widetilde{G}$ 展开为以 $\mathrm{e}^{-2\sqrt{p}}$ 的幂级数并逐项求逆, 可以将此结果与 (6.36) 联系起来.

6.9. 如果

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \text{对 } t>0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \text{在 } x=0,1,\quad u(x,0)=u_0(x),$$

利用已知结果

$$u(\xi,\tau)=\int_0^1 u_0(x)G(x,\tau;\xi)\mathrm{d}x,$$

其中 G 由习题 6.8 中给出. 证明, 当 $\tau\to\infty$ 时, $u(\xi,\tau)\to\int_0^1 u_0(x)\mathrm{d}x$.

6.10. 在 $x=0,1$ 用 $G=0$ 的 Dirichlet 条件来代替习题 6.9 中的 Neumann 条件. 证明 G 变为

$$\begin{aligned}&2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x\sin n\pi\xi\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-(x-\xi-2m)^2/4t}-\mathrm{e}^{-(x+\xi-2m)^2/4t}\right).\end{aligned}$$

6.11. 假设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数, 且有下面的 Fourier 展开

$$f(x)=\sum_{n=N}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

前面 $N-1$ 个谐波不出现, 利用 $t>0$ 时 $\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2$, $u(x,0)=f(x)$ 的较大时间周期解的行为, 证明对于比较大的 t, 在每一个周期里 $u(x,t)$ 至少有 $2N$ 个零点, 由极值原理推出随着 t 的增加, u 的零点将消失. 用此来证明 $f(x)$ 在每个周期内至少有 $2N$ 个零点.

6.12. 证明 $\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2$ 在 $x>0$ 中, u 在 $x=0$ 上给定的 Green 函数为

$$G(x,\tau-t;\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\left(\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4(\tau-t)}-\mathrm{e}^{-(x+\xi)^2/4(\tau-t)}\right)\quad 对\ t<\tau.$$

利用结果

$$\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)G-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial G}{\partial t}\right)u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=u(\xi,\tau),$$

证明, 如果在 $x=0$ 上, $u=g(t)$ 且在 $t=0$ 时, $u=h(x)$, 则

$$\begin{aligned}u(\xi,\tau)=&\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{\infty}h(x)\left(\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4\tau}-\mathrm{e}^{-(x+\xi)^2/4\tau}\right)\mathrm{d}x\\&+\frac{\xi}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\frac{g(t)\mathrm{e}^{-\xi^2/4(\tau-t)}}{(\tau-t)^{3/2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

6.13. 假设 $w(x,t)$ 的 Laplace 变换是 $\widetilde{w}=\mathrm{e}^{-\sqrt{p}x}$, $\mathrm{Re}\sqrt{p}>0$. 将求逆轨道变成沿负实轴, 证明, 对 $\gamma>0$,

$$w(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}\mathrm{e}^{pt-\sqrt{p}x}\mathrm{d}p=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\sin(x\sqrt{s})\mathrm{d}s.$$

推出

$$w(x,t)=\frac{-2}{\pi\sqrt{t}}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}y=\frac{x}{2(\pi t)^{3/2}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

6.14. 通过 Laplace 变换, 证明下列方程的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 在\ x>0, t>0\ 中,$$

有

$$u=0\quad 当\ t=0\ 时$$

且

$$u=g(t)\quad 在\ x=0\ 上$$

是由 Duhamel 公式 表示

$$u(x,t)=\int_0^t g(t-\tau)\frac{\partial v}{\partial t}(x,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}\quad 在\ x>0, t>0\ 中,\quad v(x,0)=0,\quad v(0,t)=1.$$

对于以上问题如何将 v 与 Green 函数联系起来, 关于 u 的公式有什么物理解释?

*6.15. 证明, 如果

$$\nabla^2 G=\frac{\partial G}{\partial t}\quad 在\ \Omega\ 中, t>0,$$

有

$$G=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上\quad 且\quad G=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\quad 当\ t=0\ 时,$$

则 Helmholtz 问题

$$(\nabla^2+\lambda)\phi=0\quad 在\ \Omega\ 中,\quad \phi=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上$$

的特征值 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}=\int_\Omega G(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

假设当 t 比较小时, G 可由

$$\frac{1}{(4\pi t)^{m/2}}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2/4t}$$

来近似, 其中 m 为 Ω 的维数. 证明, 当 $t\to 0$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda_n t}$ 可由 $\mathrm{vol}\,(\Omega)/(4\pi t)^{m/2}$ 来近似.

注. 如果严格证明, 还需要证明对于靠近边界的区域的贡献. 此时对 G 近似失效, 当 $t \to 0$ 时, G 可以忽略不计.

6.16. 证明对于下面的方程的 Green 函数

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) u = \nabla^2 u \quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是给定的, u 在边界 $\partial\Omega$ 和 $t = 0$ 都是给出的, 满足

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \nabla \cdot (G\boldsymbol{v}) + \nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(t - \tau),$$

在边界 $\partial\Omega$ 和 $t = T > \tau$ 时, $G = 0$. 由此证明, 如果 Ω 为实轴 $-\infty < x < \infty$, 并且 $\boldsymbol{v}$ 在 x 方向是一个常向量, 则 $t < \tau$ 时,

$$G(x, \tau - t; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - t)}} \mathrm{e}^{-(x - \xi + |\boldsymbol{v}|(\tau - t))^2 / 4(\tau - t)}.$$

6.17. 验证方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{在 } x > 0, y > 0, t > 0 \text{ 中}$$

且在 $t = 0$ 时, $u = 1$, 当 $x = 0, y = 0$ 时, $u = 0$ 的相似解是

$$u = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right),$$

其中 $\operatorname{erf} \eta = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\eta \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s$.

6.18. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{在 } t > 0, x > 0, y > 0 \text{ 中},$$

且 $u(0, y, t) = u(x, y, 0) = 0$ 和 $u(x, 0, t) = 1$. 你是否希望 u 是 x, t 的解析函数? 证明

$$u = \begin{cases} \operatorname{erfc}(y/2\sqrt{t}), & 0 < t < x, \\ \operatorname{erfc}(y/2\sqrt{x}), & x < t, \end{cases}$$

除了在 $x = t$ 点满足方程和边界条件, 其中 $\operatorname{erfc} \eta = 1 - \operatorname{erf} \eta$. 在 $x = t$ 点会有怎样的间断呢?

*6.19. 假设

$$D \frac{\mathrm{d}^2 \psi}{\mathrm{d}y^2} - (p - \lambda v(y))\psi = 0 \quad \text{对 } v > 0,$$

具

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}y} = 0 \quad \text{在 } y = 0, 1.$$

对于小的 p, 记 $\psi=\psi_{(0)}+p\psi_{(1)}+p^2\psi_{(2)}+\cdots$ 和 $\lambda=p\lambda_{(1)}+p^2\lambda_{(2)}+\cdots$, 并且关于 p 为相同幂次, 证明

$$\psi_{(0)}=c_0=\text{常数},\quad \lambda_{(1)}=\frac{1}{v_0},\quad \text{其中 } v_0=\int_0^1 v(y)\mathrm{d}y,$$
$$\psi_{(1)}=\frac{c_0}{Dv_0}\int_0^y (y-y')(v_0-v(y'))\mathrm{d}y'+\text{常数}$$

且

$$D\frac{\mathrm{d}^2\psi_{(2)}}{\mathrm{d}y^2}=\left(1-\frac{v}{v_0}\right)\psi_{(1)}-\lambda_{(2)}c_0v_0.$$

推出

$$\lambda_{(2)}=\frac{1}{c_0v_0}\int_0^1\left(1-\frac{v(y)}{v_0}\right)\psi_{(1)}\mathrm{d}y=-\frac{D_0}{v_0^3},$$

其中

$$D_0=\frac{v_0^2}{D}\int_0^1\left[\int_0^y\left(1-\frac{v(y')}{v_0}\right)\mathrm{d}y'\right]^2\mathrm{d}y\geqslant 0.$$

6.20. (i) 假设 $x'=g(x,\lambda)$ 且 $x''=g(x',\mu)$, 其中 g 是一个群且 $g(x,0)=x$. 关于 μ 进行微分, 并令 $\mu=0$, 证明 $\partial g/\partial\lambda$ 是关于 g 的函数与关于 λ 函数的乘积.

(ii) 假设

$$\frac{\partial g}{\partial\lambda}(x,\lambda)=F(g(x,\lambda))$$

并且 $g(x,0)=x$, 证明存在 G, 满足 $g=G(\lambda+G^{-1}(x))$, 且对 $x\mapsto g(x,\lambda)$ 验证闭包条件构成一个群.

*6.21. 令 (6.56) 推广为

$$x'=f(x,t;\lambda),\quad t'=g(x,t;\lambda),\quad u'=h(x,t,u;\lambda)$$

并且

$$\mathcal{U}=U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial t}+W\frac{\partial}{\partial u};$$

当 (6.59) 中的 u 用 u' 代替, 且 $O(\lambda)$ 项为左端项的合并, 证明存在新项

$$\lambda\left(-\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial t'}-\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial u}\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right).$$

推导热传导方程是不变的, 只要

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial u},\quad \frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}=0.$$

证明 (6.68) 满足这些方程且推出当 $f=\mathrm{e}^{\lambda/2}x$, $g=\mathrm{e}^{\lambda}t$ 和 $h=\mathrm{e}^{\gamma\lambda}u$, 这里的 γ 是任意常数, 在这组变换下, ξ 为不变量, 如果

$$\left(\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}+\gamma u\frac{\partial}{\partial u}\right)\xi=0.$$

最后证明 $x/\sqrt{t}$ 和 u/t^{γ} 都是不变量, 所以热传导方程的解是 $u=t^{\gamma}F(x/\sqrt{t})$, 这里的 F 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}-\gamma F=0.$$

6.22. 证明波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u$$

在下面的 Galileo 群变换下不是不变的

$$x'=x-\lambda t,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t$$

(这里的群运算按 p. 248 的记号是 $\nu=\lambda+\mu$), 这里的 λ 为常数, 且 $|\lambda|<c$, 代表坐标系统 (x',y',z') 沿着 x 轴的速度. 证明, 方程在以下 Lorentz 变换 下是不变的

$$x'=\gamma(x-\lambda t),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\gamma\left(t-\frac{\lambda x}{c^2}\right),$$

其中 $\gamma=1/\sqrt{1-\lambda^2/c^2}$, 并且, 这些变换构成了一个群, 其群的运算为 $v=(\lambda+\mu)/(1+\lambda\mu/c^2)$.

注. 回忆真空中电磁场的分量是满足上面波动方程的, 这一不变性与光速在任何惯性框架下不变这一事实是吻合的. 这是狭义相对论的一个基本假设. 同样可以说明适当表述的 Maxwell 方程在 Lorentz 变换下是不变的, Lorentz 变换的群运算对应于相对论的附加速度公式.

6.23. 方程

$$x\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 对\ x>0,\ t>0$$

用来描述黏流体中的平流, 这里的 x 是到固体边界的距离, t 为下游距离, 证明通过如下的变换

$$x'=\mathrm{e}^{\lambda/3}x,\quad t'=\mathrm{e}^{\lambda}t,\quad u'=\mathrm{e}^{\gamma\lambda}u$$

方程是不变的. 推出 $t^{\gamma}F(x/t^{1/3})$ 是方程的解, 只要

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\eta^2}{3}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}-\gamma\eta F=0,$$

并且其中的一种可能为 $u=t^{-2/3}\exp(-x^3/9t)$.

6.24. 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在 $x'=f(x,y;\lambda)$, $y'=g(x,y;\lambda)$ 下是不变的, 则无穷小生成元的分量 U 和 V 满足

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}.$$

6.25. 假设 $\nabla^2 u=0$, 且在二维极坐标下

$$u=\begin{cases}0, & \theta=0, r<1,\\ r^2, & \theta=\pi/2, r<1,\\ f(\theta), & r=1.\end{cases}$$

证明

$$u=-\frac{2}{\pi}r^2(\theta\cos 2\theta+\log r\sin 2\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n r^{2n}\sin 2n\theta,$$

其中

$$f(\theta)+\frac{2}{\pi}\theta\cos 2\theta=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2n\theta \quad 对\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

(这个问题是习题 5.12 结果的推广.)

*6.26. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon}\nabla^2 u+f(u)\quad 在\ \Omega\ 中,$$

具

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\varepsilon u=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上.$$

证明, 如果记 $u=u_0+\varepsilon u_1+\cdots$ 对比较小的 ε 及 ε 的同阶小量, 比较 ε 的同次幂可以得到

$$\nabla^2 u_0=0,\quad \frac{\partial u_0}{\partial n}=0\quad 在\ \partial\Omega\ 上,$$

因此 $u_0=u_0(t)$. 然后证明

$$\nabla^2 u_1=\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}-f(u_0)\quad 有\quad \frac{\partial u_1}{\partial n}=-u_0\quad 在\ \partial\Omega\ 上,$$

且推出

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}-f(u_0)=u_0\frac{\mathrm{area}(\partial\Omega)}{\mathrm{vol}\,(\Omega)}.$$

*6.27. 方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\gamma p\frac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon(\gamma-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

建立了一维气体动力学中黏度作用的模型, 这里 ε, r^2 为常数. 第二个方程的右端项代表对扩展的阻力大 (如同 (2.11) 的模型), 第三个方程的右端项表示阻力的功率. 假设 u, $p-p_0$, $\rho-\rho_0$ 都非常小, 这里的 p_0 和 ρ_0 为常数, 则流动关于以速度 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\pm a_0$ 的行波局部化, 这里的 $a_0=\gamma p_0/\rho_0$. 为细致研究在 $x=a_0t$ 附近的波, 令 $x=a_0t+\delta y$, 当具有 ε, ε^2/δ 和 δ 阶的项可以忽略不计时, 证明扰动满足

$$-a_0\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y}+\rho_0\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=0,\quad -\rho_0a_0\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}=0,\quad -a_0\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}+\gamma p_0\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=0.$$

这些方程的线性依赖性意味着我们要保留摄动中与 ε,δ 一起的二次项. 仅在 $\varepsilon=\lambda\delta^2$ 时, 其中 λ 是与 $O(1)$ 等同的常数, 我们可以得到合理的结果. 证明, 在这些假设下, 三个方程被保留的右端的最大项分别为

$$-\delta\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}-\overline{u}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial y}-\overline{\rho}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y},\quad -\delta\rho_0\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}-\rho_0\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\delta\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}+a_0\overline{\rho}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y},$$

$$-\delta\frac{\partial \overline{p}}{\partial t}-\overline{u}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}-\gamma\overline{p}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}.$$

最后, 利用交叉求导来证明

$$-2\rho_0\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\lambda\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}-\rho_0\frac{\gamma+1}{\delta}\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=0,$$

这只是符号作了改动的 (2.50) 式.

6.28. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)$$

且 $u=F(x-Vt)$, $V>0$. 证明

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\xi^2}+V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}+F(1-F)=0,$$

相平面 (F,F') 在 $(1,0)$ 有鞍点或在 $(0,0)$ 点有稳定的节点, 分别依赖是否成立 $V>2$ 或 $V<2$. 说明相平面如图 6.5 所示, 并推出只要 $V\geqslant 2$, 存在单调的 F, 当 $x-Vt\to\infty$ 时, $F\to 0$, 当 $x-Vt\to-\infty$ 时, $F\to 1$.

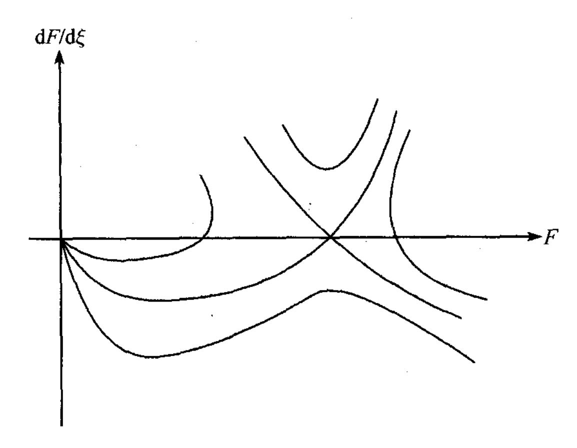


图 6.5　Fisher 方程的行波的相平面

6.29. 证明下面方程的行波解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)(u-a)\quad 对\ 0<a<\frac{1}{2}$$

满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2}+V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi}+F(1-F)(F-a)=0.$$

利用在 $a<F<1$ 时 $(F,\mathrm{d}F/\mathrm{d}\xi)$ 的相平面与在 $0<F<1$ 时的图 6.5 的相类似, 证明当下面条件满足时, 满足 $F(-\infty)=a$, $F(\infty)=1$ 的行波是存在的,

$$V\geqslant V_{\min}\quad 对某一\ V_{\min}\geqslant 2\sqrt{a(1-a)}.$$

考虑相平面 V 减少时的序列, 证明存在唯一值 $V<V_{\min}$, 使得满足 $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$ 的行波存在, 且此值在 $a=\dfrac{1}{2}$ 时为零.

6.30. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

定义 ψ 满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=u,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

且通过从 (x,t) 到 (ψ,t) 的部分的速度图变换, 来证明 $v=1/u$ 满足热传导方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}.$$

6.31. Blasius 方程

$$\frac{\mathrm{d}^3 F}{\mathrm{d}\eta^3}+\frac{1}{2}F\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\eta^2}=0$$

是自治的 (即在 $\eta' = \eta + \lambda$ 下不变), 所以我们可以通过令 $F = G$, $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\eta = H$ 来降阶, 得到

$$H\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}G^2} + \left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}G}\right)^2 + \frac{1}{2}G\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}G} = 0.$$

这个方程在 $G' = (1+\lambda)G$, $H' = (1+\lambda)^2 H$ 下是自不变的, 它的无限小生成元为

$$\mathcal{U} = G\frac{\partial}{\partial G} + 2H\frac{\partial}{\partial H}.$$

证明 $Y = H/G^2$ 和 $X = \log G$ 满足 $\mathcal{U}X = 1$ 和 $\mathcal{U}Y = 0$, 并导出关于 $Y(X)$ 的二阶自治方程.

6.32. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{e}^u \quad 对\ x > 0,$$

有

$$u = 0 \quad 在\ x = 0\ 上, \quad u = 0 \quad 在\ t = 0.$$

证明只要满足 $\partial h/\partial t = \partial^2 h/\partial x^2$ 当 $x = 0$, $h = t$; 当 $t = 0$, $h = 0$, $-\log(1-t)$ 是上解, $-\log(1-t+h(x,t))$ 是下解. 推出当 $x \to \infty$ 时, $u(x,1) \to \infty$.

*6.33. 假设一光滑平面曲线为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s,t)$, 其中 s 为从曲线的任何指定点出发的弧长, t 为时间, 从沿其法向 $\boldsymbol{n}$ 的法向速度 v_n 等于它的曲率 $\kappa(s,t)$ 的曲率流的演变, 定义 $\boldsymbol{t} = \partial\boldsymbol{r}/\partial s$ 为单位切线, 证明

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \kappa\boldsymbol{n} + u(s,t)\boldsymbol{t}$$

对于某个函数 $u(s,t)$ 成立, 利用 Serret-Frenet 公式

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}}{\partial s} = \kappa\boldsymbol{n}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial s} = -\kappa\boldsymbol{t}$$

来证明

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \kappa^3 + u\frac{\partial \kappa}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} - \kappa^2 = 0.$$

证明, 如果曲线为简单闭曲线, 长度为 $L(t)$, 使得 $\int_0^L \kappa \mathrm{d}s = 2\pi$, 则

$$\kappa(L(t),t)\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -[\kappa L]_0^L = -\kappa(L(t),t)[u]_0^L.$$

导出

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\int_0^{L(t)} \kappa^2(s,t)\mathrm{d}s,$$

所以曲线是变短的. 如果, 曲线围绕着区域 Ω, 证明 Ω 的面积变化率为 $\int_{\partial\Omega} v_n \mathrm{d}s$, 因此 Ω 的面积以 2π 的速度减少.

如果曲率流演变出两条简单的闭合曲线, 开始一个在另一个的里面, 证明它会始终在另一条曲线里面 (考虑两条曲线接触时发生什么, 内部的曲线在接触点有更大的曲率). 证明曲线 $\mathrm{e}^{-(x-Vt)} = \cos\pi y$, $V > 0$, 为 (6.88) 的行波解. 这样的曲线被称为杀手曲线, 这是因为与上面的结果比较, 在其路径上的任何其他曲线在有限时间内消失, 这样的曲线作为在具平行边的渠道内著名的 Hele-Shaw 流体的自由边界而出现, 称为 Saffman-Taylor 尖端 (见习题 7.19).

6.34. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + f(u) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \quad \text{具} \quad u = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

$f > 0$, $f(u)/u$ 当 $u > 0$ 是单调减函数, 假设存在一个正的稳定状态的 u_0, 且 $u - u_0 = w$ 非常小. 证明, 近似地有

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla^2 w + f'(u_0)w.$$

现在假设 λ_0 是下面方程的主特征值

$$\nabla^2\phi + (f'(u_0) + \lambda)\phi = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

以及 μ_0 是下面方程的主特征值

$$\nabla^2\phi + \left(\frac{f(u_0)}{u_0} + \mu\right)\phi = 0, \quad \phi = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

利用 Rayleigh 商的适当拓广来刻画 λ_0 与 μ_0 的特征, 证明 (i) $\mu_0 \leqslant \lambda_0$ 和 (ii) $\mu_0 = 0$. 推出 u_0 是线性稳定的.

6.35. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + \lambda f(u)$$

在 Ω 中, 有 $u = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上, 及 $u = g$, 在 $t = 0$ 时, 其中 f 是凸的, 且为正的. 也假设在 Ω 上 $\nabla^2\phi + \mu\phi = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上, $\phi = 0$ 的主特征函数为 ϕ_0, 它对应于特征值 μ_0 且成立 $\int \phi_0 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$. 利用 Jensen 不等式来证明 $a(t) = \int_\Omega u\phi_0 \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \geqslant \lambda f(a) - \mu_0 a \quad \text{有} \quad a(0) = \int_\Omega \phi_0 g \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

推出如果

$$\int_{a(0)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}a}{\lambda f(a) - \mu_0 a}$$

有界, u 会在有限时间内破裂.

*6.36. 假设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 对\ 0<x<1,\ t>0\quad 有\quad u(x,0)=0$$

或者在区间 $0<x<1$ 上每个端点给定一个条件

$$u(0,t)=u_0(t),\quad u(1,t)=u_1(t),$$

或者在 $x=0$ 处给出两个边界条件, 在 $x=1$ 处不给出条件

$$u(0,t)=u_0(t),\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=v_0(t).$$

通过对 t 的 Laplace 变换进行形式求解, 通过关于逆变换的收敛性来证明, 对于第一种边界条件问题是适定的, 但对第二种是不适定的.

对于方程 $\partial u/\partial t=-\partial^3 u/\partial x^3$, 给出在 $x=0$, $x=1$ 所有的边界条件的所有排列, 重复上述做法, 并与 $\partial u/\partial t=\partial^3 u/\partial x^3$ 的结果进行比较.

6.37. 考虑方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au+bv,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+cu+dv,$$

其中 a, b, c, d 是常数, 且假设

$$a+d<0<ad-bc,$$

因此当扩散可被忽略 $(\partial/\partial x=0)$, 解 $u=v=0$ 为渐近稳定的. 证明存在 u, v 与 $e^{\lambda t}$ 成比例的解, 其中 $\mathrm{Re}\lambda>0$, 若

$$Dk^4-(d+aD)k^2+ad-bc<0;$$

证明仅当 $ad<0$, $bc<0$ 且若 a (或 d) 为负的, D 小于 (大于) 方程

$$(az-d)^2+4bcz=0$$

的较小根.

第 7 章　自由边值问题

7.1　引言与模型

本章是这本书中最不传统的一章. 不像双曲、椭圆和抛物方程已经被研究了几十年, 出版了好多教科书, 自由边值问题的课题只有很少的出版物涉及, 尽管其在现代应用数学中是很重要的. 虽然我们没有做这样的分类, 事实上我们已经遇到过几个这类问题的例子. 例如第 1 章中的薄膜流问题和第 2 章中叙述的激波问题、第 5 章中的接触问题和第 6 章中的多孔介质方程均能称为求解一个在事先未知的区域中的偏微分方程的问题. 不仅是方程的解而且方程定义的区域必须被决定. 通过适当的近似, 我们能够将薄膜流动问题化为关于自由边界形状的微分方程, 而在这个情形中自由边界就是薄膜的表面. 但是所有这些的例子都有这样的特性: 自由边界形状的计算和场方程的求解必须同时进行. 我们将采用这一点作为自由边值问题的定义[132], 而且由于偏微分方程的解几乎从不线性地依赖于求解区域边界的形状, 我们立刻意识到它们不可避免的是非线性问题.

我们很自然地预见这类问题会在自由边界上要求给出比我们至今一直考虑的适定的初值或边值问题要更多的信息. 决定多少额外的信息是必要的, 这是对自由边值问题理论发展的第一个挑战; 在许多实例中, 建模过程对需要给出的正确信息给出了提示, 但并非所有情形都是如此.

这一课题直到最近才融合成一个完整学科的主要原因可以归诸于应用数学向以往缺乏定量分析的科学领域的传播. 这些应用揭示出许多自由边值问题的例子, 我们以列举其中一部分作为开始. 在大多数场合, 场方程的处理与第 3 章的讨论是相同的, 所以在所有情形我们将集中注意力关心在自由边界上发生了什么.

7.1.1　Stefan 问题及相关问题

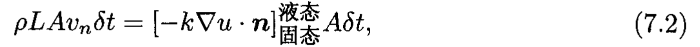
由于 Stefan 问题从金属制造到期权定价应用广泛, 我们以最著名的抛物型方程的自由边值问题作为开始. Stefan 问题最简单的形式是以传导方式来传播热量的连续介质的模型出现的. 所以如 (6.1), 温度 u 满足热方程

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u. \tag{7.1}$$

关键的新因素是允许材料相变, 例如在固定常值温度 $u = u_m$ 发生融化、冻结、蒸

132 曲线缩径方程 (6.88) 可用来刻画曲线的演变, 但我们并不认为它是自由边值问题.

发或凝聚. 因此, 我们需要在自由边界, 即相边界两侧的初始和固定边界条件下解 (7.1). 对融化这个简单情形, 条件是在这种边界上热守恒, 由图 7.1 所示. 对一块小面积 A 的冰, 热守恒得出



$$\rho L A v_n \delta t = [-k\nabla u \cdot \boldsymbol{n}]_{\text{固态}}^{\text{液态}} A\delta t, \tag{7.2}$$

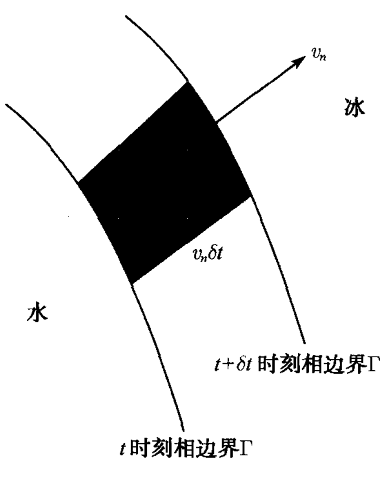


图 7.1 Stefan 条件

其中 v_n 是自由边界垂直于自身的速度, 而 L 是单位质量温度为 $u = u_m - 0$ 的冰转化为温度为 $u = u_m + 0$ 的水所需要的潜热. 因此, 除了从两侧趋向于自由边界 Γ 应给出的 Dirichlet 条件

$$u \to u_m \tag{7.3}$$

之外, 还需给出关于法向导数的 Stefan 条件[133]

$$[k\nabla u \cdot \boldsymbol{n}]_{\text{固态}}^{\text{液态}} = -\rho L v_n. \tag{7.4}$$

注意到, 若将 Γ 写成 $f(x, y, z, t) = 0$, 则 $\boldsymbol{n} = \nabla f / |\nabla f|$ 以及

$$v_n = -\frac{\partial f}{\partial t}\bigg/|\nabla f|. \tag{7.5}$$

条件 (7.4) 就是前面提到的 “额外” 信息; 若 $L = 0$ 且无相变, 我们只需将 Γ 视作 $u = u_m$ 的等温线.

此模型是相当简化的, 我们需要作出几点说明. 首先, 我们并未对是否在液体中 $u > u_m$ 和在固体中 $u < u_m$ 作出说明. 后面我们将看到这些不等式成立与否对模型的数学结构有深远的影响. 第二, 此模型是对实际发生的融化或凝固的粗糙的

133 括号中的变量类似于 1.7 节中我们看到的用另一种方法导出 Rankine-Hugoniot 条件的变量.

简化. 我们忽略了诸如对流、辐射特别是杂质的出现等许多重要的现象. 后者是为什么 u_m 不应该看成是一个给定常数的理由, 可以看到甚至 u_m 的微小改变会戏剧性地改变预测的结果[134]. 虽然如此, Stefan 问题具有数学上的挑战性, 且马上揭示出任何自由边值问题的内在非线性. 甚至场方程 (7.1) 是线性的, 由于它们定义的区域是不同的, 我们从来不能将两个自由边值问题的解叠加希望得到第三个解. 事实上, 对 Stefan 问题我们能作的唯一简化是考虑 "单相" Stefan 问题. 如果, 例如冰是在 $u \equiv u_m - 0$ 处, 水是在 $u \equiv u_m + 0$ 处, 那么显然我们只需考虑 Γ 的一侧, 这可以减轻我们的计算任务. 任何自由边值问题, 解在自由边界的一侧为平凡的, 就称为 *单相* 的.

有许多模型是与 Stefan 问题有联系的[135]. 例如, 设我们忽略比热项即 (7.1) 左端项, 当然仍然保留 (7.5) 中的时间导数项, 也考虑单相问题. 这就得到了黏性流动理论中的 Hele-Shaw *自由边值问题*. 导出这一问题的基本思想如下. 通过泵入或吸出强迫黏性流体通过在位于 $z = 0$, $z = h$ 的两块平板之间狭窄的缝隙中流动, 如图 7.2 所示. 当我们忽略惯性力和平面内的剪力, 仅仅允许发生在垂直于 $z = 0$ 到 $z = h$ 的横向的剪力时, 平面间的两个速度分量 (u, v) 和压力 p 之间关系的方程是相当简单的. 我们有

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

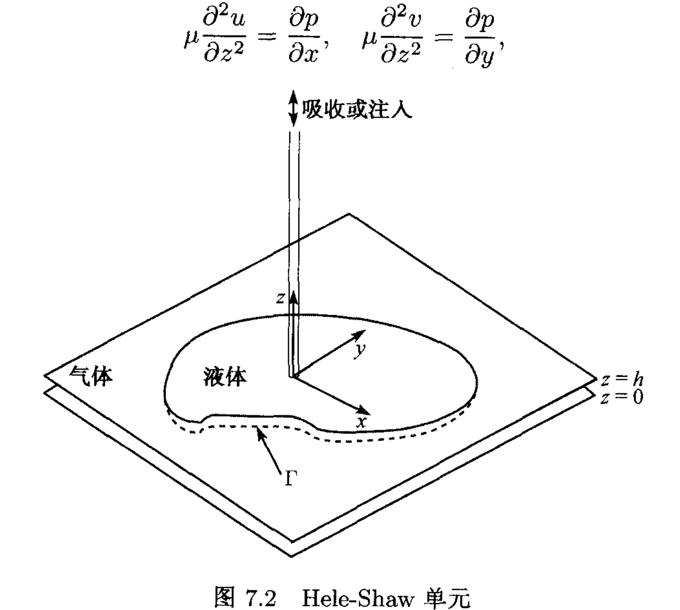


图 7.2 Hele-Shaw 单元

134 这可能正是我们希望的, 因为只要通过加入碳或盐导致成分的微小变化就会使铁变成钢或将结冰的道路变成潮湿的路.

135 一个有趣的例子是具有类型 I 的超导性, 若形状是合适的, 标量磁场 H 满足 Maxwell 方程的抛物形式 (如 (6.11)), Meissner 效应要求在超导区域 $H = 0$, 由磁通量平衡可得 Stefan 条件.

因此

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{2(h-z)}{2\mu}\nabla p, \tag{7.6}$$

其中 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, 质量守恒要求第三个速度分量 w 与 u, v 有如下关系

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{7.7}$$

关于 z 积分 (7.7), 并利用在 $z=0$ 和 $z=h$ 上 $w=0$ 的事实, 从 (7.6) 得

$$\nabla^2 p = 0. \tag{7.8}$$

最后, 设我们从上方向下看单元 (x, y) 平面, 我们看到自由边界 Γ, 如图 7.2 所示. 类似于 (7.3), 由动量守恒可得出沿着 Γ 压力满足

$$p = 常数, \tag{7.9}$$

而质量守恒要求在板的缝隙中 Γ 的法向速度应等于 $(u, v)\cdot \boldsymbol{n}$ 的平均值[136].

因此

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = 常数 \cdot v_n, \tag{7.10}$$

这是 (7.4) 的单相形式. 利用 (7.5) 可以证明: 适当改变 p 的单位, (7.9) 和 (7.10) 可写成

$$\frac{\partial p}{\partial t} - |\nabla^2 p| = 0. \tag{7.11}$$

这是一个简单的练习.

此模型的最大的优点是, 它的一个简单的推广是一个最容易视觉化的自由边值问题: 挤压的两片透明片之间的一滴黏性液体, 如皂液或糖浆, 由于在 $z=h$ 上设 $w = \partial h/\partial t$, 仅将 (7.8) 改变为 Poisson 方程, 其右端有一正比于 $\partial h/\partial t$ 的项. 然而, Hele-Shaw 问题也是将一个金属的工件浸在电解液中被腐蚀成需要的形状的重要的电化学加工过程的模型. 那么若 ϕ 是导电性相对弱的电解液中的电位, 在离开接近工件表面的高密度电荷层, 5.1.2 节的讨论给出

$$\nabla^2 \phi = 0, \tag{7.12}$$

在工件上成立 $\phi = 0$. 而且, 可观察到工件的电解速度正比于局部的电场强度, 因此又有

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 常数 \cdot v_n; \tag{7.13}$$

若沉积发生, 如在电成形的过程中 ϕ 的符号是可以变化的.

---

136 稍后, 我们将在另一流体动力学的内容中看到这些条件. 它们对 Hele-Shaw 单元的合理性从建模的观点来看是有争议的.

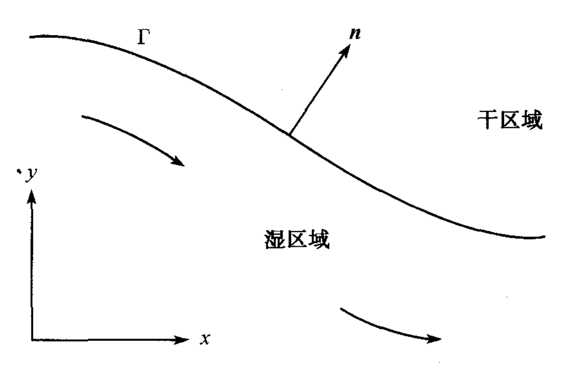


图 7.3 多空介质流

几乎同样的模型出现在无重力的多孔介质流动. 设流动的模型由 5.1.4.4 节建立, 如图 7.3 所示, 多空介质含有一个分隔相邻区域的自由边界 Γ, 在其一侧的孔隙中充满了水, 因此介质是 "湿的", 而在另一侧孔隙完全是干的 (实际中部分潮湿的情形总是发生的, 但只是在很薄的一层中). 对湿的区域的压力我们又一次有 Laplace 方程, 导出 Hele-Shaw 自由边界条件的讨论可再一次重复. 另一方面若重力是重要的, 则取 y 为铅直方向, 在无量纲化后, Darcy 定律为

$$\boldsymbol{v} = -\nabla(p+y), \tag{7.14}$$

那么, 对不可压缩流动

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\nabla^2 p = 0. \tag{7.15}$$

在 p 为零的自由边界处的质量守恒变成

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \nabla p \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{7.16}$$

(见图 7.3)[137]. 由于 $p=0$, 像 (7.11) 一样我们能将条件写为

$$\frac{\partial p}{\partial t} - |\nabla p|^2 = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

一个进一步的推广是设自由边界将两种具有不同黏性系数 μ_1, μ_2 的流体如油和水分开. 那么在没有交界面力例如毛细压力的情况下, Γ 上的动量和质量守恒得出所谓的 Muskat 问题. 若无重力其自由边界条件在适当的无量纲变量下是

$$p_{\text{水}} = p_{\text{油}}, \quad \mu_{\text{水}}^{-1}\frac{\partial p_{\text{水}}}{\partial n} = \mu_{\text{油}}^{-1}\frac{\partial p_{\text{油}}}{\partial n} = -v_n.$$

Hele-Shaw 模型可以作为其单向问题重新得到 (见习题 7.2).

137 两个深度不同的水池被矩形的多孔介质隔开的结构现在很著名, 被称为 坝问题.

7.1.2 扩散中的其他自由边值问题

金融中有一个刻画一类特殊的称为 *美式卖出* (或 *看跌*) *期权* 的定价问题. 它在两方面不同于 6.1.2 节中叙述过的欧式买入期权. 首先, 期权的持有者有权卖出而不是买入特定数量 E; 其次, 卖出可以在最初约定的失效时间之内的任何时刻进行交割, 而不是只能在失效时刻 $t=T$ 进行交割. 这就在建模时引入了一个 “最优交割价格” 的概念而将传统的抛物方程模型改变成自由边值模型, 其中, 自由边界就是最优交割价格作为时间的函数的图形.

假设我们具有美式期权中固有的灵活性. 根据无套利原则, 期权的价值至少应等于交割时的收益. 由于交割可以在任何时刻发生, 据此我们可以推广 (6.10) 以后的讨论. 若 $S<E$, 那么在费用 $-V$ 购置期权并立刻交割得到 $E-S$ 的净结果为 $E-S-V$. 因此, 在假设 “无风险套利” 的情形, 对 $0\leqslant t\leqslant T$, $V\geqslant E-S$, 类似的讨论表明, 必须有 $V\geqslant 0$. 而且, 若 S 下跌至 0, 它依然存在, 且为了得到执行的利益, 持有者显然应立即交割. 因此, 一定有一个股权应立即交割的价值范围 $0<s<s^*(t)$, 在这个范围内, 股权的价值为 $E-S$, 而对 $S^*(t)<S<\infty$, 应满足 Black-Scholes 方程. 因此, 我们寻找

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial^2 S}=r\left(V-S\frac{\partial V}{\partial S}\right)\quad 对\ S^*(t)<S<\infty \tag{7.17}$$

的解, 其中当 $S\to\infty$ 时, $V\to 0$ 以及若在 $t=T$ 期权仍未交割

$$V(S,T)=\max(E-S,0). \tag{7.18}$$

正如前面解释的, 我们并期望

$$V(S,T)\geqslant\max(E-S,0)\quad 对\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{7.19}$$

其中等式仅当 $0\leqslant S\leqslant S^*(t)$ 时成立, 此时, 期权已交割. 这一直截了当的考虑并未给出形如 7.1.1 节中的关于 V 的自由边值问题. 然而, 进一步考虑最优交割策略 (见习题 7.4), 揭示 V 满足自由边界条件

$$V=E-S,\quad \frac{\partial V}{\partial S}=-1\quad 在\ S=S^*(t), \tag{7.20}$$

这两个自由边界条件类似于 Stefan 问题中自由边界上的熔化温度和能量平衡条件.

决定在自由边界上应该指定哪些额外信息的问题, 也可以用燃烧问题中的火焰模型为例加以说明, 通常气体中的重要化学反应仅发生在火焰的尖端. 在我们感兴趣的大多数情形, 火焰尖端的厚度远小于火焰存在的周围环境的尺寸, 因此采用自由边值问题的模型是合适的. 遗憾的是燃烧问题的建模是一个十分复杂的课题, 我

们只能提及两个用自由边值问题来预测火焰的简单例子. 这两种方法的适用性严格地依赖于涉及的反应物质是否事先充分混合, 能够一点 (如被火星) 引燃的, 或是否扩散物质的传输仅仅是为了生成按反应要求比例的混合物.

前一种情形导致 预混合火焰, 理论上它应像 6.7.2 节中那样, 用温度 T 和反应物浓度 c 的耦合方程来建模. 如同 5.11.1 节和 6.6.1 节一样, 导致自由边值问题的关键建模假设是无量纲反应速率应具有形式 $Ace^{-E/T}$, 其中 A 为常数, 无量纲 "活化能" E 是大量, 这意味着除非在 T 接近其最高值, 例如 T_0 (在本模型中是未知量) 处, 反应项可以忽略. 于是可以认为反应仅限制在 T 接近于 T_0 的一个很薄的区域内发生, 但是 c 仍然是可以估计的. 假设只有单纯一维热传导 (当燃烧发生在固体时, 如香烟), 这导致如下模型在火焰的前方, 即 $x > s(t)$, 成立

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{7.21}$$

在火焰的后方, $x \leqslant s(t)$ 成立

$$T = T_0. \tag{7.22}$$

现在我们看到另一单相自由边值问题, 开始出现在 $x > s(t)$, 但暂时我们还不知道 T_0 和当 $x \downarrow s(t)$ 时的 $\partial T/\partial x$.

通过假设质量消耗正比于反应速度, 我们可以取得进展, 接近火焰的区域可以用下式建模

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Ace^{-E/T}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \alpha ce^{-E/T}, \tag{7.23}$$

其中 α 是类似于 A 的常数. 正如 6.7.2 节的讨论指出, 讨论抛物组是不容易的, 因此我们进一步假设, 当 T 接近 T_0, 反应的前端是一个缓慢行波解. 因此, 当我们忽略 $\partial/\partial t$ 并注意到在火焰后方

$$c \to 0, \quad T \to T_0, \tag{7.24}$$

我们可以用相加和积分得到

$$\alpha kT + ADc = \alpha kT_0. \tag{7.25}$$

最后, 用 $e^{-E/T_0}e^{E(T-T_0)/T_0^2}$ 近似 e^{-E/T_0}, 与 6.6.1 节中一样, 我们可积分

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{D}e^{-E/T_0}(T_0 - T)e^{E(T-T_0)/T_0^2} = 0$$

一次, 并再次利用 (7.24) 和 $T - T_0$ 在火焰前方为负的和相对而言是较大的, 从而得到

$$-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=s(t)} = \sqrt{\frac{2\alpha}{DE}}T_0e^{-E/2T_0}. \tag{7.26}$$

这与 (7.22) 一起给出了第二个条件, 但 T_0 仍然是未被确定的, 我们将在 7.5.1.1 节再次回到这一问题.

当周围的可燃烧物质不是充分混合好时, 情形就十分不同了. 假设只有两种反应的组分, 比如浓度为 c_1 的燃料和浓度为 c_2 的氧气, 且当它们扩散至对方时, 反应才会发生. 对 "快速" 反应, 在火焰的 "燃料" 一侧, 氧的浓度可以忽略, 反之亦然. 我们只需要在火焰的两侧解 c_i 的扩散方程, 在火焰上 $c_1 = c_2 = 0$. 而且因为所有的化学反应都发生在自由边界上, 可在自由边界建立理想配比条件. 这是一种行话, 因为按固定比率的化学反应 (如两个氢原子和一个氧原子组合成水) 与在火焰上化学物质被消耗的速度是互成正比的. 因此, 两种物质流之间成立线性关系

$$\frac{\partial c_1}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial c_2}{\partial n},$$

其中 λ 是常数, 这里 *扩散火焰模型* 与 Muskat 问题是不同的.

通常由于有对流出现, 气体中的火焰模型更为复杂, 这是由于热和质量扩散方程的强耦合以及会出现熄灭等现象, 或因为压缩性的出现会导致如 2.5.3 节中讨论的爆炸、爆燃过程等现象.

不那么戏剧性的扩散会导致 "温和" 的自由边值问题, 在这种问题中, 自由边界条件甚至不明显地出现在模型的表述之中. 事实上, 我们已经在导出多孔介质方程 (6.72) $\partial p/\partial t = \nabla \cdot (p^n \nabla p)$ 模型时遇到过这种情形. 我们默认假设压力 p (或薄膜厚度, 若它是因变量) 为正的. 然而, 不难想象, 成立 $p > 0$ 的活动区域邻接一个成立 $p \equiv 0$ 的不活动区域. 现在, $p \equiv 0$ 是 (6.72) 的一个解. 这就提出如下问题: "设我们有一个初值问题, 初值在某个区域为零而在其余地方是严格正的, 解代表 $t > 0$ 情形的方程并希望自由边界分离湿润过程中的活动和不活动的区域是否有意义?" 严格地讲, 这个问题的数学回答是否定的, 除非 p 的导数能使得 $\nabla \cdot (p^n \nabla p)$ 在自由边界上为零, 只有在这种情形 (6.72) 的左端和右端才会在自由边界上相等. 一切问题都集中到解的光滑性上, 后面在对多孔介质方程的讨论中, 我们必须聚焦于此.

另一有趣的情形发生在 *耗氧问题*, 由于化学作用从生物肌肉中消耗的氧的速度与肌肉剩余的氧量无关, 只要氧量为正. 关于氧的浓度 c 的一个非常简单的一维模型是

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -1, \tag{7.27}$$

初看这是 6.6 节研究过的反应扩散问题的线性模型. 然而, 简单的解 $c(x,t) =$ 常数 $-$ t 表明, 我们必须十分小心满足物理上要求的 $c \geqslant 0$. 因此, 沿着本章早些时候建立的模型的路线, 我们可以提一个单相自由边值问题模型, 如在 $c > 0$ 的区域和 $c \equiv 0$ 的邻接, 而 (7.27) 只在 $c > 0$ 的区域成立. 两个自由边界条件分别是 $c = 0$ 和由质量守恒得到的 $\partial c/\partial x = 0$. 然而按照第 6 章的另一个方法是将 (7.27) 的右端项用

$-H(c)$ 代替, 其中

$$H(c)=\begin{cases}1, & c>0,\\ 0, & c\leqslant 0\end{cases}$$

为 Heaviside 函数, 显然是关于 c 的非线性函数[138]. 这两种方法的关系导出另一类似于联系多孔介质方程和美式期权时产生的数学问题. 我们将会看到其解决依赖于抛物形方程的弱解理论.

7.1.3 力学中的某些自由边值问题

在第 2 章中我们已经遇到过一个已被充分研究的自由边值问题, 即可压缩流中的激波问题. 回忆起那时讨论的最困难的问题是唯一性问题, 无论对经典解或弱解都是如此. 在两种情形中, 我们发现为了得到物理上能够接受的唯一解, 我们必须对 Rankine-Hugoniot 条件添加额外的约束, 尽管这些关系式已经包含了保证在指定区域中 Cauchy 问题有光滑解的附加方程. 例如, 对简单的模型

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{7.28}$$

具有 Cauchy 数据 $u(x,0)=u_0(x)$, 大量信息表明除了 Rankine-Hugoniot 条件外不能指望其他条件可以决定激波的位置 $x=s(t)$. 然而, 在 1.7 节末中的讨论告诉我们 Rankine-Hugoniot 条件给了我们太多的自由, 为了得到唯一的物理上可以接受的解, 必须加上进一步的限制.

记住这一点, 我们进一步列举一些力学中的自由边值问题.

7.1.3.1 *流体动力学*

自由边值问题的一个古老的来源是有一个 "自由曲面" 的连续体力学, 它在力学中往往意味着 "无应力" 曲面. 最简单的情形发生在无旋无黏流体动力学, 例如作为模型, 水在一个大气压下的运动, 除了一个常数压力以外没有其他应力. 那么, 在没有表面张力的情形, 动量平衡要求水的压力等于气压. 在第 9 章中我们会说明它是 (2.5), (2.6) 拓广到依赖时间的一个推论. 为说明这一点, 当 ρ 为常数时 p 在水中各处由 Bernoulli 方程

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+gy+\frac{\partial\phi}{\partial t}=\text{常数} \tag{7.29}$$

决定, 其中 y 是铅直坐标, ϕ 是速度势, 它满足 Laplace 方程. 因此, 若记水表面为 $y=\eta(x,t)$, 那么对二维问题

$$\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+g\eta+\frac{\partial\phi}{\partial t}=\text{常数}, \tag{7.30}$$

138 这是更一般的化学反应中的 "死核" 问题的特殊情形, 如 5.11.3 节末所述, 这种问题中 (7.27) 的右端正比于 c^p.

在 $y=\eta$ 上成立.

我们也知道, 不管在 $y=\eta$ 上是否无应力, 都没有流体粒子可以穿过曲面, 即

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=v_n, \tag{7.31}$$

其中 v_n 是沿曲面法向的速度. 利用 (7.5), 我们有第二个自由边界条件

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{7.32}$$

在 $y=\eta$ 成立. 通过无量纲化, (7.30) 变成

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+\frac{1}{F}\eta=\text{常数}, \tag{7.33}$$

其中 F 是一个无量纲数, 称为 Froude 数, F 的值越大, 流体的惯性相对于重力的效应越大.

我们已经看到了从气体动力学进行 "技术变换" 的机会. 因为若我们用密度为 $\rho'\neq\rho$ 的第二种作用的无旋无黏流体代替大气, 我们能不能将自由曲面视为 "激波", 直接导出 (7.30)~(7.32)? 说到底, 流体力学方程组是来源于守恒律的一种表述, 虽然我们采用变量 ϕ 后忽视了这一点. 无论如何, 问题的回答是肯定的, 因为质量守恒

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{7.34}$$

的 Rankine-Hugoniot 条件是 $[\rho]v_n=[\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]$, 当 $\rho'=0$ 以及 $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$ 时, 它推出 (7.32)[139].

这种最简单的无黏自由面流动类型, 事实上是唯一的类型, 可以考虑显式解得是流动为定常的, (7.33) 中的 F 为无穷的情形. 不失一般性, 此时 Laplace 方程的自由边界条件变为

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0,\quad |\nabla\phi|=1, \tag{7.36}$$

139 对三维动量守恒方程, 我们不得不将其写成下标形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij}+\rho u_iu_j)=0, \tag{7.35}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_i)$, δ_{ij} 是单位矩阵, 我们有

$$[p\boldsymbol{n}+\rho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{u}]=[\rho\boldsymbol{u}]v_n,$$

当 $g=0$ 时, 它推出 (7.33), 也注意到 $\rho\neq\rho'$ 不等于 0 时, (7.32) 和 (7.35) 亦允许如下的可能

$$[\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]=0,\quad [\rho]=0,\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=v_n,$$

这就是我们在脚注 25 中所称的接触不连续性, 并由 (7.37) 说明的.

我们得到所谓 Helmholtz 流[140].

一个有趣的复杂化是对这类无黏流引入两相问题, 允许穿过自由边界时, 甚至是穿越一个密度无间断的自由边界时, 有相对的切向运动发生. 此时, 我们有所谓的 *涡片*, 在它两侧关于速度势的自由边界条件是

$$\frac{1}{2}|\nabla\phi_1|^2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial t} = \frac{1}{2}|\nabla\phi_2|^2 + \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + \text{常数}, \tag{7.37}$$

这是法向的动量守恒, 以及质量守恒

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = v_n. \tag{7.38}$$

其他的可能性发生在考虑 *旋转无黏流*, 在稳定的二维情形, 我们已经在 5.1.1 节看到流函数 $\psi(x,y)$ 满足

$$-\nabla^2\psi = f(\psi), \tag{7.39}$$

其中 $f(\psi)$ 是速度, 它通常是未知的函数, 然而经常有实验数据表明速度是局部化在一个区域中的, 此时 f 是一个紧支集的函数. 此时要提的问题就是在此区域的边界应提什么自由边界条件[141]. 如同对自由曲面流, 没有粒子可穿过自由边界 Γ, 因此在稳定流中 Γ 是 ψ 的一条等高线, 而且 ψ 在 Γ 上是连续的[142].

即使没有引入黏性, 列举的这类问题已经足够多了. 黏性的引入会导致相当大的代数复杂性 (见习题 7.6). 我们最后的例子来自固体力学.

7.1.3.2 固体力学

无应力边界在固体力学中也是广泛存在的. 但幸好许多弹性体仅仅发生很小的变形, 以致他们的自由曲面可视作是位置固定的. 这就使得前面提到的线性弹性理论成为适用的. 但有一种情形, 即使是小位移, 非线性也是无法避免的, 这种情形发生在两弹性体接触时. 虽然在光滑接触表面的横向位移可以作为问题的资料, 但接触区域的周界是未知的自由边界. 我们已经在 5.1.6.2 节和 5.9.5 节遇到过这些问题. 但因为当时我们只考虑二维的构架, 接触的周界由离散点构成. 我们已经说明, 它们的位置可以用邻近的适当的奇性条件来决定, 诸如 (5.151) 的方程解释了问题的非线性性质. 在三维弹性接触问题中揭示出同样的维数缺失, 类似的低阶问题是求二维接触集的一维的周界. 在本章之末我们将回归到这一 "余维数 2" 的自由边界的话题, 但是有一特殊情形相对容易建模, 导致常规的 "余维数 1" 的自由边值问题. 这是当一个边界是刚性和光滑[143]的, 而另一弹性体是薄的和伸展得足够大而可以用膜来建模的情形, 如图 7.4 所示.

---

140 这种自由边界条件也发生在某些简单的火焰传播模型[7].

141 确切地, 同样的问题产生在我们对长管中的等离子体 (一种电离气体) 的磁限建模.

142 我们还是必须等到第 9 章来解释 Bernoulli 条件.

143 若接触体是粗糙的, 那就提出了决定另一有趣的自由边界的问题, 即决定滑动区域和粘连区域的边界.

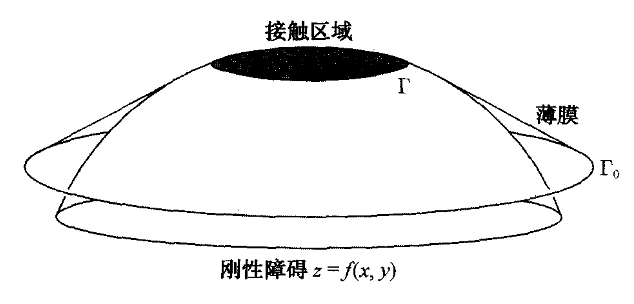


图 7.4　弹性薄膜问题

于是, 我们有所谓的 *障碍问题*. 若膜是张紧在固定的固界 Γ_0 上, 且当它与刚性障碍 $z=f(x,y)$ 接触时只有小的扰度, 此问题是容易表述的. 如同 5.1.4.2 节中一样, 当平衡时, 横向位移 $u(x,y)$ 在不接触处, 即 $u>f$ 时满足

$$\nabla^2 u=0, \tag{7.40}$$

否则成立 $u=f$, 且我们有一个接触区域的自由边界 Γ. 显然在 Γ 上成立 $u=f$, 我们又一次遇到我们熟悉的在其上需要提什么额外信息的问题. 这一情形是足够简单的, 我们立刻看到, 只有当在 Γ 附近张力 T 是连续的, 力 $T\nabla u\cdot\boldsymbol{n}$ 在两侧趋向时相等才能达到平衡. 这与通过达到平衡导出 (7.30) 是相同的, 但自由边界是曲线而非曲面, 因此自由边界条件简化为

$$u=f \tag{7.41}$$

和

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla u=\boldsymbol{n}\cdot\nabla f. \tag{7.42}$$

这些条件类似于我们在第 5 章所述的接触或狭窄裂缝时所提的奇性条件. 其他自由边值问题 (但不是无应力边界) 来自于弹塑性变形, 其中塑性流动的边界是有待于决定的, 以及包括断裂和滑动的其他不同类型的固体力学问题.

现在我们继续用我们的标准过程叙述数学概念, 用这些概念来分析上述问题, 有时可以求解. 我们从适定性讨论开始, 和第 4~6 章的适定性讨论相比, 会有一些令人吃惊的地方.

7.2　稳定性和适定性

正如已经提到, 自由边值问题不可避免的非线性造成了它们比前三章我们集中研究的线性方程更难进行数学分析的特点. 唯一仍然适用的一般方法是在一个我们足够幸运而得到的平凡的显式解附近研究系统的响应. 事实上, 讨论一般二阶方程的定性性质时我们就是采用这样的方法, 在第 2, 3 章, 有时我们将非线性方程的

系数 "冻结" 在某个给定的常值, 用得到的线性方程作为其局部性态的描述. 我们希望这样的研究至少可以告诉我们这样的模型在小扰动下的鲁棒性. 现在我们将这样的思想用于自由边值问题.

在开始之前, 我们先说明应用数学中的小扰动理论的系统应用依赖于渐近展开的概念, 经过深思熟虑本书决定避开这一点. 但在本章的余下部分我们作如下约定. 用记号 $A \sim B$ 表示当 $\varepsilon \to 0$, $A/B \to 1$. 与通常一样我们用例如 $O(\varepsilon)$ (粗糙地说与 ε 同样大小) 或 $o(\varepsilon)$ (远比 ε 小) 来量化差 $A - B$, 详见 [22].

我们的过程, 经常称为 *线性稳定性理论*, 遵循 5.1.1.3 节中引入的又在 6.6.4 节中进一步应用的概念. 为简单起见考虑一维问题, 设我们知道场方程的一个显式解与自由边界相容, 然后我们求自由边界关于 ε 具有渐近展开

$$x = s(t;\varepsilon) \sim s_0(t) + \varepsilon s_1(t) + \cdots \tag{7.43}$$

的解, 其中 ε 是度量所考虑的扰动大小的一个小参数. 由于自由边界条件是在 $x = s(t,\varepsilon)$ 上验证的, 它们也可以作渐近展开, 典型地我们可将任何函数 $f(x,t)$ 在自由边界上的值写为

$$f(s(t;\varepsilon),t) \sim f(s_0(t),t) + \varepsilon s_1 \frac{\partial f}{\partial x}(s_0(t),t) + \cdots. \tag{7.44}$$

因此, 当我们将场方程的解写作

$$u(x,t;\varepsilon) \sim u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x,t) + \cdots,$$

我们发现

$$u(s(t;\varepsilon),t;\varepsilon) \sim u_0(s_0(t),t) + \varepsilon\left(u_1(s_0(t),t) + s_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial x}(s_0(t),t)\right) + O(\varepsilon^2). \tag{7.45}$$

记住不要漏掉中大括号中的两项.

现在 u_0 是已知的, 假设允许 $O(\varepsilon)$ 独立地等于 0, 那么边界条件不仅关于 u_1 是线性的, 而且是在已知的边界 $s_0(t)$ 上计算. 因此, 对 u_1 的计算可以沿用前三章的方法. 遗憾的是, 我们难以对原来的自由边值问题有足够的了解从而判断将 ε 的系数略去为 0 或用 $u_0+\varepsilon u_1$ 代替原来的解是否严格. 但是我们不会被这一事实所困扰, 因为从以下的例子我们可以看到, 这样线性化近似预测的结果和许多物理上的证据吻合得相当好. 令人惊奇的是, 当考虑不同的 u_1 问题时, 我们发现自由边值问题比前几章考虑过的问题远远不稳定和病态. 更有意思的例子是高于一维的问题, 因此我们要拓广 (7.45) 说明函数 $u(x,y,t;\varepsilon)$ 在自由边界 $x = s(y,t;\varepsilon) \sim s_0(t)+\varepsilon s_1(y,t)+\cdots$ 上的值是由

$$\begin{aligned} u(s(y,t;\varepsilon),y,t;\varepsilon) &\sim u_0(s_0(t),y,t) \\ &\quad + \varepsilon\left(u_1(s_0(t),y,t) + s_1(y,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}(s_0(t),y,t)\right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

给出的. (在以下的例子中, 我们将遵循未扰动交界面是 $y=0$ 的习惯, 这将不会引起混淆.)

7.2.1　表面重力波

一个经常见诸于文献的例子是在零解 $\phi=0$, $\eta=0$ 附近考虑关于速度势的方程在 $y<\eta(x,t)$ 满足 (7.32) 和 (7.33) 的解 (不失一般性, (7.33) 中的常数可取为 0). 为帮助计算, 如同 (7.43) 一样我们引入一个小参数, 记

$$\phi=\varepsilon\phi_1,\quad \eta=\varepsilon\eta_1,$$

得到

$$\nabla^2\phi_1=0\quad 在\ y<\varepsilon\eta_1\ 中\tag{7.46}$$

以及

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}-\frac{\partial\eta_1}{\partial t}\right)+O(\varepsilon^2)=0\tag{7.47}$$

和

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{F}\eta_1\right)+O(\varepsilon^2)=0\tag{7.48}$$

在 $y=\varepsilon\eta_1$ 上成立. 作了上述近似, 并用在 $y=0$ 上

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=\frac{\partial\eta_1}{\partial t},\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial t}+\frac{1}{F}\eta_1=0\tag{7.49}$$

代替自由边界条件. 通过交叉求导得到, 在 $y=0$ 上

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}+\frac{1}{F}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}=0,\tag{7.50}$$

得到关于位势 ϕ_1 在 $y<0$ 的一个非常规边值问题. 关于时间的二阶导数的出现意味着这一问题并不在第 4~6 章的框架之内. 因为此时间的导数关于时间是不变的, 当未扰动的解与时间无关时总是如此, 因此可以寻求 $\cos\lambda t$ 和 $\sin\lambda t$ 的 Fourier 迭加作为解, 其中 λ 为常数. 如果令

$$\phi_1(x,y,t)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\widetilde{\phi}_1(x,y))$$

事情就简单了. 接着求 λ, 得到 $\widetilde{\phi}_1$ 的非平凡解. (7.46) 和 (7.50) 无强迫项表明要求关于 λ 的特征值问题. 并启示当且仅当至少某些特征值有负虚部时, 这种问题是 (线性) 不适定的. 在这种情况下, 任意小的空间扰动都会引起关于时间的指数增长. 同样, 若所有特征值都有正虚部, 我们认为问题是 *线性稳定* 的. 当然, 为了得到特征值问题, 我们必须将关于 ϕ 的模型封闭. 因此, 我们需要其他的边界条件来刻画

流体的状况. 为简单计, 设它是一直延伸至 $y=-\infty$ 以及 $-\infty<x<\infty$, 且在远离表面处它是静止的.

实现这一过程, 我们得到 ϕ_1 满足

$$\nabla^2\widetilde{\phi}_1=0, \tag{7.51}$$

并在 $y=0$ 上满足 Robin 条件

$$-\lambda^2F\widetilde{\phi}_1'+\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial y}=0 \tag{7.52}$$

和有界性条件, 当 $y\to-\infty$ 时

$$\widetilde{\phi}_1\to 0.$$

我们记得在 5.2.1 节中指出 Robin 条件的符号对确定方程的解是否唯一是至关重要的, 在此若 λ 为实数, 这样的符号使 $\widetilde{\phi}_1=0$ 可能不是 (7.51) 和 (7.52) 的唯一解. 事实上用分离变量法我们很快发现存在非零解

$$\widetilde{\phi}_1=\mathrm{Re}(A(k)\mathrm{e}^{ky\pm\mathrm{i}kx}),$$

其中 $A(k)$ 是 k 的任意函数, 只要 $\mathrm{Re}k>0$ 以及

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{k}{F}}. \tag{7.53}$$

物理学上这对应于波列在 η 正比于 $\mathrm{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm kx+\lambda t)}$ 的自由边界上, 所以波速为 λ/k, 假设其为实数. 注意到仅当 k 为实数时, 当 $|x|\to\infty$, $|\nabla\widetilde{\phi}_1|$ 有界. 因此, 仅当特征值 λ 为实数时, 我们才有物理上可以接受的线性化水波方程的 "特征解", 它对应于第 5 章中的所谓连续谱. λ^2 必须为正的事实增强了我们关于唯一性叙述的论据.

因此, 具有水平表面的静止的水是中性稳定的. 结果 (7.53) 通常称为*色散关系*, 因为它将波长的扰动 $2\pi/k$ 与由 λ 刻画的时间性态联系起来了. 我们可以用迭加形如 $A(k)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}t\sqrt{k/F}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{ky}$, k 甚至可以是复值来生成 Cauchy 问题, 即 (7.46) 和 (7.50) 的初值问题的解, 这对应于关于 x 做 Fourier 变换. 我们必须小心地给出这样问题的初始条件, 对自由曲面流, 由于在自由边界条件中出现时间的二阶导数, 我们需要给定初始位势和表面的方程.

7.2.2 涡片

前节的方法适用于许多无黏流体的自由边界流动, 考虑毛细波、流动流体中的波或有限深度的效应. 在此我们给出另一种应用于不考虑重力的, 分离两种密度相

同的, 分别以速度 $(U_\pm, 0)$ 平行流动的两种位于 $y>0$ 和 $y<0$ 的无限流体的涡片的稳定性. 这时我们必须求解两个位势和自由曲面

$$\phi^+ \sim U_+x+\varepsilon\phi_1^+ +\cdots,\quad \phi^- \sim U_-x+\varepsilon\phi_1^- +\cdots,\quad \eta\sim\varepsilon\eta_1+\cdots,$$

由 (7.38) 和 (7.37), 在 $y=0$ 上, 线性化的自由边界条件为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi_1^+}{\partial y}=\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+U_+\frac{\partial\eta_1}{\partial x},\quad \frac{\partial\phi_1^-}{\partial y}=\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+U_-\frac{\partial\eta_1}{\partial x},\\ &\frac{\partial\phi_1^+}{\partial t}+U_+\frac{\partial\phi_1^+}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1^-}{\partial t}+U_-\frac{\partial\phi_1^-}{\partial x}.\end{aligned}$$

记

$$\phi_1^+=\mathrm{Re}A_+(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda t+kx)}\mathrm{e}^{-ky},\quad \phi_1^-=\mathrm{Re}A_-(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda t+kx)}\mathrm{e}^{ky},$$

其中 $\mathrm{Re}k>0$, 并设 $U_+\neq U_-$, 不久我们将看到色散关系是

$$\lambda=\frac{k}{2}(-(U_++U_-))\pm\mathrm{i}(U_+-U_-).$$

当 ϕ 的位相是 $\lambda t-kx$, 我们得到类似的结果

$$\lambda=\frac{k}{2}((U_++U_-)\mp\mathrm{i}(U_+-U_-)).$$

因此, 若我们要求 k 是实的, 所以 $|\nabla\phi^\pm|$ 在无穷远处是有界的, 任何在涡片上的波列不管是否 $U_+\neq U_-$ 都是随时间指数增长的. 这种情形几乎与 (病态的) 倒向热传导方程一样糟糕, 因为当 $k\to\infty$, $|\lambda|=O(k)$, k 越大 (即波长越短), 关于时间的增长率越大. 虽然不及倒向热方程时的 $O(k^2)$ 增长得厉害. 这是我们试图预测呈现不适定性的自由边值问题随时间的演变时的第一个遭遇. 当我们用例如关于 x 的 Fourier 变换求解具有初始条件 $\eta_1(x,0)=\eta_{10}(x)$ 的关于 $\phi_1^\pm$ 和 η_1 的初值问题时, 灾难性的后果就可以看到了. 例如, 对 η_1, 得到的解包含如下的项

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\eta}_{10}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(k)t}\mathrm{d}k,$$

即使 η_{10} 具有很好的性质, 例如当 $|k|\to\infty$, $\widehat{\eta}_(10)=O(\exp(-\alpha|k|))$, 此时积分当 $t\geqslant 2\alpha/|U_+-U_-|$ 时就发散了. 换言之, 甚至对十分光滑的初始资料, 像 6.4.2 节中的倒向热传导方程一样, 有限时间的破裂可以在任意短的时间内发生. 为强调说明这种情形的发生是很频繁的, 我们现在再叙述另一个典型问题的线性稳定性分析.

7.2.3 Hele-Shaw 流

对于 7.1.3 节中叙述过的单相 Hele-Shaw 问题. 我们不难看到存在一个自由边界是直线的精确的行波解. 为简单计, 当我们取自由边界条件为 $p=0$ 和 $\partial p/\partial n=-v_n$

时, 只要压力梯度为 V 它是

$$p(x,y,t) = -V(x-Vt) \quad 对\ x < Vt.$$

因此, $V<0$ 表示自由边界在流体吸收的作用下向后退, 而 $V>0$ 表示自由边界是向前进的、由常规的线性化过程得

$$p(x,y,t) \sim -V(x-Vt) + \varepsilon p_1(x,y,t) + \cdots,$$

自由边界为

$$x \sim Vt + \varepsilon\eta_1(y,t) + \cdots,$$

导出对 $x < Vt$

$$\nabla^2 p_1 = 0,$$

和线性化边界条件

$$\varepsilon(p_1 - V\eta_1) + O(\varepsilon^2) = 0$$

以及在 $x = Vt + \varepsilon\eta_1 + O(\varepsilon^2)$ 上

$$\begin{aligned} V + \varepsilon\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + O(\varepsilon^2) &= -\boldsymbol{n}\cdot\nabla p \\ &= -\left(1, -\varepsilon\frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right)\cdot\left(-V + \varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial x}, \varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial y}\right) + O(\varepsilon^2) \\ &= V - \varepsilon\frac{\partial p_1}{\partial x} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

因此, 取最低阶项得在 $x = Vt$ 上成立

$$p_1 = V\eta, \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial t}.$$

现在时间明显地出现在线性化问题的边界的位置中. 在我们求一个正比于 t 的指数的解前, 必须定义一个行波变量 $\xi = x - Vt$. 由此得

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad 在\ \xi < 0, \tag{7.54}$$

且在 $\xi = 0$ 成立

$$p_1 = V\eta_1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \eta_1}{\partial t}.$$

因此, 若假设在物理地面上当 $\xi \to -\infty$ 时 $|\nabla p_1|$ 是有界的. 那么必须有 $p_1(\xi,y,t) = \mathrm{Re}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda t \pm ky)}\mathrm{e}^{k\xi}$ 对 $k > 0$ 成立, 且

$$\mathrm{i}\lambda = -kV. \tag{7.55}$$

因此, 从 “吹”, 即 $V > 0$, 到 “吸”, 即 $V < 0$, 我们有一个从适定到不适定的戏剧性的开关.

我们指出 Hele-Shaw 类比说明：单相 Stefan 问题若超冷 (液体温度低于 u_m) 或超热 (固体温度高于 u_m) 是不稳定的; 在这两种情形, 不稳定边界都朝活动的相的方向后退. 遗憾的是因为问题的代数复杂性太大, 我们无法叙述二维的稳定性分析来验证我们的结论.

最近的两个例子使我们认识到虽然在第 4~6 章遇到的所有的偏微分方程是在适定的先决条件的概念下被认为是可以进行数学研究的, 而自由边值问题将我们引入了另一个世界. 如果稳定性的讨论是可信赖的, 那么不适定和适定问题有一样多的可能是在数学上可以进行研究的. 事实上, 7.1 节中叙述的许多问题, 只是根据其自由边界传播的方向或驱动机制的符号而改变其稳定性的特征. 我们可以看到改变 (7.53) 中的符号相当于颠倒了重力或倒置一杯水, 同样的事在扩散问题中也经常发生.

7.2.4　激波

同样有趣甚至更有意义的稳定性分析来自简单的双曲型方程 (7.28),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{7.56}$$

我们考虑对一维行波

$$u = \begin{cases} U_+, & x > Vt, \\ U_-, & x < Vt \end{cases} \tag{7.57}$$

的小扰动, 其中自由边界即激波具有满足 Rankine-Hugoniot 条件的速度 V

$$V = \frac{1}{2}(U_+ + U_-). \tag{7.58}$$

在 $x > Vt + \varepsilon s_1(t) + \cdots$ 和 $x < Vt + \varepsilon s_1(t) + \cdots$ 分别令 $u \sim U_\pm \pm \varepsilon u_1^\pm + \cdots$, 取最低阶得到场方程的线性化扰动

$$\frac{\partial u_1^\pm}{\partial t} + U_\pm \frac{\partial u_1^\pm}{\partial x} = 0.$$

因此

$$u_1^\pm(x,t) = \mathrm{Re} A_\pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_\pm (t - x/U_\pm)}, \quad A_\pm = 常数.$$

Navie 变换说明, 只要

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_- t(1 - V/U_-)} + A_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_+ t(1 - V/U_+)}). \tag{7.59}$$

$u_1^{\pm}$ 满足扰动的 Rankine-Hugoniot 条件. 因此, 似乎 $\lambda_{\pm}$ 的任意值, 实的或复的都是允许的! 事实并非如此, 要看清这一点必须回到我们稳定性分析的基本观点, 如下所示.

到目前为止, 我们满足于写出自由边界受到微小合理的空间扰动, 特别是调和的扰动, 然后求出由此空间扰动引起的时间性态而得到的解. 在某些场合我们走得更远, 讨论如果初值条件和非扰动的初值条件有差别将会产生什么后果. 所有这些问题由空向和时向特征解的迭加, 原则上都是可解的, 虽然我们看到可能会发生破裂. 为得到一个 Fourier 积分解我们要做的是用足够的初始资料去保证唯一性, 即与模型中的时间导数阶数一样多的信息. 然而当采用这样的方法于双曲方程 (7.56) 时看到, 我们甚至不能从 (7.59) 决定 s_1, 除非沿着线性化问题的特征传播的波 $e^{i\lambda_{\pm}(t-x/U_{\pm})}$ 在不摄动的自由边界上 $x=Vt$ 仍然是有效的. 事实上若我们没有作出 (7.56) 的特征与激波的相对位置是如图 7.5(a) 而不是如图 7.5(b,c,d)[144]那样的隐含的假设, 我们无法写出 (7.59). 从另一途径, 若我们生活在一个受发射新信息的激波强烈影响的世界, 我们就只能接受图 7.5(b,c,d); 只有对图 7.5(a) 从我们的气体动力学模型可以预测自由边界的演变. 在这种情形, 自由边界能与任何从两边与它接触的谐波随时间的演变同步, 在这个意义下它是稳定的.

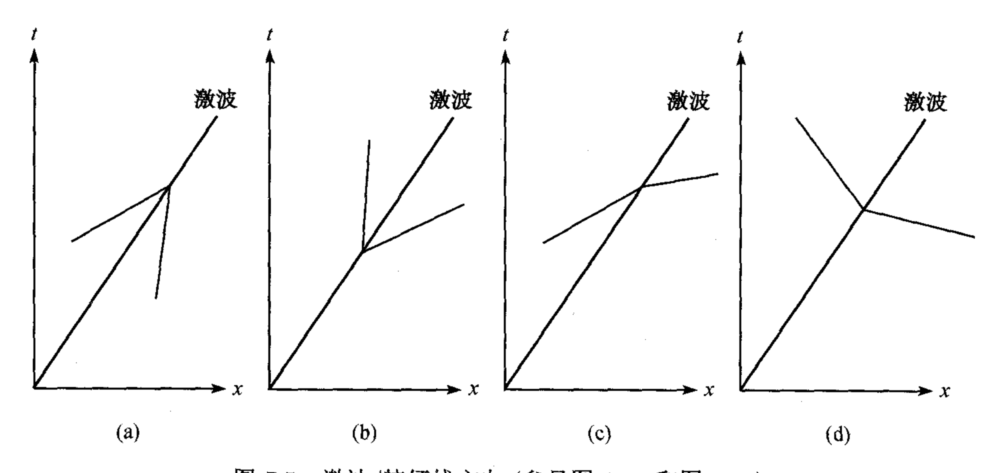


图 7.5 激波/特征线方向 (参见图 2.11 和图 2.12)

激波可以作为气体动力学中稳定的粘连的自由边界存在多年来已是一个众所周知的事实. 这也是为什么我们早在本书 1.7 节就将其引入的原因. 与大多数自由边值问题一样, 除了某些简单的情形, 计算机是预测激波性态的主要工具.

虽然我们没有考虑所有模型的稳定性和适定性, 但上述例子说明了我们可能会遇到的不同性态的类型. 我们可以总结如下, 在 Hele-Shaw 流的特殊化基础上, 若

144 事实上在第 2 章我们讨论因果律时已经遇到过这种情况.

超冷和超热都不发生, Stefan 问题是适定的. 对 (7.16) 和 (7.19) 进行稳定性分析 (见习题 7.20) 说明, 当潮湿区域是在自由边界下方时多孔介质的自由边值问题是适定的, 否则就是不适定的, 除非自由边界沿铅直方向移动, 若自由边界以足够快的速度向下移动时, 甚至潮湿区域在自由边界上方仍然是稳定的. 然而对火焰和接触问题, 由于稳定性分析是十分复杂的, 尚未有一般的结论.

上述分析方法, 可以用不同的渐近方法特别是弱非线性稳定性方法显著地改善. 但是这种改善不能掩盖自由边值问题明显的是不适定的本质. 我们说 "明显" 是因为我们的例子已经给出一个印象: 线性不稳定性与不适定是同义的. 但必须记住这些概念之间的关系强烈地依赖于时间增长率 λ 和 $2\pi/k$ 波长之间的色散关系. 甚至若对所有 k, λ 为正, 它可以如此微弱地依赖于 k 致使 7.2.1 节提到的变换过程可以对所有 $t>0$ 都是收敛的. 对成立的 $F<0$ 表面重力波就是这种情形.

很清楚, 现在已经到了对少数某些自由边值问题适用的可以严格验证的理论进行叙述的时候. 我们可以把分析经典自由边值问题, 即场方程和自由边界条件点点满足的边值问题的方法作为开始.

7.3 经 典 解

7.3.1 比较方法

有时自由边界的位置和解的大小的信息可以从比较方法得到. "稳定" 的单相 Stefan 问题就是这种情况. 为简单起见, 在 (7.1) 和 (7.2) 中我们取 $u_m=0$, 其他系数均为 1. 直观地, 我们作如下讨论: 考虑两个解 u_1, u_2, 成立 $u_1 \geqslant u_2 \geqslant 0$, 使得在某一时刻 u_1, u_2 在 Ω_1, Ω_2 上分别成立, 其中 $\Omega_2 \in \Omega_1$ 且在 Ω_2, $u_1 > u_2$ (见图 7.6).

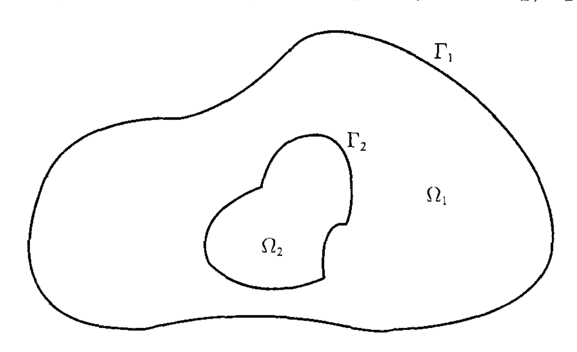


图 7.6 与自由边界的比较

现设, 在以后某时刻, 扩张的自由边界 Γ_2 赶上了 Γ_1, 因此 $u_1=u_2=0$ 在某些自由边界触及的点成立, 我们设在这些点处自由边界是光滑的. 由 6.3 节中叙述的抛

物型方程的强极值原理, Ω_i 的法向速度记为 v_{ni}, 满足

$$v_{n1} = -\frac{\partial u_1}{\partial n} > v_{n2} - \frac{\partial u_2}{\partial n},$$

与赶上的假设矛盾. 注意到对 "不稳定" 的问题, 即 $\Omega_1 \in \Omega_2$ 但 $u_1 \leqslant u_2 \leqslant 0$, 上述讨论完全失效, 在这种情形, 边界可能交叉. 这种不规则的形态与 Hele-Shaw 问题的吸入情形不稳定状况是一致的, 这种情形是 Stefan 问题超冷的一个特殊情形.

7.3.2 能量方程与守恒量

尽管问题是非线性的, 但是通过积分可以获得某些信息. 例如, 对一维多孔介质方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^n \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

带有初始条件

$$u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

设当 $|x| \to \infty$ 时, u_0 衰减足够快, 容易得到如下形式的质量守恒

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\mathrm{d}x, \tag{7.60}$$

其质心是固定的, 因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} xu(x,t)\mathrm{d}x = 常数, \tag{7.61}$$

假设当 $|x| \to \infty$ 时 $\mu_0(x)$ 衰减足够快再对在区域 Ω 中由在原点的单一的源或汇驱动的 Hele-Shaw 流, 用在自由边界上 $p = 0$ 和 $-\partial p/\partial n = v_n$ 以及

$$p \sim \frac{Q}{2\pi}\log r, \quad 当\ r^2 = x^2 + y^2 \to 0, \tag{7.62}$$

积分 $\nabla^2 p = 0$, 得到流体区域变化的速率等于源强度 Q[145]. 然而, 自然有无限个守恒量

$$\iint_\Omega z^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad m = 1, 2, \cdots, \tag{7.63}$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$, 以后我们将回到这一事实.

有时, 这一方法可以指出眼前的祸患. 考虑单相一维 Stefan 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 对\ x < s(t), \tag{7.64}$$

成立

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad 在\ x = s(t)\ 上, \tag{7.65}$$

145 注意 p 正比于流体区域具有 Dirichlet 条件的 Green 函数.

并具有超冷的初始条件 $u(x,0)=u_0(x)<0, 0<x<x_0$, 并假设 $\partial u/\partial x=0$ 对 $t>0$ 成立. 将场方程积分, 这只是热的整体守恒的表达式, 得

$$s(t)+\int_0^{s(t)} u(x,t)\mathrm{d}x = s_0+\int_0^{s_0} u_0(x)\mathrm{d}x. \tag{7.66}$$

现在, 若解对所有 $t>0$ 存在, 则存在 s_∞ 使得 $s(t)\to s_\infty \geqslant 0$ 且当 $t\to\infty$ 时 $u(x,t)$, 那么我们得出矛盾. 因此, 我们有如 6.6.5 节中的 "有限时间破裂". 这种破裂的物理解释是在超冷凝固时, 若自由边界释放的潜热传失得太快, 因为在附近的 u 负得太大, 那么前方陡峭的梯度, 使自由边界移动如此之快 (由条件 $\partial u/\partial x=-\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$) 使得梯度变得更陡, 自由边界移动得更快. 若 u 的符号相反, 使得活动的相是熔点以上的液体, 自由边界向另一侧移动, 不稳定变成稳定. 当 $s_0+\int_0^{s_0} u_0\mathrm{d}x \geqslant 0$, 形如 (7.63) 的矩形可用来揭示更多的破裂信息 (见习题 7.9)[146].

7.3.3 Green 函数方法与积分方程

虽然 Green 函数不能直接用来解自由边值问题, 但有时我们可以由场方程和自由边界碰撞出信息, 如用 5.5.2 节叙述的边界积分方程方法将问题化为非线性积分方程. 作为一个例子, 再次考虑单相 Stefan 问题对 $-\infty<x<s(t)$ (7.64) 和 (7.65) 成立, 且 $u(x,0)=u_0(x)$, 并设它在 $x\to-\infty$ 有适当的性质, 在不活动的相 $x>s(0)$, $u_0=0$. 像以前一样, 我们定义 $G(x,\tau-t;\xi)$ 使得对 $t<\tau$

$$-\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial G}{\partial t}\right)=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),$$

然而, 我们没有指定 G 的边界性质, 因此如 [38] 中指出直线上的 Green 函数可以写作

$$E(x-\xi,\tau-t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau-t)}}\mathrm{e}^{-(x-\xi)^2/4(\tau-t)},$$

因此通常的如下形式的积分

$$\int_0^{\tau}\int_0^{s(\tau)}\left(u\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial E}{\partial t}\right)-E\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

得出

$$u(\xi,\tau)=u_0(\xi)*E(\xi,\tau)-\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}E(\xi-s(t),\tau-t)\mathrm{d}t, \tag{7.67}$$

其中 $*$ 如通常那样表示卷积, 当潜热为 0 时, 第二项不出现, 变成 (6.32). 现在只要小心, 我们就可以关于 x 求导, 并取 $\xi\to s(t)$ 的极限, 如习题 7.10, 我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}=-\left.\frac{\partial}{\partial\xi}(u_0*E)\right|_{\xi=s(\tau)}-\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{s(\tau)-s(t)}{\tau-t}\right)E(s(\tau)-s(t),\tau-t)\mathrm{d}t; \tag{7.68}$$

146 事实上, 甚至此不等式不满足时破裂也会发生, 只要在 $x=s_0$ 附近是大的而且总是负的.

直接从 (7.67) 取极限会得到一个不容易处理的第一类积分方程. 现在, 在关于 $u_0(x)$ 的适当的条件下, 用迭代分析可以得到经典解的存在唯一性, 见 [38].

遗憾的是, 这一方法不能推广至多维自由边值问题, 在 7.5 节我们将回到这个话题. 为了在这个问题上取得进展, 不能要求太高, 我们必须考虑广义解而不是经典解. 但在这样做之前, 我们先做一个表面上微不足道, 但经常被忽略的说明. 很清楚, 对一维问题, 我们可以通过诸如 $\xi = x/s(t)$ 或 $\xi = x - s(t)$ 的自变量变换化为固定区域的问题, 其代价是场方程化为系数为 u 的整体函数而变得难以分析, 然而这样的变换对计算有巨大的好处.

*7.4 弱解和变分方法

由于经典的自由边值问题是难以进行严格分析, 人们试图通过提出较不苛刻的解的定义来减轻数学处理的任务, 一种可能是遵循 1.7 节引入的思想, 设法将场方程乘上一个试验函数然后积分的办法来定义弱解, 使得自由边界及在其上的条件, 自动地整合在积分公式中. 另一办法是设法在极小化过程中自由边界条件会自动满足的方程来拓广 5.4 节中叙述过的变分法.

这两种方法的思路是相同的: 我们寻求一种推导方法, 它在自由边值问题固有的不连续发生时仍然是有意义的, 其技巧在于写出有很好的存在、唯一性的公式, 即使这种公式对我们求出弱解的显式表达式是不实用的, 但我们希望设计出某种数值离散化, 当步长适当减小时, 会趋于弱解或变分解.

在第 1 章中我们已经看到这种方法的危险性. 回忆在 1.7 节我们用 (1.22) 式定义双曲型方程弱解, 可以发现我们将网撒得太宽了, 所以为了得到唯一解, 我们需要额外信息. 在本章中我们遇到的问题更广泛, 场方程可能是椭圆、抛物或双曲的, 所提的自由边界条件可以是所有不同种类. 因此, 我们面临巨大的理论证明, 我们先进行两方面的考察.

首先, 即使有可以处理大量与实际有关的问题的方法, 但我们找到一个适用于所有自由边值问题的广义解公式的可能性是很小的[147], 这并不会引起人们的惊讶. 其次, 一个非常重要的可以判断的特性是自由边界上条件的"强度", 即若解在其上有导数的话, 有多少阶导数. 因为当且仅当自由边界条件具有良好的性质, 如在其上只有场方程的最高阶导数发生间断时, 我们有可能归纳出像 5.4 节那样的问题, 因此在考虑变分问题时, 这是需要关心的问题. 我们看到 Eular-Lagrange 方程中出现的导数比 Lagrange 方程中出现的导数高一阶, 因此极小化问题仍然是有意义的并具有上述的光滑阶数. 我们首先考虑这种有希望的情形.

147 我们只能对具有守恒律形式的双曲型方程定义弱解.

7.4.1　变分方法

最简单的问题发生在自由边界直接出现在 5.4 节中用到的那类变分叙述中. 例如我们希望解涡问题 (7.39), 用 u 代替 ψ 并令在涡片上 $u>0$, 很自然我们考虑

$$\min\int\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{7.69}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}-f(u), & u>0,\\ 0, & u>0,\end{cases}$$

而极小化是在满足固定边界上的边界条件的函数类中进行的. 甚至对 f 可导且成立 $f(0)=0$ 时要严格证明该变分问题有唯一解仍然是一件困难的工作. 然而, 我们的目的是得到包含古典解的广义解. 因此, 我们需要说明, 若当 $u=0$ 存在自由边界, 那么极小值函数在自由边界上应有适当的性质, $\partial u/\partial n$ 在其上应该连续. 设我们记自由边界为 $S(\boldsymbol{x})=0$, 当 $u>0$ 时成立 $S>0$, 将 (7.69) 分成两边的贡献就能看出这一点. 当 (u,S) 改变为 $(u+\delta u,S+\delta S)$ 时, 令法线指向 $u>0$ 的区域取最低阶可得

$$\begin{aligned}&\int_{u>0}\delta u(\nabla^2u+f(u))\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{u<0}\delta u\nabla^2u\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&+\int_{S=0}\left(\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{S=0_-}^{S=0_+}\delta u-\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)\right]_{S=0_-}^{S=0_+}\frac{\delta S}{|\nabla S|}\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{7.70}$$

由 (7.39), 上式前二项为 0, 且因 F 是连续的, 由 δu 和 δS 的独立性, u 和 $\partial u/\partial n$ 是连续的.

试图将同样的想法用于障碍问题 (7.40)~(7.42) 时, 会出现一种更加微妙的情况. 由于障碍的形状 f 一般并不满足 $\nabla^2 f=0$, 我们不能指望在所有的小的光滑的摄动中求 Dirichlet 积分 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int|\nabla u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 来得到解. 但从物理上或数学上连同膜边界上的适当边界条件一起考虑下述的 *有限制* 的或 *单边的变分问题* 是自然的.

$$\min_{u\geqslant f}\int\frac{1}{2}|\nabla u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\tag{7.71}$$

它又一次说明, 只要 u 和 ∇u 在自由边界上是连续的, 上述极小化能够得到障碍自由边值问题可以接受的广义解, 但是证明需要不同的思想. 特别地，它依赖以下三个概念的一致性.

1. 单边极小化表述 (7.71).
2. 所谓 *线性互补表述* 是

$$\nabla^2u\leqslant 0,\quad u\geqslant f,\quad (\nabla^2u)(u-f)=0.\tag{7.72}$$

3. 在包含“接触”和“不接触”区域的固定区域 Ω 上的所谓 变分不等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v-u) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0, \quad \text{对所有的 } v \geqslant f, \tag{7.73}$$

这里假设 v 满足适当的固定边界条件.

要严格证明原问题 (7.40)~(7.42) 与 (7.71)~(7.73) 等价是困难的, 虽然 (7.40)~(7.42) 清楚地推出互补表述 (注意, 当膜与障碍接触时, 线性化曲率 $\nabla^2 u$ 必须是负的). 为了将单边极小化 (7.71) 和变分不等式 (7.73) 联系起来, 注意若 u_1 和 u_2 是 (7.71) 的两个可能的极小函数, 那么对任何 $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, $\varepsilon u_1 + (1-\varepsilon) u_2$ 也是可能的极小化函数[148], 因此极小化要求

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \int_{\Omega} |\nabla(\varepsilon u_1 + (1-\varepsilon) u_2)|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

对于小的 ε, 上式右端等于

$$\int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} + 2\varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) \mathrm{d}\boldsymbol{x} + O(\varepsilon^2).$$

因此, 取 $u_2 = u$, $u_1 = v$ 有

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v-u) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant 0.$$

由于 $|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 = -2\nabla u \cdot \nabla(v-u) - |\nabla(u-v)|^2$, 反过来的推导是显然的. 进一步的详细讨论可见 [17], 在该文献中, 对变分的表达式 (7.71)~(7.73) 比原问题 (7.41)~(7.43) 的优点作了详细的解释; 特别地, 变分不等式是得到存在唯一性结果的好的出发点, 而稍后我们会看到, 单边极小化和线性互补问题易于数值实现.

这类方法当且仅当场方程是一个性质很好的泛函的 Lagrange 方程, 而且自由边界条件为适当光滑时才适用. 我们已经多次提到后者, 而且看到这种光滑性对将例如 (7.72) 与 (7.73) 联系起来是必要的. 因此, 当我们遇到一个缺乏必要光滑性的自由边值问题, 尝试将其变换成具有更好“正则性”的问题是有吸引力的.

一类著名的可以这样光滑化的问题是由 (7.14)~(7.16) 的定常情形建模的多孔介质中的流体流动. 对这类问题, 只需简单地对垂直变量 y 积分 (Baiocchi 变换) 并将自由边界写成 $y = h(x)$ 得到

$$\int_y^h p(x, y') \mathrm{d}y' = u(x, y).$$

我们限于讨论多孔介质的潮湿部分位于干燥部分下方的稳定情形. 那么, 在潮湿区域中, 因为 $p \geqslant 0$, 所以 $u \geqslant 0$. 在干燥区域中, 将 p 和 u 作延拓, 经过简单计算得到

$$\nabla^2 u = \begin{cases} 1, & y < h, \\ 0, & y > h, \end{cases} \quad \text{且在 } y = h \text{ 上有 } u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{7.74}$$

148 泛函分析指出最小化是在适当的函数空间中的凸锥上.

这样, 我们得到了一个可以重新归结为类似于 (7.72) 的线性互补问题或归结为如下变分不等式

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - x) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \int_{\Omega} (u - v) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{7.75}$$

其中试验函数 $v(x, y)$ 是正的, 且在固定边界满足适当的边界条件, Ω 是包含了干燥和潮湿部分的整个多孔介质区域.

光滑化变换的一个更有力的例子是关于单相 Stefan 问题 (7.64), (7.65) 与耗氧问题 (7.27) 之间的关系. 对于后者, 质量守恒的物理讨论给出如下自由边界条件:

$$c = \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad 在\ x = s(t)\ 上. \tag{7.76}$$

现设在 $0 < x < s(t)$ 氧是被消耗的, 且成立当 $x = 0$, $\partial c / \partial x = 0$ 和 $s(0) = 1$, 条件 (7.76) 给出了证明互补表达式

$$c \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + 1 \right) = 0, \quad c \geqslant 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \geqslant -1 \tag{7.77}$$

与下述所谓 *发展变分不等式* 等价所需的足够光滑性,

$$\int_0^1 \frac{\partial e}{\partial t}(v - c) \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(v - c) \mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (-1)(v - c) \mathrm{d}x \tag{7.78}$$

对一切在 $x = 0, 1$ 上满足适当边界条件的正的 $v(x, t)$ 成立; 对我们特定的初始与边界资料, 我们只要求在 $x = 1$, $v = 0$. 又一次看到证明 (7.27), (7.77) 和 (7.78) 的等价性是困难的, 虽然 (7.77) 和 (7.78) 可以用来证明弱解的存在唯一性. 有意思的是 Stefan 问题 (7.64) 和 (7.65) 并不具备互补问题或变分问题所要求的光滑性, 但显然是与 (7.27) 密切相关的. 当我们在 (7.27) 中形式地令

$$\frac{\partial c}{\partial t} = u, \tag{7.79}$$

可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{7.80}$$

而且由于在 $x = s(t)$ 上

$$c = \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t} = 0,$$

可见在 $x = s(t)$ 上 $u = 0$, 由于在 $x = s(t)$ 上

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial t} = 0,$$

我们发现, 在 $x = s(t)$ 上,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},$$

这就是 (7.64) 和 (7.65). 因此, 形式上 Stefan 问题是耗氧问题对时间的导数, 且同样适用于高维问题. 然而这里有一个隐蔽的困难. 因为我们只能将 (7.80) 用于 (7.27) 的 *无约束* 情形, 其中 c 的符号是未给定的, 而不可以写成 (7.77) 和 (7.78) 的具有良好性质的有约束的情形. 事实上, 我们已经指出, 在二维空间情形, Stefan 问题的性质会很差, 因此无约束氧耗问题亦是如此. 但是约束氧耗问题有很好的存在、唯一和连续依赖的性质, 至少对弱解是如此.

互补方法亦可用于引言中叙述过的其他模型, 如 5.1.1.3 节提到的 "死核" 模型. 同样对美式期权模型, 经简单计算有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\leqslant r\left(V-S\frac{\partial V}{\partial S}\right). \tag{7.81}$$

用金融术语, 这是自然的要求, 它表明完全套期保值期权投资回报 (左端) 永远不会超过无风险率的相同投资 (右端). 若持有期权是最优的, 等式成立, 但在交易范围, 持有期权是次最优的, 因此套期保值投资的回报少于无风险率. 此不等式可在条件 $V\geqslant\max(E-S,0)$ 下应用, 不论什么 S, 这两个不等式之一成为等式的事实给出了一个互补表述[47]. 这反过来可以说明隐含 $\partial V/\partial S$ 在自由边界上是连续的光滑条件, 即满足经典的自由边界条件 (7.20) (见习题 7.5)[149].

作为最后的例子, 我们回到 7.1.3.2 节中提到的光滑弹性接触问题. 有趣的是它们都可以归结为变分不等式, 因为首先, 弹性能在接触固体的三维中的最小化, 其 Eular-Lagrange 方程是成立 $\partial/\partial t=0$ 的 (4.73) 式; 其次, 法向位移和拉力在最低阶落在由一维自由边界 Γ 包围的曲面 S 上是连续的 (切向应力为零); 第三, 在接触区域以外 S 的部分没有应力作用. 这是一个变分不等式的理由就清楚了: 在 Γ 的一侧给定了传统的边界条件, 而在另一侧, 无应力边界条件是弹性能的自然边界条件[12]. 变分不等式是足够聪明地, 如同美式期权中变分不等式所起的作用一样, 通过选择在其上边界条件可以从接触条件变为自然边界条件又具有所要求的光滑性的曲线 Γ.

归纳起来, 当一个自由边值问题能归结为一个变分公式就是一件好事. 这不仅意味着通常广义解存在, 唯一性的严格表述可以作出, 而且解的数值计算也相对容易. 例如对向量线性互补问题

$$\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{u}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}=0, \tag{7.82}$$

其中向量 $\boldsymbol{u}$ 是正性即其每个元素 u_i 是正性, 我们可令

$$\overline{u}_i^{k+1}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j<i}a_{ij}u_j^{k+1}-\sum_{j>i}a_{ij}u_j^k\right), \tag{7.83}$$

149 在此, 无套利条件起着像热力学第二定律的作用.

其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 引入松弛参数 ω 使

$$u_i^{k+1}=\max(0,u_i^k+\omega(\overline{u}_i^{k+1}-u_i^k))$$

给出从 u_i^k 到 u_i^{k+1} 的一个容易实行的更新, 更详细的叙述见 [13, 17, 47]. 因此, 例如在华尔街, 期权定价可以由交易员很快作出.

尽管上面叙述了许多成功的故事, 但还有更多具有不可回避的不光滑性的自由边值问题无法用变分处理. 然而有时它们可以用以下方法.

7.4.2 焓方法

对标准 Stefan 问题的焓方法类似于双曲型方程弱解的概念. 这是基于认为自由边界条件 (7.4) 就像守恒律偏微分方程的 Rankine-Hugoniot 条件一样的想法. 事实上, 回忆一维热方程

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

是从积分形式的守恒律

$$\frac{\partial}{\partial t}(h(u))+\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{7.84}$$

导出的, 其中 $h=\rho cu$ 是材料的热用量或 焓. 我们观察到, 若设熔化温度 u_m 为 0, 不失一般性, 并记

$$h(u)=\begin{cases}\rho cu, & u<0\ (\text{固体}),\\ \rho cu+\rho L, & u>0\ (\text{液体}),\end{cases} \tag{7.85}$$

那么根据 (7.4), (7.84) 的 Rankine-Hugoniot 条件为 $[-k\partial u/\partial x]_{\text{液}}^{\text{固}}=\rho L\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. 然而另一条件 $u=0$ 不是 Rankine-Hugoniot 条件, 而是一个发生非线性温度的标记. 这指出 Stefan 问题是一个真正的极限非线性扩散问题.

为了给出这一想法的数学理论, 我们首先处理连续函数的情形, 用 $u=F(h)$ 代替 (7.85), 其中

$$F(h)=\begin{cases}h/\rho c, & h<0,\\ 0, & 0<h<\rho L,\\ h/\rho c-L/c, & \rho L<h,\end{cases} \tag{7.86}$$

并将 (7.84) 视作 $F(h)$ 的方程. 那么, 我们需要在 $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$ 自由边界上不确定的情况下, 正确地解释 (7.84) 式. 为此, 我们简单地将 u 视作 h 的函数, 在 (7.84) 上乘以检验函数 v, 在最简单的情形 $-\infty<x<\infty$ 上的 Cauchy 问题, 且在充分大的 x 和 $t=T$ 为零, 为无穷可微的. 这样, 我们引出 Stefan 问题弱解的定义为, 一对函数 u 和 h 满足 (7.86) 式, 且对一切如上所述的实验函数 v 成立

$$\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}\left(h\frac{\partial v}{\partial t}+ku\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}h|_{t=0}v(x,0)\mathrm{d}x. \tag{7.87}$$

导出 (1.27) 的讨论可以用来证明：任何这样的 u 在相边界上满足 (7.3) 和 (7.4) (对 $u_m = 0$), 在其上 $\partial u/\partial x$ 是间断的. 而且可以证明此函数对 (u, h) 是存在的, 唯一的 (见 [17]). 证明的主要想法是 (7.87) 的最重要的实际应用的一个副产品, 它是 (7.87) 的关于时间离散

$$\frac{h_{n+1} - h_n}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u_n}{\partial x}\right), \quad u_{n+1} = F(h_{n+1}) \tag{7.88}$$

的结果收敛于唯一的弱解. 有趣的是对双曲方程类似的离散化的收敛性是得不到证明的, 这是因为此时弱解并不唯一. 事实上对双曲守恒律的弱表示实现离散化比对扩散问题困难得多. 我们回忆对前者, 所有的自由边界条件都是双曲守恒律的 Rankine-Hugoniot 条件, 而对 Stefan 问题, 条件 $[k\nabla u \cdot \boldsymbol{n}]_{\text{固}}^{\text{液}} = -\rho L v_n$ 是由焓的不连续性引起的. 因为例如气体动力学激波的迅速变化会引起离散弱表述的解超高频振荡, 且这种振荡比由 (7.88) 在相边界产生的振荡更容易像波一样贯穿流体进行传播.

该算法被称为 Stefan 问题的 *焓方法*. 将其推广至更高的空间维数, 甚至证明弱解的存在唯一性是一件简单的事. 这与古典解的情况是不同的, 对高于一维的情形, 证明古典解的存在性是困难的.

当我们讨论 Stefan 问题的古典解和弱解的关系时, 我们看到焓方法更加戏剧性的内涵. 虽然如前所述我们能证明当 u 在其中为无限可微的两个区域通过一个满足 (7.3) 和 (7.4) 的自由边界连结在一起时, 我们有一个弱解. 但这并非就是能够出现在弱解中的唯一的自由边界. 事实上可以证明, 若我们考虑一个经过稍微修改的有热源[150]的问题, 对于 $0 < x < 1$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q \tag{7.89}$$

有

$$u(x, 0) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = -1, \tag{7.90}$$

那么由焓方法, 对 $Q > 2$, 解的演变如图 7.7(a) 所示.

这一观察是通过对算法 (7.88) 适当修改后得到的输出画出的. 我们看到出现一个 *糊状区域*, 在其上 $u = 0$, 当 $t_1 < t < t_2$, h 增加. Stefan 自由边界条件在此糊状区域的两侧均不满足, 仅当这样的糊状区域消失时 (图 7.7(b)), 这样的自由边界, 例如当 $t = t_5$, 出现了.

---

150 这是一个由常体积热引起的熔化问题的简单模型, 例如在热阻焊接：两片金属在 $-1 < x < 0$ 和 $0 < x < 1$ 要沿 x 轴焊接起来, 其两个外边界 $x = \pm 1$ 满足初始温度为 -1.

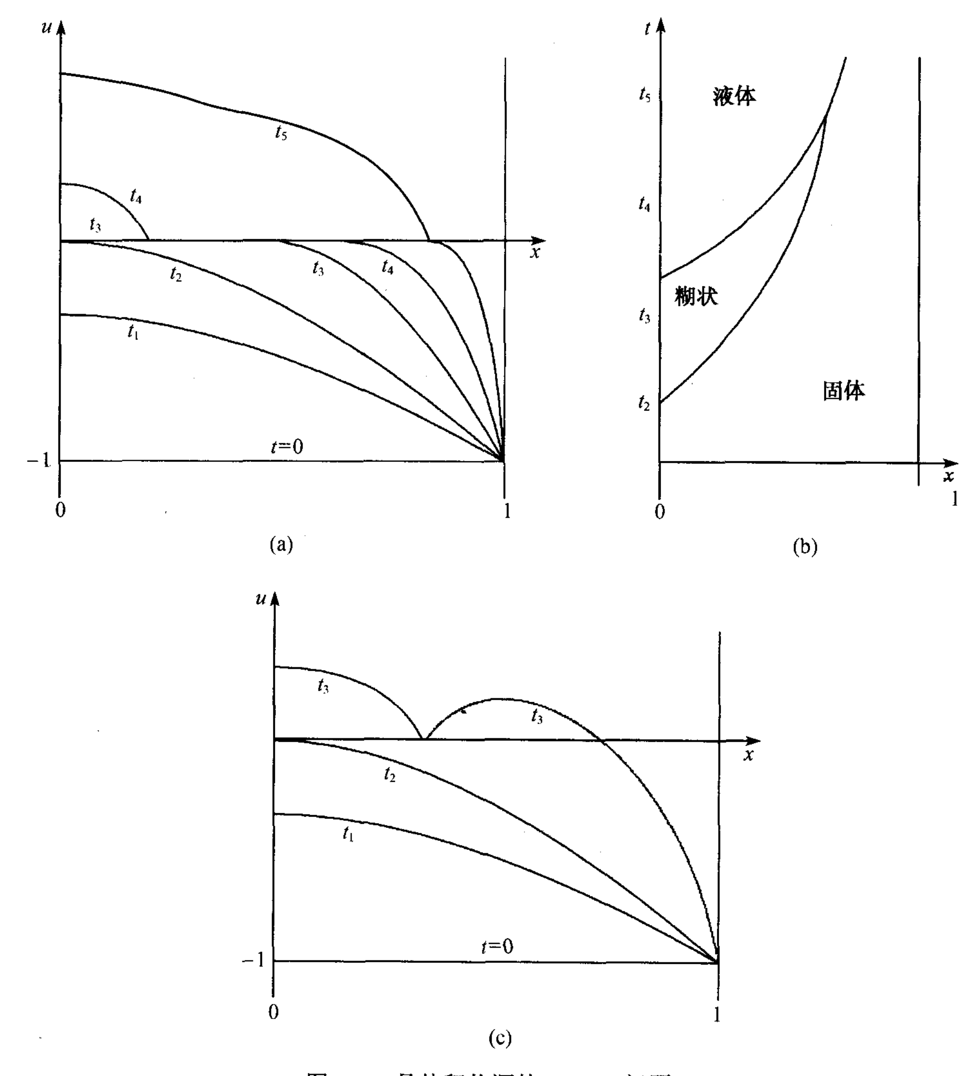


图 7.7　具体积热源的 Stefan 问题

另外, 可以说明, 若我们坚持问题的自由边界只是满足古典 Stefan 条件 (7.3) 和 (7.4) 的边界, 那么解的演变是十分不同的. 正如图 7.7(c) 所示, 它包含一个固体熔点超过熔点的过热区域. 我们记得 7.2.3 节零比热情形的讨论指出, 这种过热会导致在二维时, 对小扰动不稳定的自由边界.

预测固液相共存的图 7.7(a) 的物理解释要求超出了我们能在这里给出的详细物理检验. 但似乎在更多的实际问题中图 7.7(a) 比图 7.7(c) 更加符合现实. 数学上发生的是由于 (7.85) 中函数 $h(u)$ 的性质, 焓公式已经规定不允许超热 (同样不允许超冷). 我们记得在经典表述中, 我们是排除超热或超冷的, 弱表示提醒我们, 这

一约束具有与在氧耗问题中遇有同等的重要性.

虽然 Stefan 模型是弱表述使用的最普通的自由边值问题之一, 但这一想法可以在任何散度型问题中去进行尝试. 例如, 我们将其应用于一位多孔介质方程 (6.72), 得出

$$u = 0, \quad u^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{7.91}$$

作为弱解的自由边界条件, 其中第二式有时可解释为自由边界上的质量守恒. 然而我们必须提醒读者注意这种情形的脆弱性. 只要例如熔化温度潜热是位置的函数, 那么 Stefan 问题的弱表述就不适用了.

自由边值问题是偏微分方程理论中严格的存在唯一性证明和可验证数值算法远超过求显式解方法的领域. 下面叙述少数求显式解方法中比较适用的几个.

7.5 显 式 解

在第 4~6 章叙述的方法中, 只有两种方法被信赖可以用来求自由边值问题的显式解, 它们是: 第一, 相似变量的应用, 其中包括行波; 第二, 当场方程为 Laplace 方程或双调和方程时的复变量方法. 复变量的应用导致共形不变性的概念, 从而可以视作相似变量的特殊情形. 但与其相关的方法是相当有特色的, 所以我们将它分开讨论.

7.5.1 相似解

6.5 节中所有关于相似性或群不变的结论可用于具有或不具有自由边界的任何微分方程. 然而其成功与否依赖于确定相关的群, 因此我们列举一些广为人知的例子.

7.5.1.1 行波: 相似变量 $x - Vt$

当自变量 x 和 t 不明显地出现在场方程中时, 我们总可以求出只依赖于变量 $x - Vt$ 的解, 其中 V 是一个常数, 且对某些一维的自由边值问题, 允许自由边界出现在 $x = Vt$ 上. 例如, 对单相 Stefan 问题 (7.64) 和 (7.65), 水占据了区域 $x < Vt$, 有解 $F(x - Vt)$, 只要满足

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2} + V\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} = 0, \tag{7.92}$$

其中, 因冰位于 $x > Vt$, 有 $u = 0$,

$$F(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} = -V. \tag{7.93}$$

因此,

$$u(x,t) = -1 + \mathrm{e}^{-V(x-Vt)}. \tag{7.94}$$

我们看到若 $V > 0$, 我们有 7.3.2 节中认为稳定的情形, 水温在零度以上, 当 $x-Vt \to -\infty$, $u \to +\infty$. 然而若 $V < 0$, 那么当 $x - Vt \to -\infty$, $u \to -1$, 稍后, 我们会看到这些极限的意义.

对 7.1 节中叙述的许多其他模型都可以找到行波解. 作为一个极端情形 Rankine-Hugoniot 方程本身就为双曲守恒激波提供了一个行波解. 而二维曲面重力行波除非波的斜率很小, 至今仍然对数值和数学分析专家是具有挑战性的任务.

在燃烧理论中 (7.26) 的不确定性可以用火焰行进到一个成立 (7.21), (7.22) 和 (7.26) 的预先混合的环境来建立模型的办法来解决. 在作了火焰前方的反应可以忽略的关键假设后, 我们可以求一个行波解. 我们分别求得 $x > s(t) = Vt$ 的温度与浓度

$$T(x,t) = T_A + (T_0 - T_A)\mathrm{e}^{-V(x-Vt)/k}, \quad c(x,t) = c_0(1 - \mathrm{e}^{-V(x-Vt)/D}), \tag{7.95}$$

其中 T_A 和 c_0 分别是距火焰前方很远处的温度与浓度. 对 $x - Vt$ 的小正值将相容性条件 (7.25) 用于 (7.95), 可知 T_0 由 $T_0 - T_A = Ac_0/\alpha$ 给出, 其简单的物理解释是, 温度的提高完全是由化学反应引起的. 最后, 由 (7.26) 式得到火焰的速度 $V = \sqrt{2\alpha/DE}(kT_0/(T_0 - T_A))\mathrm{e}^{-E/2T_0}$.

遗憾的是, 这一近似解在距火焰前方很大距离处失去自相容性, 因为虽然 (7.23) 中的反应项很小, 但除非 T_A 严格为零, 它都支配其他的导数. 这就是所谓的冷边界困难. 这一矛盾可以用以下事实来缓解, 在实际生活中, 该模型只用于有限时间对应的有界区域之中. 事实上, 若我们在火焰前方有限但适当大距离处用条件 $T = T_A$, 可能除了靠近冷边界附近 (7.95) 给出了 T 和 $\partial T/\partial x$ 很好的近似.

对一维不定常气体动力学方程 (2.3) 和 (2.4), 有著名的行波解, 其中激波上的自由边界条件按速度 V 运动由 (2.49) 给出. 我们考察瞬间用速度推动一装有静止的压力为 p_0, 密度为 ρ_0 的气体的管子中的活塞引起的流动过程. 通过求对 $V_p t < x < Vt$ 中 u, p 和 ρ 均为常数的解, 相对容易地看到自由边界的速度为

$$V = \frac{\gamma+1}{4}\left(V_p + \sqrt{V_p^2 + \frac{16a_0^2}{(\gamma+1)^2}}\right),$$

其中 $a_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$ (见习题 7.12). 相似解对多维稳定流通过楔和锥时也存在, 但此时不唯一性能够发生 (解不存在也是可能的).

7.5.1.2　**其他相似变量**

对一类特殊的初始与边界条件, Stefan 问题提供了一种广为人知的将偏微分方程的自由边值问题化为常微分方程自由边值问题的方法[151]. 容易看到, 只要初始条

151 我们回忆在 6.6 节类似的群不变讨论用来求多孔介质方程的自由边界.

件在 $x = s(t)$ 的两侧均为常数, 其中一相是 $s(t) < x < \infty$, 另一相是 $-\infty < x < s(t)$, 初始条件和自由边界条件在变换 $x' = e^{\lambda x}$, $t' = e^{2\lambda}t$, $s' = e^{\lambda}s$, $u' = u$ 下是不变的. 因此, 如同在 (6.44), 我们可设

$$s(t) = \alpha t^{1/2}, \quad \eta = xt^{-1/2} \quad 和 \quad u = U(\eta), \tag{7.96}$$

其中 α 为常数, 可得

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\eta\frac{dU}{d\eta} = 0, \tag{7.97}$$

在水在 $-\infty < x < s(t)$ 的单相情形以及 $u(x,0) = u_0 =$ 常数, 和 $s(0) = 0$, 我们求得

$$U(\alpha) = 0, \quad \frac{dU}{d\eta}(\alpha) = -\frac{\alpha}{2},$$

因此从 (7.97) 得

$$\frac{\alpha}{2}e^{\alpha^2/4}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\eta^2/4}d\eta = u_0. \tag{7.98}$$

可以说明这一对 α 的先验方程有唯一解 (见习题 7.1), 类似的方程有许多应用, 从估计冷冻食物所需时间到美式期权的定价. 然而从图 7.8 容易看到当 $u_0 \leqslant 1$, 无实解存在, 类似于 (7.66) 后的讨论说明, 甚至在一个空间维, 只有一定数量的超冷是可以允许的. 这一的临界值恰好是允许行波 (7.94) 存在的临界值.

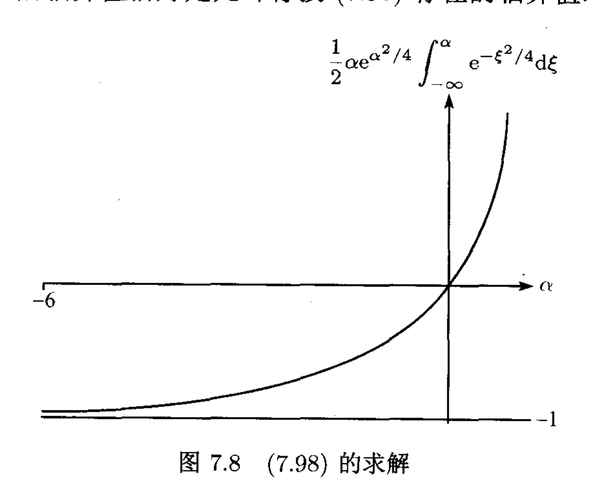


图 7.8 (7.98) 的求解

7.5.2 复变量方法

复变量方法用于 Laplace 方程的许多自由边值问题是有优势的. 例如它在研究一类满足 (7.36) 的无重力、无黏、无旋被称为 Helmholtz 流时是特别有效的. 这些

流动的关键之点是自由边界条件可以写成只包含位势 ϕ 的梯度的形式. 因此, 我们可将这些条件按 *复速度势* $w(z) = \phi + \mathrm{i}\psi$ 表示为

$$\psi = 常数, \quad 在 \left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right| = 1 上成立, \tag{7.99}$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$. 因此, 若我们在复变量 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = u - \mathrm{i}v$ 的速度图平面[152]上操作, 那么我们简单地有 w 是 z 的解析函数, 因此 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 在部分单位圆上有常虚部. 若此关于 $\psi(u, v)$ 的 Dirichlet 问题可解, 那么该解给出了 w 和 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 的一个函数关系, 即一个常微分方程, 问题约化为求积分. 遗憾的是此问题还包含可能出现在流动固定边界上的条件, 而按 $u - \mathrm{i}v$ 写出来就变得难以处理了. 然而当固定边界是直线时, 这样的麻烦是可以避免的. 这意味着, 当我们处理 $\log \mathrm{d}w/\mathrm{d}z = W(z)$ 时, 自由边界是 $\mathrm{Re}W = 0$, 那么 $\mathrm{Im}W = -\arctan(v/u)$ 在固定边界上为常数. 因此, W 平面对应于流体流动的区域具有多角形边界. 但因 ψ 在自由边界和固定边界上均为常数, 同样的叙述对 w 平面上流动区域也是成立的, 且它通常是一个半平面. 因而我们可以求助于通常的 Schwarz-Christoffel 映射将 W 和 w 联系起来. 此映射是强有力 Riemann 的映照定理的一个特殊显式实现. Riemann 映射定理可叙述为: 复平面两个连通区域之间, 当下面三个条件满足时: 区域的内部映射到内部; 边界映射到边界; 边界上有三对点保持一致, 存在唯一的共形映射 (见 [16]). 其细节是错综复杂的 (见习题 7.14, 7.15), 但关键想法是简单的: 因为这是约束 $W(z)$ 因而 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ 作为 w 的函数的唯一的映射. 按照这样的方法, 包括多个喷射口和腔的异常类型的流动可以构造出来, 唯一的约束是, 固定的边界为直线; 对这一方法的详尽的叙述见 [4].

共形映射对另一类稳定流动, 即由 (7.14) 和 (7.16) 建模考虑重力的多孔介质流动问题同样有效. 现在, 自由边界条件是

$$p = 0, \tag{7.100}$$

$$|\nabla p|^2 + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{7.101}$$

这又一次启示我们考虑速度图平面 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = u - \mathrm{i}v$, 现在这里 $(u, v) = -\nabla(p + y)$. (7.101) 表明, $u^2 + (v + 1/2)^2 = 1/4$ 在自由边界上成立, 流动方向为 $-\arg \mathrm{d}w/\mathrm{d}z$, 意味着在速度图平面流动区域界于一个圆与一条直线之间. 对映射到 w 平面上需要更多的技巧, 但许多例子可以用此方法解决.

遗憾的是只有很少的发展问题容许用共形映射方法. 在无旋、无黏、无重力流有少许进展 (见习题 7.16), 但对 Hele-Shaw 流事情要好得多. 由于这些流动是 Stefan 问题的极限情形, 几乎很少有高维解, 我们对二维问题能说的任何东西都有实际的价值.

---

152 这一术语的引入与第 4 章引入的理由是不同的; 注意现在的轴是 u 和 $-v$.

当我们考虑只有一点泵出或吸入的问题时, 这个方法的优点更为明显. 这种问题是实际中最简单的驱动机制, 可以在板单元中用安装一个注射器实现. 我们将要做的可以证实远比如 (7.67) 的 Green 函数方法更有价值. 该方法允许问题在自由边界上崩溃, 但仅仅是按照一个整体的积分 - 微分方程的形式在其上满足, 难以找到有用的显式解. 用复变量的方法, 我们可将一个自由边界条件写成映射函数的局部微分关系. 虽然因为解析函数的实部和虚部的关系, 问题的性质仍然是整体的, 所幸的是 Hele-Shaw 问题有如此众多的 "构造", 从而我们可以找到一大类显式解.

问题可作如下阐述. 设我们能将流体区域 Ω 例如用 $z=f(\zeta,t)$ 映射到一个辅助 ζ 平面的单位圆 (即 1–1 的), 设位于 $z=0$ 处的源或汇映射到 $\zeta=0$, 那么 ζ 平面上的问题是求在单位圆上为 0 的调和函数 p, 且当 $|\zeta|\to 0$ 有奇性

$$p\sim -\frac{Q}{2\pi}\log|\zeta|,$$

其中 Q 为源强度. 因为

$$p=-\mathrm{Re}\frac{Q}{2\pi}\log\zeta, \tag{7.102}$$

我们只需求 f, 使它反过来将 ζ 与 z 联系起来. 为此, 我们回顾动力学条件, 它要求在自由边界上成立

$$\frac{\partial p}{\partial t}-|\nabla p|^2=0. \tag{7.103}$$

现在

$$-\frac{2\pi}{Q}\frac{\partial p}{\partial t}=\mathrm{Re}\frac{1}{\zeta}\left.\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|_{z\ \text{固定}}=-\mathrm{Re}\frac{1}{\zeta}\frac{\partial f/\partial t}{\partial f/\partial\zeta}; \tag{7.104}$$

在 $|\zeta|=1$ 上也成立

$$\frac{4\pi^2}{Q^2}|\nabla p|^2=\frac{1}{|\zeta|^2}\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\right|^2=\frac{1}{|\partial f/\partial\zeta|^2}. \tag{7.105}$$

这样我们得到了关于 f 的如下非常规的微分方程

$$\mathrm{Re}\left(\bar{\zeta}\overline{\frac{\partial f}{\partial\zeta}}\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\frac{Q}{2\pi} \tag{7.106}$$

在 $|\zeta|=1$ 上成立, 而 f 在 $|\zeta|<1$ 中是解析的. 此公式使 Hele-Shaw 问题的许多自由边值问题的解可以写出来, 例如对

$$f=a_1(t)\zeta+a_2(t)\zeta^2 \tag{7.107}$$

和实的 a_i, 不失一般性, 在 $|\zeta|=1$ 比较系数得

$$a_1\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}+2a_2\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}=\frac{Q}{2\pi},$$
$$a_1\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t}+2a_2\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}=0,$$

从而

$$a_1^2 + 2a_2^2 = \frac{Qt}{\pi} + \text{常数}, \quad a_1^2 a_2 = \text{常数}$$

为一系列自由边界起始于 $t = 0$ 的涡线, 终于 $t = t_2$ 时的心形线如图 7.9 所示.

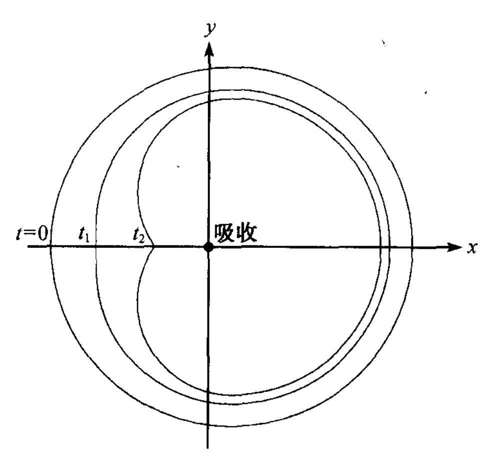


图 7.9　映射 (7.107) 的破裂

用这样的多项式映射而非乘以倍数的实验揭示, 任何由这种映射生成的收缩 (吸收) 自由边界条件在所有流体吸干前就终止了, 在自由边界上形成了一个尖端, 事实上可以证明这是正确的. 因为我们已经在 7.2.3 节知道吸收 Hele-Shaw 流是不稳定的, 或许上述事实并不令人惊讶. 现在我们看到的是非线性似乎无法拯救其命运, 反而造成有限时间的破裂.

现在我们可以看到, 动量守恒 (7.63) 只是从 (7.105) 约化而得到的, 因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\Omega z^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial\Omega} z^m v_n \mathrm{d}s \\ &= -\int_{\partial\Omega} z^m \frac{\partial p}{\partial n}\mathrm{d}s \\ &= \int_{|\zeta|=1} f^m \cdot \frac{1}{|\mathrm{d}f/\mathrm{d}\zeta|} \cdot \frac{Q}{2\pi}\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{d}\zeta\right| \\ &= \frac{Q}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=1} f^m \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta};\end{aligned}$$

由于 $f(0,t)$, 它对 $m \geqslant 1$ 为零. 我们应该指出有时解析延拓可用来解作为在单位圆内处处成立的泛函微分方程 (7.106); 这一过程和习题 7.18 中引入的 Schwarz 函数的想法是紧密联系的.

关于破裂的讨论导致以下我们希望叙述的关于自由边值问题的最后课题.

*7.6 正 则 化

我们再次重复我们的论点：本章讨论的偏微分方程问题引起的不适定的魅影可能是现实世界日常模型的一种特性. 在第 4~6 章, 我们仅仅引述了倒向热方程和椭圆方程的 Cauchy 问题作为不适定问题的可能例子, 但是作为模型它们在实际中即使有也是罕见的[153]. 然而作为一个范例, 倒向热方程是非常有帮助的, 因为它是容易用诸如变换等方法进行分析的. 这就使我们能问这样一个问题 "若实际问题导致的模型是倒向热方程加上一个正则化项, 如

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \mathcal{J}(u), \quad u(x,0) = u_0(x); \tag{7.108}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时会有什么响应?"[154]

正如 6.7.1 节的讨论, 使倒向热方程正则化, 使 (7.108) 对成为一个适定问题的一个 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{J}(u) = -\partial^4 u/\partial x^4$, 对此情形的 Fourier 解是

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{u}_0(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+k^2t-\varepsilon k^4 t}\mathrm{d}k. \tag{7.109}$$

当 ε 减少为零, 积分变得越来越不正则, 趋向于一个在有限时间内破裂的函数.

遗憾的是如 (7.109) 这样的表达式不适用于自由边值问题, 因此自由边值问题的正则化代表了一个有挑战性的现代研究领域. 实际上总是有适用的正则化的物理机制, 如相变中的 "表面能" (或自由面流中的表面张力或黏性), 表面化学反应或其他 "耗散" 源. 事实上, 这些机制似乎更存在于自由边界附近, 而我们已经构造的连续体模型的解在它附近要比远离它的地方的变化要无限的快. 其数学的后果是在自由边界中引入较高阶导数, 其好处是像 (7.109) 那样增加了适定的可能性, 坏处是使分析变得更困难了.

将高阶导数引入自由边界的想法并不是数学家正则化武器库中唯一的武器. 事实上, 我们已经看到一个戏剧性的例子, Stefan 问题进行如 (7.84) 按焓重新归结消除了超热, 其代价是在求解时引入新的自由边界和糊状区域. 用图 7.10 的函数代替 (7.85) 式表示的 $h(u)$, 这样光滑和单调的 $h(u)$ 可以相对容易地证明存在唯一性, 但不容易建立当取 $\varepsilon \to 0$ 的极限时需要的一致的界. 这样的方法导致一个完整的将模型光滑化的层次结构, 在其中引入一个辅助函数 $f(x,t)$ 来建立自由边界经历变化时材料的百分比的模型. 因而 Stefan 问题可写作

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

153 这一叙述假设我们排除了我们试图 "预测" 过去的反问题, 对此我们将在第 9 章再讨论.

154 这是不适定问题 Tikhonov 正则化 的一个例子.

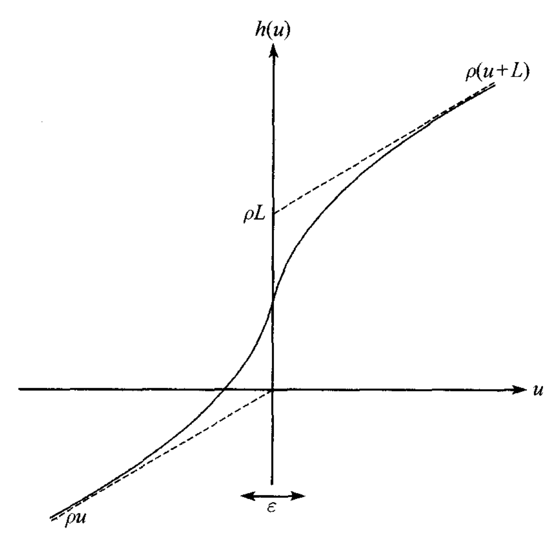


图 7.10 光滑化焓

和一个关于 f 演变速率的方程, 其中限制 f 为 0 和 1 依赖于考虑在自由边界的那一侧. 这就使我们回归到第 6 章中引入的反应扩散方程思想的完整轨道.

最后, 我们指出, 可以如 (7.80) 中一样, 将单相的 Stefan 问题与耗氧问题等同起来的办法对超热或超冷的单相 Stefan 问题实现更加彻底的正则化. 我们已经看到只要浓度 c 允许变号, 这种等同就可以实现. 然而我们可以限制 c 为正的, 从而使氧耗问题的模型变为适定的, 但这会引起自由边界条件额外的分量生成. 因此, 如果允许 Stefan 问题的自由边界按完全同样的方式出现新的分量, 那么实现的是 "成核" 正则化.

*7.7 后 记

作为本章的结束, 我们简短地介绍一类特殊的, 在实践中有广泛应用的但与前面讨论的问题有所不同的自由边值问题. 这些问题的自由边界的维数比支配微分方程低 2 维. 因此, 它们可称为 *余维数 2 的自由边值问题*, 以示有别于 7.1 节中的余维数 1 的自由边值问题.

事实上在讨论弹性接触问题时, 我们已经遇到过这种结构. 然而, 由于自由边界有落在发生接触的曲面上的约束, 接触问题有其特殊性. 而更可能发生的情形是一个可以在三维空间自由移动的一维的自由边界. 这种情形发生在超流体或超导物质的建模. 但最具有可视性的是考察漩涡在水中的运动. 回顾 5.1.4.1 节, 这种漩涡在二维无黏流体中运动的模型, 涉及求一个速度势 ϕ, 在邻近极坐标系 (r, θ) 的原

点, 具有例如以下形式的奇性

$$\phi \sim \frac{\theta}{2\pi}$$

加上摄动项, 速度 $\boldsymbol{v}$ 和流函数 ψ 满足

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{curl}(0,0,\psi), \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{v} = (0,0,-\nabla^2\psi) = (0,0,\delta(\boldsymbol{x})), \tag{7.110}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x,y)$, 还有初始条件和远离原点的边界条件. 这一模型对涡的位置是预先给定的情形是适当的, 但对自由运动的涡, 对其进行动力学建模之前需要附加信息. 对二维情形, 它们来自 Helmholtz 定律, 粗糙地说是断言涡是 $\nabla\phi$ 的正则部分的响应, 即涡的位置 $\boldsymbol{x}(t)$ 的移动满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}(t)} \nabla\left(\phi - \frac{\theta}{2\pi}\right), \tag{7.111}$$

其中 θ 是相对于 $\boldsymbol{x}(t)$ 度量的. 遗憾的是这一断言涡用局部流速的正则部分运动的定律没有复杂的渐近分析是难以验证的.

三维的情形更加有趣, 此时 (7.110) 变成

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\delta}_\Gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(s,t)),$$

其中 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(s,t)$ 刻画了 t 时刻的涡曲线 Γ, 而向量 $\boldsymbol{\delta}$ 函数的定义是按照数量 δ 函数的定义, 用如下式给出

$$\boldsymbol{\delta}_\Gamma(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'.$$

现在, 参考 (4.77), 我们有

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\wedge \mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}, \tag{7.112}$$

为了取得进一步的进展, 我们必须研究 $\boldsymbol{x}$ 趋近 Γ 时 $\boldsymbol{v}$ 的性态[155]. 遗憾的是当 $\boldsymbol{x}\to\Gamma$ 时 (7.112) 是奇异的, 说明这一点要经过复杂的计算, 当到 Γ 的无量纲距离为 d 时

$$\boldsymbol{v} \sim \frac{1}{2\pi d}\boldsymbol{e}_\theta - \left(\frac{\log d}{4\pi}\right)\kappa\boldsymbol{b} + \cdots,$$

其中 $\boldsymbol{e}_\theta$ 是一个局部的方位角向量, κ 为 Γ 的主曲率, $\boldsymbol{b}$ 是次法线. 因此, 若我们遵循 (7.111) 并断言 Γ 的运动速度是由局部诱导流的正则部分制约的, 那么涡速度由以下偏微分方程制约

$$\boldsymbol{v}_\Gamma = -\frac{1}{4\pi}(\log d_0)\kappa\boldsymbol{b}, \tag{7.113}$$

155 我们已经对先前叙述过的余维数为 1 的情形采用过这一方法, 例如用积分表示 (7.68), 我们可以对得到从两边趋近 Γ 的合理定义的极限, 从而得到我们熟悉的跳跃条件.

其中 d_0 是需事先指定的 "分离点"[156]. 发生的情况是, 在涡的位置的奇性强的控制了整个涡的运动而无关于任何外加的速度场. 这和典型的余维数 1 的模型是不同的. 注意到 (7.113) 是曲率流方程 (6.88) 的拓广, 它的唯一一个已知的精确解是一个旋转螺旋线, 其参数方程为

$$\boldsymbol{x} = (a\cos(s-\omega t), a\sin(s-\omega t), b(s-Vt)), \tag{7.114}$$

其中 a, b 为常数, 常数旋转速度 ω 和平移速度 V 是有关的, 见习题 7.2.1. 当 $\omega = 0$ 以及 $b \to 0$ 且 bV 为有限时, 此解表示一个 "烟圈", 在 9.2.3 节我们还会回到这一问题.

习　　题

7.1. 考虑 Stefan 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \neq s(t),$$

以及在 $x = s(t)$ 上

$$u = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_-^+ = -\dot{s},$$

并且有

$$s(0) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} u_0 = \text{常数}, & x < 0, \\ u_1 = \text{常数}, & x > 0. \end{cases}$$

证明只要

$$\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\alpha^2/4} + u_0\left(\int_{-\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-\eta^2/4}\mathrm{d}\eta\right)^{-1} + u_1\left(\int_{\alpha}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2/4}\mathrm{d}\eta\right) = 0,$$

则存在一个解 $u(x,t) = U(\eta)$, 其中 $\eta = x/\sqrt{t}$ 和 $s(t) = \alpha\sqrt{t}$.

当 $u_0 = 0$ 时, 利用结果 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha^2/4}\int_\alpha^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2/4}\mathrm{d}\eta$ 是单调且当 $\alpha \to \infty$ 时趋向于 2 的性质来证明: 当 $u_1 > -1$ 时, 存在一个解; 当 $u_1 \leqslant -1$ 时, 解不存在.

注. 这里潜热为 1 的 Stefan 条件, 强迫液体在 $x > s(t)$ 中, 而固体在 $x < s(t)$ 中. 若 $u_0 = 0$ 并且 $-1 < u_1 < 0$, 液体就会过冷或固化 $(\alpha > 0)$; 同样, 若 $u_1 = 0$ 并且 $0 < u_0 < 1$, 固体就会超热或液化. $u_1 < -1$ 或 $u_0 > 1$ 情形下的不存在性在 7.5.1 节中讨论过.

7.2. 假设在 Muskat 问题中, 在接触面的一侧满足 $\nabla^2 p_w = 0$, 另一侧满足 $\nabla^2 p_o = 0$ (见 7.1.1 节). 同样假设重力可忽略, 且由边界条件为 $\varepsilon^{-1}\partial p_w/\partial n = \partial p_o/\partial n = -v_n$,

156 引入一个分离点的设计可以视作发生在 $d_0 = 0$ 的奇性的一个物理正则化.

其中 $0 < \varepsilon \ll 1$. 记 $p_w = \varepsilon p_{w0} + \cdots$, $p_o = p_{o0} + \cdots$ 用使 ε 的系数相等的方法证明: p_{o0} 满足 Hele-Shaw 问题

$$\nabla^2 p_{o0} = 0$$

在自由边界上满足

$$p_{o0} = 0, \quad \frac{\partial p_{o0}}{\partial n} = -v_n,$$

p_{w_0} 满足什么问题?

7.3. 考虑带有光滑凹障碍的一维障碍问题, 其中 f 是偶函数, 满足 $f(0) = 0$ 和 $\mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}x^2 < 0$. 考虑 (7.72) 中的线性互补方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \leqslant 0, \quad u - f \geqslant 0, \quad (u - f)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

边界条件为 $u(-1) = u(1) = 0$. 假设接触区域为 $-x^* < x < x^*$, 并假定我们可以用分布理论确定有

$$\int_{x^*-}^{x^*+} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*+} - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*-}.$$

证明, 若该等式右端为正, 则不可能有 $\mathrm{d}^2 u/\mathrm{d}x^2 \leqslant 0$. 以及若该等式右端为负, 则不可能有 $u - f \geqslant 0$. 并推导 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 在 $x = x^*$ 处连续.

*7.4. 考虑 7.1.2 节的美式卖出期权定价, 最优价格为 S^*, 当 $0 \leqslant S \leqslant S^*(t)$ 时, 有 $V(S,t) = E - S$.

(i) 现在 t 时刻可交割, S 下跌至 $S^*(t)$. 证明, 若 $\lim_{S\downarrow S^*} V(S,t) = E - S^*(t) + A$, 其中 $A > 0$, 则在 $\mathrm{d}t$ 的时间后, 期权获利为 $A + O(\sqrt{\mathrm{d}t})$ 交割的可能性为 $1/2 + O(\mathrm{d}t)$. 在 $1/2 + O(\mathrm{d}t)$ 的可能性下, 其价值改变仅在 $O(\mathrm{d}t)$ 之内. 推出套利交易迫使 V 在 $S = S^*$ 连续.

(ii) 现假设 $S = S^*$ 如上问中所提, 以及 $\partial V/\partial S(S^*,t) < -1$, 证明期权价值会低于 S 价值的回报, 但高于 S^* 的. 并解释其不可能的原因. 最后, 假设 $\partial V/\partial S(S^*,t) > -1$, 使用 V 作为 S 的函数概要地证明, S^* 越小, 期权价值越大, $\partial V/\partial S(S^*,t)$ 也会相对减少. 推导若选择 $S^*(t)$ 使 $\partial V/\partial S$ 连续, 则期权对于持有者存在最大值.

7.5. (7.81) 的美式卖出期权有如下形式的线性互补,

$$\mathcal{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leqslant 0, \quad V - \max(E - S, 0) \geqslant 0,$$
$$(\mathcal{L}V)(V - \max(E - S, 0)) = 0,$$

及 $V(S,T) = \max(E - S, 0)$. 采用习题 7.3 节中的讨论来证明: $\partial V/\partial S$ 在期权的交割边界 $S = S^*(t)$ 为连续的.

7.6. 二维缓慢黏性流建模如下

$$\mu\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

其中 μ 为常数, $\boldsymbol{u}=(u,v)$, 表面法线 $\boldsymbol{n}$ 方向单位面积所受到的力为

$$\begin{pmatrix} -p+2\mu\partial u/\partial x & \mu(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x) \\ \mu(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x) & -p-2\mu\partial v/\partial y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

证明

(i) 存在一个 ψ, 使得

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

且有

$$\nabla^4\psi=0;$$

(ii) 存在一个 A, 使得

$$-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-2\mu\frac{\partial^2 A}{\partial y^2},\quad -p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=-2\mu\frac{\partial^2 A}{\partial x^2},$$
$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2\mu\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial y},$$

以及

$$\nabla^4 A=0.$$

对具有无应力自由边界 Γ 的缓慢稳定流, 证明在 Γ 上, ψ 为常数, 且 $\partial/\partial s(\nabla A)=\mathbf{0}$, 其中 $\partial/\partial s$ 表示切向导数. 问在哪种几何形状下可以不失一般性地在自由边界 Γ 上令 A 为 0?

*7.7. 假设在习题 7.6 中的缓流中有一个恒定的表面张力, 强度为每单位面积 $-T\kappa\boldsymbol{n}$, 其中 T 为常数, κ 为曲率, 不失一般性, 证明,

$$A=\text{常数},\quad \frac{\partial A}{\partial n}=\frac{T}{2\mu}.$$

7.8. 假设一刚性光滑压头 $y=f(x)$, 在弹性半平面的 $|x|<c$ 上产生一个小位移. 用

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

记半空间边界单位面积上的受力. 将 (u,v) 和力在 $y=0$ 上的边界条件归结为

$$\sigma_y=\tau=0,\quad v<f(x)\quad 对\ |x|>c,$$
$$\tau=0,\quad v=f(x),\quad \sigma_y<0\quad 对\ |x|<c.$$

写出这些条件的线性互补形式.

7.9. 假设对于 $0 < x < s(t)$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

以及

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\dot{s}, \quad \text{在 } x = s(t) \text{ 上},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{和} \quad u(x,0) = u_0(x) \leqslant 0 \quad \text{有} \quad s(0) = s_0.$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}s^2 + \int_0^{s(t)} xu(x,t)\mathrm{d}x\right) = u(0,t) \leqslant 0,$$

因此且如果有

$$\frac{1}{2}s_0^2 + \int_0^{s_0} xu_0(x)\mathrm{d}x < 0,$$

则在 $u = 0$ 及 $s > 0$ 时或 $s = 0$ 处都不可能出现稳态.

注. 这种证明有限破裂的方法只要 f 具有适当的性质就可以拓广到以下表达式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(s) + \int_0^{s} f'(x)u(x,t)\mathrm{d}x\right).$$

*7.10. 证明

$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-t)^2/4t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/4}\frac{\mathrm{d}t}{sqrtt},$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-t)^2/4t}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty (x-t)\mathrm{e}^{-(x-t)^2/4t}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \quad \text{对于 } x > 0.$$

但是, 同样可以证明, 最后的导数项在 $x = 0$ 时不等于

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/4}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

注. 通过

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(x-t)^2/4t}\left.\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/4}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \sqrt{\pi}f(0),$$

可以解释 (7.68) 式左边含有因子 1/2 的原因.

7.11. 一个圆形膜在圆 $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ 上有零垂直位移, 但其被限制在光滑障碍 $z = \varepsilon(1 - 2(x^2 + y^2))$ 之上, 其中 ε 是很小的正数. 证明, 接触区域半径 R 满足 $2R^2(1 - 2\log R) = 1$.

7.12. 气体运动学中以速度 V_s 传播的激波在 0 和 1 之间的条件与 (2.49) 相关联, 即

$$\begin{aligned}[\rho(V_s-u)]_0^1 &= [p+\rho(V_s-u)^2]_0^1 \\ &= \left[p(V_s-u)\left(\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}+\frac{1}{2}(V_s-u)^2\right)\right]_0^1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

推导, 若一个活塞以速度 V_p 在一个具有 $p=p_0$ 及 $\rho=\rho_0$ 的静止态气体的管道中运动, 则自由边界条件 (激波) 具有的速度 V_s, 满足

$$V_s^2-\frac{\gamma+1}{2}V_pV_s-a_0^2=0,\quad a_0^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}.$$

*7.13. 证明通过习题 7.12 中的 Rankine-Hugoniot 条件可以得到

$$(u_1-u_0)^2=(p_1-p_0)\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_1}\right)\quad 以及\quad \frac{\rho_0}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)p_0+(\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_0+(\gamma+1)p_1}.$$

推导, 若激波后压强为 p_1, 其传播到 $p=p_0$ 及 $\rho=\rho_0$ 的静止态气体当中, 经平面墙平行反射, 其后压强变为 p_2, 满足

$$\frac{p_2}{p_1}=\left((3\gamma-1)\frac{p_1}{p_0}-(\gamma-1)\right)\Big/\left((\gamma-1)\frac{p_1}{p_0}+(\gamma+1)\right).$$

*7.14. 一束厚度为 $2h_\infty$ 的无黏、无旋流体, 以速度 1 向右移动, 进入半无限侧壁为 $y=\pm1$ 的矩形腔中, 如图 7.11 所示; y 轴与自由表面相切.

$$\begin{aligned}&\psi=0\quad 在\ ABCDE\ 上,\\ &\psi=h_\infty,\quad |\nabla\phi|^2=1\quad 在\ E'A'\ 上.\end{aligned}$$

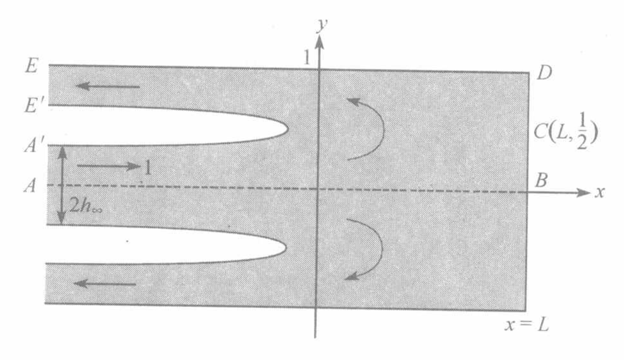


图 7.11　气体进入盒式子

忽略重力以及表面张力, 证明, 在流体上半部分中该边界问题的复数势函数 $w(z)=\phi+i\psi$ 是解析的, 且满足取 ϕ 的参考点使得在 C 点 $w=0$, 证明, 势函数与速度图 $(u-\mathrm{i}v=\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)$ 平面如 7.12 图所示. 当某个共形映射 F, 将两个平面为互相满映射 (如果没有绝对把握, 暂时不要尝试), 对满足 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z=F(w)$, 这个微分方程解包含一个任意常数. 注意到 A 点 (或对称的 E 点) 以及 B 点的位置是给定的, 推导 h_∞ 与 L 的关系.

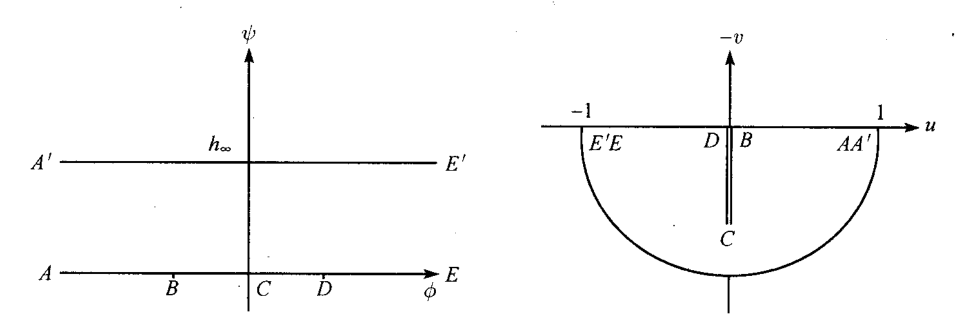


图 7.12　习题 7.14 中流体的势函数和速度图平面

现在考虑 $L=\infty$, 以及在腔内很远处流体几乎停止流动的情况. 证明 B, C, D 在速度图平面汇聚于原点, 该流体区域变成整个半圆内部. 证明

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{1-\mathrm{e}^{\pi w/2h_\infty}}{1+\mathrm{e}^{\pi w/2h_\infty}}=-\tanh\frac{\pi w}{4h_\infty}.$$

求 w, 在图 7.11 中表示的气体尖端 $z=\mathrm{i}/2$, $-\infty<\phi<\infty$ 处满足 $w=\mathrm{i}h_\infty$. 证明, 流体自由表面, $w=\phi+\mathrm{i}h_\infty$, 其中 $-\infty<\phi<\infty$ 满足

$$\mathrm{e}^{\pi x/2h_\infty}\cos\frac{\pi\left(y-\dfrac{1}{2}\right)}{2h_\infty}=1.$$

最后, 证明若 $h_\infty=\dfrac{1}{4}$, 只有条件当 $x\to-\infty$ 时, $y\to\pm h_\infty$ 与该方程相容, 以至于尖端占据半个腔, 则自由边界形状与习题 6.33 中的杀手曲线以及习题 7.19 中的 Saffman-Taylor 尖端一样.

注. 可以证明, h_∞ 是 L 的增函数. 当 $L\to 0$ 时, 流体沿 AB 喷射, 在 B 处右旋一个角度, 再沿 BCD 流动, 在 D 处再右旋一个角度后沿 DE 流动.

*7.15. 黏流沿 x 方向以单位速度穿过 $x=0$, $|y|=1$ 的板, 存在一个由分流线 $y=\pm f(x)$, $x>0$ 限制的, 其上压力为常数的一个跳跃. 证明, 关于分流线 $y=f(x)$, $x>0$ 的自由边值问题为

$$\nabla^2\phi=0\quad 在\ y>0\ 上,\quad \phi\sim x\quad 在无穷远处,$$

且当 $x < 0$ 时满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x,0) = 0,$$

在 $y = f(x),\ x > 0$ 上满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad |\nabla \phi| = 1.$$

同时证明, 在 $w = \phi + \mathrm{i}\psi$ 平面上流体区域当 $\psi = 0, \phi < 0$ 为上游分流线, 可取为 $\psi = 0$, 当在板上 $0 < \phi < \phi_0$ 可取为 $\psi = 0$, 在自由边界 $\phi_0 < \phi$ 可取为 $\psi = 0$. 再证明, 在 $W = \log(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)$ 平面上, 这三条曲线分别对应为 $\mathrm{Im}W = 0, 0 > \mathrm{Re}W > -\infty$; $\mathrm{Im}W = -\pi/2, -\infty < \mathrm{Re}W < 0$; $\mathrm{Re}W = 0, -\pi/2 < \mathrm{Im}W < 0$. Schwarz-Christoffel 理论可以用来证明, 用公式

$$w = \phi_0 \csc^2 W, \quad \text{其中 } \phi_0 = \phi(0,1).$$

可将 W 平面内的流体区域唯一地对应到 w 平面 (即 $\mathrm{Im}w > 0$) 内. 证明这样可以导出全纯微分方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \sqrt{1 - \frac{\phi_0}{w}} - \sqrt{-\frac{\phi_0}{w}}.$$

沿着平板对上式积分, 可以得到 ϕ_0 的方程式, 然后沿着自由边界积分可以证明它由参数形式

$$z = \mathrm{i}\left(1 + \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{\sqrt{w}\mathrm{d}w}{\sqrt{\phi_0 - w} - \sqrt{\phi_0}}\right).$$

给出.

注. Schwarz-Christawful 公式表明, 如果 α_i 是一个封闭多角形的内角, 那么它由参数形式映射

$$z - z_0 = \kappa f(\zeta),$$

其中 κ, z_0 为复常数, 且对于实常数 ζ_i, f 满足

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta} = \prod_{1}^{n} (\zeta - \zeta_i)^{\alpha_i/\pi - 1},$$

将 ζ 平面内的实轴变成包含以上内角的多角形, 而 ζ_i 映成多角形的顶点, 上半 ζ 平面映到多角形内部. 对于固定的 ζ_i, z_0, $\arg\kappa$ 和 $|\kappa|$ 的不同选择对应于多角形的平移、旋转和保持各边比例的膨胀与收缩. 因此, 若给定一个多角形, 以及顶点 ζ_i, 任意三点 ζ_1, ζ_2 和 ζ_3 的像可以分别选择对应于 z_1, z_2 和 z_3, 但是多角形形状由 $\zeta_4, \zeta_5 \cdots$ 唯一决定. 由 Riemann 映射定理可得, $z_4, z_5 \cdots$ 唯一确定 ζ_4, ζ_5, 等等.

$*7.16$. 在时间 $t=0$ 时, 一个二维物体 $y=f(x)-Vt$ (其中 $f(0)=0$, $\mathrm{d}^2f/\mathrm{d}x^2\geqslant 0$ 并且 f 是 x 的偶函数) 从上方撞击处于 $y<0$ 的无黏流体. 忽略重力后, 关于速度势函数的自由边值问题为

$$\nabla^2\phi=0 \quad \text{在液体中, 有} \quad \phi\to 0 \text{当 } y\to-\infty \text{ 时},$$

在自由边界 $y=\eta(x,t)$ 上, 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0,$$

在物体被流体浸湿的表面有

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=-V+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

不失一般性证明 V 可以取为 1. 当物体是楔形时, 满足 $f=\alpha|x|$, 问题在变换 $x'=\mathrm{e}^{\lambda}x$, $y'=\mathrm{e}^{\lambda}y$, $t'=\mathrm{e}^{\lambda}t$, $\eta'=\mathrm{e}^{\lambda}\eta$, $\phi'=\mathrm{e}^{\lambda}\phi$ 下保持不变. 推导相似解 $\phi=t\Phi(X,Y)$, $\eta(x,t)=tH(X)$, $x/t=X$, $y/t=Y$, 其中

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2}=0 \quad \text{在液体中满足}$$

有

$$\Phi-\left(X\frac{\partial\Phi}{\partial X}+Y\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y}\right)^2\right)=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=H-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X}+\frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}X} \quad \text{在 } Y=H(X) \text{ 上},$$

且

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=-1+\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial X} \quad \text{在 } Y=\alpha X-1 \text{ 的浸湿部分上},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y}=0 \quad \text{在 } X=0, Y<-1 \text{ 上}.$$

$*7.17$. 假设习题 7.16 中叙述的物体是 $y=\varepsilon(f(x)-t)$, 其中 $0<\varepsilon\ll 1$, 而 t 不是太大. 证明, 若 $\phi=\varepsilon\phi_0+\cdots$, $\eta=\varepsilon\eta_0+\cdots$ 以及 ε 的二次项可以忽略, $y=0$ 上边界条件可有如下提法, 对某个函数 $d(t)$,

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial\eta_0}{\partial t}=\frac{\partial\phi_0}{\partial y} \quad \text{当 } |x|>d(t) \text{ 时},$$

及

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial y}=-1 \quad \text{当 } |x|<d(t) \text{ 时}.$$

在 $y=0, |x|>d(t)$ 上令 $\phi_0=0$, 用 5.9 节的方法证明

$$\phi_0=\mathrm{Im}(-z+\sqrt{z^2-d^2})$$

为在 “余维数” 为 2 的自由边界 $|x|=\pm d(t)$ 上具有最低奇性的解. 根据 Bernoulli 方程推导, 压力大小约为 $-\partial\phi_0/\partial t$, 在这些点上无界.

注. 若假设 $\eta_0(d(t)+0,t)=f(d(t))-t$, $d(t)$ 的演化可以根据 $f(t)$ 预测.

*7.18. 假设 p 满足 Hele-Shaw 自由边值问题, 在内部有 $\nabla^2 p=0$, 在自由边界 $t=\omega(x,y)$ 上, 有 $p=0$ 以及 $\partial p/\partial n=-v_n$. 证明

$$u(x,y,t)=\int_w^t p(x,y,\tau)\mathrm{d}\tau$$

满足如下障碍问题, 在区域内有

$$\nabla^2 u=1,$$

在 $t=\omega$ 上有

$$u=\frac{\partial u}{\partial n}=0.$$

并证明

$$g(z,t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u-\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right)$$

是解析的, 以及在自由边界上有 $\overline{z}=g(z,t)$.

注 1. 一条解析曲线 $f(x,y)=0$ 可以写成 $\overline{z}=g(z)$, 其中 $f((z+g(z))/2,(z-g(z))/2\mathrm{i})=0$. 函数 g 被称为曲线的 Schwarz 函数, 可以证明, 它满足 $g(\overline{g}(z))=z$, 当我们将一个实方程 $(f(x,y)=0)$ 用复方程 $\overline{z}=g(z)$ 取代, 其为一个必要的相容性条件. 其决定涉及求解实部与虚部的 Cauchy 问题, 因此其在曲线附近极有可能出现奇性.

注 2. 对于以上的 Hele-Shaw 问题, g 在流体中的奇性与 t 无关, 除非其奇性与 ϕ 的奇性一样, 这是因为 $\partial u/\partial t=p$.

*7.19. 在平行通道, $-\pi<y<\pi$, $-\infty<x<\infty$ 中的 Hele-Shaw 流, 在 $x=+\infty$ 处, 流体被以一个恒定的速度清除, 速度为 $(V,0)$. 证明, 若 $z=f(\zeta,t)$ 将流体区域映射到 $|\zeta|<1$ 和将 $x=+\infty$ 处的汇映射到 $\zeta=0$, 则当 $\zeta\to 0$ 时, $f(\zeta,t)=-\log\zeta+O(1)$, (7.106) 中的 Q 由 $-2\pi V$ 取代. 利用 (7.106) 证明映射

$$z=f(\zeta,t)=\frac{Vt}{\lambda}-\log\zeta+2(1-\lambda)\log\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)$$

给出了一个行波解, 以 $U=V/\lambda$ 的速度移动, 其中 λ 为任意介于 0 到 1 之间的数. 令 $\zeta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 证明交界面方程为 $\mathrm{e}^{(x-Ut)/2(1-\lambda)}=\cos(y/2\lambda)$, 因此当 $x\to-\infty$ 时, 交界面趋近于 $y=\pm\lambda\pi$.

注. 存在一个不稳定的精确解, 一个近似于正弦极小的扰动都可以使平坦的表面在 $t \to \infty$ 时, 演变成 Saffman-Taylor 尖端. 我们无法用这么简单的模型来完全确定 λ 的值, 决定该值的问题是一个 "模式" 选择的实例. 在实验中, 经常看到 $\lambda = 1/2$, 对它给出曲率流的杀手曲线解 (见习题 6.33).

7.20. 在 Muskat 问题中, 当考虑重力时, 其自由边界条件为

$$p_w = p_o, \quad -K_w \frac{\partial}{\partial n}(p_w + \rho_w g y) = -K_o \frac{\partial}{\partial n}(p_o + \rho_o g y) v_n,$$

其中 p_w 和 p_o 为边界两侧的压强, $K_{w,o} = k_{w,o}/\mu_{w,o}$, y 方向为竖直方向. 证明, 当自由边界为 $y = Vt$ 时, 行波解存在并满足

$$p_w = -(V/K_w + \rho_w g)(y - Vt), p_o = -(V/K_o + \rho_o g)(y - Vt).$$

另证, 若自由边界有一个小扰动变为 $y = Vt + \varepsilon \mathrm{e}^{\sigma t} \sin kx$, $k > 0$ 且 ε 很小, 则

$$\frac{\sigma}{k} = \frac{gK_w K_o(\rho_o - \rho_w) + (K_w - K_o)V}{K_w + K_o},$$

并推导, 若 V 趋向 $-\infty$, 即使一种比重大且更黏稠的流体压在比重小的流体上面, 整个问题仍然是稳定的.

7.21. 证明 (7.114) 中的法向 $\boldsymbol{n}$ 和次法向 $\boldsymbol{b}$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= (-\cos(s - \omega t), -\sin(s - \omega t), 0), \\ \boldsymbol{b} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b \sin(s - \omega t), -b\cos(s - \omega t), a), \end{aligned}$$

且曲率为 $a/(a^2 + b^2)$. 推导只要

$$V = \omega + \frac{1}{4\pi} \frac{\log d_0}{b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

就有 (7.114) 中点的速度满足 (7.113).

第 8 章　非拟线性方程

8.1　引　　言

若干实际情况提出的偏微分方程不是拟线性的. 例如, 假定 $u(x,y)$ 是桌面上的干沙处于一种终极平衡状态时各点沙的高度, 因此再有沙倾倒在沙堆上就会滑下. 于是 $u(x,y)$ 的法向与铅直方向的夹角是一个常数 γ 即摩擦角, 因此有

$$\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{-1/2}=\cos\gamma.$$

稍微进行一下自变量的变换, 它就化为著名的 *短时距方程*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=1. \tag{8.1}$$

(8.1) 有一个比沙堆问题更加现实的应用. 这是关于描述波在频率域传播的 Helmholtz 方程的近似解. 我们回忆这个方程是将波动方程 $\partial^2\phi/\partial\tau^2=a_0^2\nabla^2\phi$ 的解写成

$$\phi=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\psi(x,y)) \tag{8.2}$$

而导出的, 其中, 我们已经用 τ 代替波动方程中的 t, 以避免记号的混淆. 这样, 在无量纲变量下, 得到 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi=0, \tag{8.3}$$

如同在 (5.27) 一样, 这里 $k=\omega L/a_0$, 而 L 是波传播的特征长度. 例如对光的传播等, 典型的是 $\omega/a_0\sim10^7\ \mathrm{m}^{-1}$, 因此对日常的尺度 $L\sim1$ m, k 是很大的. 在这种情形, Helmholtz 方程的渐近近似被称为 *几何光学理论*. 它依赖于对常微分方程的 WKB 渐近过程, 即我们记

$$\psi\sim A(x,y;k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ku(x,y)}\quad \text{当 } k\to\infty, \tag{8.4}$$

因此

$$\begin{aligned}
\nabla\psi&\sim(\mathrm{i}kA\nabla u+\nabla A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ku},\\
\nabla^2\psi&\sim(-k^2A|\nabla u|^2+2\mathrm{i}k\nabla A\cdot\nabla u+\mathrm{i}kA\nabla^2u+\nabla^2A)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ku},
\end{aligned}$$

比较 $O(k^2)$ 的项, 我们又一次得到对于 u 的 (8.1) 式[157].

方程 (8.1) 还有一个比较不为人知但不乏兴趣的来源, 即在短时间内的热传导问题. 我们已经由 (6.35) 看到, 在有限的二维介质中, 对位于 $x=y=t=0$ 的热源的响应是 Green 函数 $(1/4\pi t)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/4t}$. 因此, 当问题有边界时, 我们采用 WKB 近似方法, 用

$$T\sim\frac{1}{4\pi t}\mathrm{e}^{-V(x,y)/t}$$

代入热传导方程 $\partial T/\partial t=\nabla^2 T$, 当 $t\to 0$ 比较 t 的最低次项的系数得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=V.$$

那么 $u=2\sqrt{V}$ 满足 (8.1).

从上述几个模型我们可以看到, (8.1) 应该有有趣的性质, 因为它可以预测从颗粒状材料堆的外形到光线模式的几何形状. 正如 [32] 指出的, 非拟线性常微分方程要比拟线性常微分方程具有有趣得多的性质.

然而, 在某种意义下, 没有必要用整整一章来写这个课题, 因为正如在第 2 章解释过, 任何偏微分方程总能写成一个拟线性方程组. 但是, 这通常只有在付出交叉求导、导致信息丢失和一个大大扩张的方程组的代价才能做到. 而且从实际的观点出发, 按某种的物理变量去揭示数学的预测结果要比用它们复杂的导数去解释容易得多.

8.2 一阶标量方程

8.2.1 两个自变量

我们回忆 3.1 节中的一阶拟线性方程

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c \tag{8.5}$$

可以通过几何解释或 u 的所有导数都用已知的 Cauchy 数据计算出来的方法进行处理. 当我们研究形如

$$F(x,y,u,p,q)=0, \tag{8.6}$$

其中 $p=\partial u/\partial x$; $q=\partial u/\partial y$ 时的方程, 这两种选择都不能立即应用. 而且先前的理论揭示, 很少有机会像对拟线性方程那样将方程 (8.6) 化为常微分方程组. 我们这

157 用 "静态相" 逼近 Fourier 积分可以说明, 当用 Fourier 变换求解 (8.3) 式适用时, 其高频极限常常被一个位置由下节所述 Charpit 方法求得的鞍点的贡献所控制.

样说是因为交叉求导导致关于向量 $\boldsymbol{w}=(u,p,q)^{\mathrm{T}}$ 的以下方程组

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}-p\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}-p\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p, \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=q, \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}=0. \tag{8.11}$$

因此, 正如我们下面将进行的, 从这组方程中选择三个独立方程时, 我们希望是 1.3 节叙述过的情形; 只有很难得的情形有三个变量的偏微分方程组沿着特征是可积的. 然而正如我们很快看到的 (8.7)~(8.11) 是非常特殊的方程组.

从几何的观点看 (8.6) 比 (8.5) 复杂得多. 它表示在每一点解曲面的法线必须落在一个锥 (称为 **法锥**, 尽管可能与 2.6 节的概念相混) 上, 因为当我们 “冻结” x, y 和 u, (8.6) 恰恰就是解曲面 $u=u(x,y)$ 的法线方向余弦之间的关系. 仅在拟线性情形, 法锥才会退化为一个平面.

现在让我们强调用 $\boldsymbol{w}$ 在 (x,y) 平面任意曲线上的值决定 $\boldsymbol{w}$ 的 Cauchy 问题. 用 t 作为参数表示特征, 我们将发现 $\boldsymbol{w}$ 的偏导数也满足关系式

$$\dot{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\dot{u}, \tag{8.12}$$

$$\dot{x}\frac{\partial p}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial p}{\partial y}=\dot{p}, \tag{8.13}$$

$$\dot{x}\frac{\partial q}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial q}{\partial y}=\dot{q}, \tag{8.14}$$

其中, 与往常一样 $\dot{}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 我们可以暂时抛弃 (8.9), (8.10) 和 (8.12), 因为与 (8.6) 一起, 他们是 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的相容方程. 进而, 通过消去 $\partial p/\partial x$ 和 $\partial q/\partial y$, 剩下的方程可以写成

$$\dot{y}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=-\dot{y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial u}\right)-\dot{q}\frac{\partial F}{\partial q}, \tag{8.15}$$

$$-\dot{y}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\dot{x}\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=-\dot{x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+q\frac{\partial F}{\partial u}\right)-\dot{p}\frac{\partial F}{\partial p}, \tag{8.16}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}=0. \tag{8.17}$$

特征线如通常那样定义为在其中不能由 (8.6) 和 $\boldsymbol{w}$ 在其上的值唯一确定 $\boldsymbol{w}$ 的法向

导数值的曲线. 因此, 在特征线上成立

$$\dot{y}\frac{\partial F}{\partial p}-\dot{x}\frac{\partial F}{\partial q}=0. \tag{8.18}$$

而且 (8.15)~(8.17) 的相容性要求 (8.15) 和 (8.16) 的右端是相等的, 因此 (8.18) 式应该为零.

最后, 我们有选择参数 t 的自由度, 容易看到最方便的选择是使得

$$\dot{x}=\frac{\partial F}{\partial p},$$

因此,

$$\dot{y}=\frac{\partial F}{\partial q}.$$

现在相容性条件化为

$$\dot{p}=-\frac{\partial F}{\partial x}-p\frac{\partial F}{\partial u},\quad \dot{q}=-\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial u},$$

最后, 我们回到 (8.12) 式, 得出

$$\dot{u}=p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}.$$

将这些方程组合在一起, 我们有

$$\begin{aligned}&\dot{x}=\frac{\partial F}{\partial p},\quad \dot{y}=\frac{\partial F}{\partial q},\quad \dot{u}=p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q},\\&\dot{p}=-\frac{\partial F}{\partial x}-p\frac{\partial F}{\partial u},\quad \dot{q}=-\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial u},\end{aligned} \tag{8.19}$$

称为 Charpit *方程*. 在 $t=0$ 给定适当的初始条件, 它们有唯一解, 至少对小的 t 是这样. 但是, 尽管初始条件在拟线性的情形是适用的, 现在还要求知道 p, q 和 u 一起在初始曲线 $t=0$ 上的状态. 更确切地, 给定初始条件 $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$ 和 $u=u_0(s)$, 我们需要从两个方程

$$F(x_0,y_0,u_0,p_0,q_0)=0 \quad 和 \quad u_0'=p_0x_0'+q_0y_0'$$

中同时解出 p_0 和 q_0, 其中 "$'$" 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$, 而正如 (8.18) 所揭示的, $y'\partial F/\partial p-x'\partial F/\partial q$ 不为零是局部可解的条件. 那么, 若我们将 (8.19) 相应的解写作

$$x=x(s,t),\quad y=y(s,t),\quad u=u(s,t),\quad p=p(s,t),\quad q=q(s,t)$$

以及若 $|\partial(x,y)/\partial(s,t)|$ 既非零又非无穷, 我们断言

• 消去 s 和 t 就得到偏微分方程 $F(x,y,u,p,q)=0$ 的解 $u=u(x,y)$.

若这一叙述成立, 那么它是一个引人入胜的结果, 因为我们将解一个两自变量的任意一阶标量偏微分方程的任务化为求解五个自治常微分方程的方程组. 然而正如我们前面已经指出, 这是无法指望的. 因此, 我们必须仔细考察这一叙述. 但在这样做之前, 我们先阐述两点提醒.

首先, 除非原方程是拟线性的, 否则 p_0 和 q_0 的确定几乎肯定是不唯一的. 因此, 与非线性常微分方程一样, 在对 Charpit 方程积分之前需要附加信息.

其次, 由于常微分方程 (8.19) 是非线性的, 即使整体解存在, 也可能在有限的时间内破裂, 它可能表现出混沌的性态. 对拟线性方程这也是对的, 但是现在当我们考察解的整体结构时, 我们会遇到的不是激波的发展而是奇性的发展.

现在回到上述断言, 它的成立不仅需要 u 显式地满足 (8.6), 还要证明, 对 $\boldsymbol{w}$ 成立 $p=\partial u/\partial x$ 和 $q=\partial u/\partial y$. 因为上述断言并不能保证这些关系成立 (记住 p 和 q 原来是通过这些关系式引入的, 但是在 (8.7) 之前, 我们将 $\boldsymbol{w}$ 取为一个具有三个独立分量的向量). $\boldsymbol{w}$ 满足 (8.6) 立即可以验证, 因为利用 (8.12)~(8.14) 有

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial F}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q}=0;$$

在 $t=0$ 时, $F=0$, 因此对一切 t, s, $F\equiv 0$, 从而对一切 x, y 它也成立.

为了证明 $p=\partial u/\partial x$ 和 $q=\partial u/\partial y$, 只要证明 $\dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y}$ 和 $u'=px'+qy'$ 就足够了. 前一条件从 (8.12)~(8.14) 立刻得到. 然后微分 ϕ 并利用 $\dot{u}=p\dot{x}+q\dot{y}$ 关于 s 的偏导数, 我们有

$$\begin{aligned}\dot{\phi}&=p'\dot{x}+q'\dot{y}-\dot{p}x'-\dot{q}y'\\&=\frac{\partial F}{\partial x}x'+\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial p}p'+\frac{\partial F}{\partial q}q'+\frac{\partial F}{\partial u}(px'+qy')\\&=\frac{\partial F}{\partial s}-\phi\frac{\partial F}{\partial u},\end{aligned}$$

其中 $\partial F/\partial s$ 是将 t 固定为常数计算的. 但 $F\equiv 0$, 所以 $\partial F/\partial s=0$; 在 $t=0$ 也成立 $\phi=0$, 因此 $\phi=0$ 对一切 t 成立 (不管函数 $\partial F/\partial u$ 是什么) 以及 $u'=px'+qy'$, 因此 p 和 q 事实上是 u 的导数.

现在我们将特征的定义拓广为: Charpit 方程 (8.19) 定义了 5 维空间 (x,y,u,p,q) 的特征, 或等价地定义了 3 维空间 (x,y,u) 上的 **特征带**. 即在每一点 (x,y) 上定义了一个面元, 解曲面就是由特征带 “粘合” 在一起构成的. 这种解仅当 Jacobi 行列式 $|\partial(x,y)/\partial(s,t)|\neq 0$, 即

$$x'\frac{\partial F}{\partial q}\neq y'\frac{\partial F}{\partial p}\tag{8.20}$$

成立时才存在. 如前所述, Cauchy 问题必须满足此条件 ((8.14)~(8.20) 对 $\partial F/\partial u = 1$ 的较简单情形的导出由 [5] 和习题 8.5 给出).

观察到法锥的对偶锥, 垂直于法锥的每条母线的平面的包络在每一点都与解接触可给出 Charpit 方程的几何导出. 于是解曲面是这些 *对偶锥* (也称为 Monge 锥) 的包络. 对拟线性情形, 因为 $ap+bq=c$, 法锥是一个平面, 而对偶锥退化为一条方向为 (a,b,c) 的直线, 它必须与解曲面相切. 在完全非线性的情形, 我们可以用求平面 $(x-x^*)p+(y-y^*)q=u-u^*$ 通过点 (x^*,y^*,u^*) 的包络并满足 $F(x^*,y^*,u^*,p,q)=0$ 来求得 Monge 锥. 如同 2.6 节, 包络由

$$x-x^*=\lambda\frac{\partial F}{\partial p},\quad y-y^*=\lambda\frac{\partial F}{\partial q}$$

给出, 其中 p, q, λ 必须利用这四个关系式消去. 消去 λ 我们得到

$$\frac{x-x^*}{\partial F/\partial p}=\frac{y-y^*}{\partial F/\partial q}=\frac{u-u^*}{p\partial F/\partial p+q\partial F/\partial q},$$

从而对接近 (x^*,y^*,u^*) 的 (x,y,u) 位于特征带上的一个小向量 $(\delta x,\delta y,\delta u)$ 满足

$$\frac{\delta x}{\partial F/\partial p}=\frac{\delta y}{\partial F/\partial q}=\frac{\delta u}{p\partial F/\partial p+q\partial F/\partial q}=\delta t.$$

我们不能消去 p 和 q, 但是利用 (8.7)~(8.11) 可以得到 δp 和 δq 的如下表达式

$$\begin{aligned}\delta p&=\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\frac{\partial p}{\partial y}\delta y=\delta t\left(-\frac{\partial F}{\partial x}-p\frac{\partial F}{\partial u}\right),\\ \delta q&=\frac{\partial q}{\partial x}\delta x+\frac{\partial q}{\partial y}\delta y=\delta t\left(-\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial u}\right),\end{aligned}$$

最后, 令 $\delta t\to 0$, 我们又一次发现了 Charpit 方程 (8.19).

上述讨论清楚地揭示了由通过 (x,y,u) 空间的给定点的所有特征构成的所谓 *积分劈锥* 是存在的. 积分劈锥是该点 Monge 锥的整体延拓, 而 (8.6) 的 Cauchy 问题的解可以几何地想象为通过初始曲线的所有积分劈锥的包络. 正如图 8.1 表明, 这样的结构揭示了我们在本节早些时候提到的不唯一性, 情形比我们勾画的单片劈锥的情形还要复杂得多.

一个最后的一般注释是关于我们不能求解 Charpit 方程但可幸运地猜出 (8.6) 具有如 $f(x,y;\alpha,\beta)$ 的双参数解族. 那么容易验证, 对任意函数 $\beta(\alpha)$, 从

$$u=f(x,y;\alpha,\beta(\alpha))\quad 和\quad \frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\partial f}{\partial\beta}=0$$

中消去 α, 它仍然是解. 因而, 若 (8.6) 的一个具有任意常数的解可以求得, 那么通过选择不同的 $\beta(\alpha)$, 我们可以得到更多的解. 事实上正如已在 1.9 节中叙述的

那样, 我们指望任何一个两自变量的一阶偏微分方程的通解至少包含一个单变量的任意函数. 在 1.5 节中所考虑的拟线性情形, 通解是由设特征常微分方程的一个积分常数为其他积分常数的任意函数而得到的. 然而要仿效这一点, 对 Charpit 方程需更加繁琐的过程.

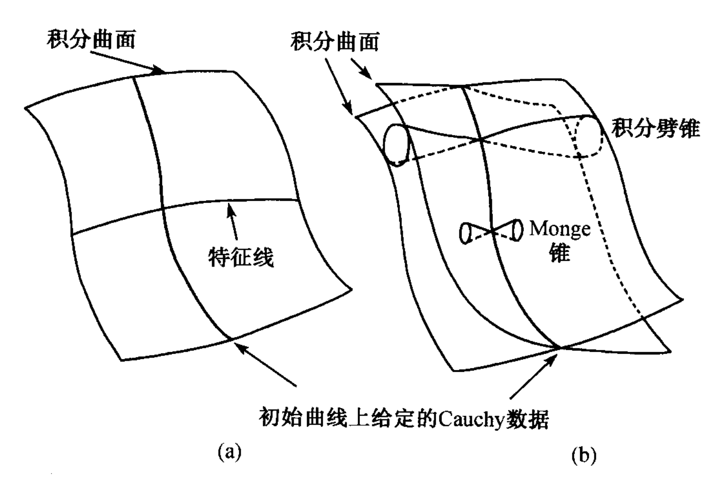


图 8.1　Cauchy 问题的解: (a) 拟线性情形; (b) 非拟线性情形

8.2.2　更多自变量的情形

上述讨论不能拓广至高阶标量方程或向量方程, 但将其拓广至 m 个自变量的情形倒是并不十分困难的. 将符号改变为

$$F(x_i, u, p_i) = 0, \quad \text{其中 } p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, \cdots, m, \tag{8.21}$$

Charpit 方程为

$$\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \tag{8.22}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial u}, \tag{8.23}$$

$$\dot{u} = \sum_1^m p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}. \tag{8.24}$$

任何熟悉经典力学的人都可以观察到: 若 F 与 u 无关, 则 (8.22) 和 (8.23) 就是 Hamilton 方程, 其中 x_i 是广义坐标, p 是广义动量, 而 F 是 Hamilton 函数. 由于我们不难将关于 Charpit 方程给出此情形的偏微分方程解的结论推广, 从而得出如下重要的结果: 任何具有有限自由度的经典力学问题均等价于一个成立 $\partial F/\partial u = 0$ 的一阶标量偏微分方程. 在 8.3 节中我们将进一步探讨其含义.

我们指出, 虽然 Cauchy 问题包含了给定在一个 $m-1$ 维曲面上的数据, 但是 (8.21) 的解仍然用我们称为特征曲线的一维曲线上满足的常微分方程来表示. 此情形是 1.8 节中情形的推广. 因此, 在 $m>2$ 时, 将这些一维曲线称为 *次特征* 而将特征这一词保留给 $m-1$ 维曲面.

前述理论为许多科学和工业中的激动人心的研究铺平了道路, 现在我们叙述其中的几个, 而且通常从最简单的构架开始.

8.2.3 短时距方程

当 F 不显式地依赖于 x, y 和 u 时, Charpit 方程就大大地简化了. 对此情形, $\dot{p}=\dot{q}=0$ 在特征上成立, 因此 $p=p_0(s)$, $q=q_0(s)$, 而特征在 (x,y) 平面上的投影, 通常称为 *射线* 的是具有斜率 $(\partial F/\partial q)_0/(\partial F/\partial p)_0$ 的直线 (和前面一样下标 0 表示在初始曲线上的值). 在这些射线上成立

$$x=x_0+t\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0,\quad y=y_0+t\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0,\quad u=u_0+t\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0,\tag{8.25}$$

解可以由先消去 t 然后再消去 s 得到, 因为在每一点都有一条直线落在解曲面上. 因此, 它是 *尺曲面* 的一种特殊情形, 对这种曲面, 我们在本章最后一节还要讨论.

8.2.3.1 沙堆

当 (8.1) 是用来作为水平基础上的沙堆的模型时, 边界条件为在 $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$ 上 $u=0$[158]. 因此, $p_0x_0'+q_0y_0'=1$ 以及 $p_0^2+q_0^2=1$, 由此得

$$p_0=\frac{\pm y_0'}{((x_0')^2+(y_0')^2)^{1/2}},$$

其中必须选择适当符号使沙堆位于 $u>0$, 射线方程 (8.25) 化为

$$x=2tp_0+x_0,\quad y=2tq_0+y_0,\quad u=2t,$$

并假设底部的边界是光滑的, 解可以通过在 $x-x_0=up_0$ 和 $y-y_0=uq_0$ 中局部消去 s 得到. 并非在所有情形都能显式求解, 我们考虑两种特殊情况.

对圆形的底部, 我们有

$$x_0=\cos s,\quad y_0=\sin s,$$

我们得

$$p_0=-\cos s,\quad q_0=-\sin s$$

以及

$$u=1-(x^2+y^2)^{1/2}.$$

---

158 对这样的边界条件, 解 u 也是从 (x,y) 到曲线 $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$ 的最短距离, 见习题 8.2.

因此, 沙堆是截面为圆的锥, 顶点为 $u=1$, $x=y=0$; 事实上它是该点的积分劈锥, 如图 8.2 所示.

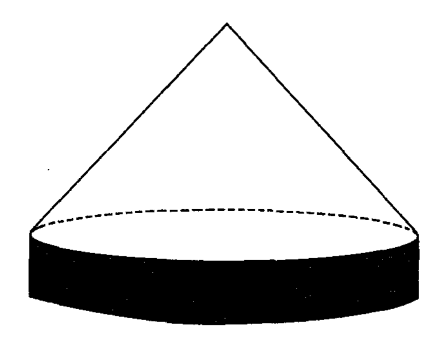


图 8.2　圆底上的沙堆

解在顶端破碎, 我们可以通过计算 Jacobi 行列式 $|\partial(x,y)/\partial(s,t)|$ 来证实, 它具有以下形式

$$2py'-2qx'=2(2t(q_0'p_0-q_0p_0')+y_0'p_0-x_0'q_0)=2(2t-1).$$

当 $t=1/2$, $u=1$ 和 $x=y=0$ 时为零. 因此, 应限制此区域定义在 $t<1/2$, 即圆周内部减去圆心.

对椭圆形的底部, 我们有 $x_0=a_0\cos s$ 和 $y_0=b\sin s$, 成立 $a>b$, $p_0=-\cos\theta$ 和 $q_0=-\sin\theta$, 其中 $b\tan\theta=a\tan s$, 为了避免直接消去 s 和 θ 的代数复杂性, 我们只考虑射线模式, 典型的射线有方程

$$y-b\sin s=\tan\theta(x-a\cos s),\quad a>b>0, \tag{8.26}$$

而且截距 $y=0$, 并由对称性, 至少还有另一条射线 $x=((a^2-b^2)/a)\cos s$. 因此, 解在 $y=0$, $|x|\leqslant(a^2-b^2)/a$ 破裂, 且解有一 "脊线", 脊线的高度是难以求得的, 但在 $x=0$, 此时 $s=\pi/2$, $\theta=3\pi/2$, 有 $u=b$; 而在 $x=(a^2-b^2)/a$, $s=0$, $\theta=\pi$, 因此 $u\doteq b^2/a$.

上述讨论有直觉的成分, 因为我们大胆地断言脊线是存在的. 很清楚, 这和我们日常生活的经验是相符的, 如一匙堆起的干燥的糖就是如此. 但在下一例中, 我们将看到 (8.1) 有另一个数学上的解, 它并不 "停止" 在脊线上, 事实上脊线令人联想起第 1 章和第 2 章拟线性理论中遇到的激波, 而且稍后我们还要说到它们的数学地位.

8.2.3.2　几何光学

由于几何光学是由与沙堆问题同样的方程描述的, 可能会以为关于它已没有更多的东西要说. 然而对因变量的物理解释是完全不同的, 独立发展一套理论是必要的.

(8.1) 在 (x,y) 平面的特征投影当然是直线, 它在几何光学应用中被称为 *光射线*, 它们是平行于 ∇u, 从而垂直于 u 的等值线, 相当于沙堆问题中的等高线. 然而, 如果我们回到时间域, 如 (8.2) 那样, 定义相位 ϕ 的等值线为 *波前* 就是很自然的[159]. 因此, 记住 u 在 (8.4) 中的定义, 若 $u=u_0$ 在 $\tau=\tau_0$ 定义了一个波前, 而

159 这与 4.6 节中的术语一致.

(x_0, y_0) 是其上的一点, 那么在以后的时间 τ_1, 波前由 $u = u_1 = u_0 + \tau_1 - \tau_0$ 给出; 这时在 $u = u_1$, 计算的积分劈锥 (此时是 Monge 锥) 即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (u_1 - u_0)^2 = (\tau_1 - \tau_0)^2 \tag{8.27}$$

的包络在 (x, y) 平面上的投影, 其中 x_0 和 y_0 在 $\tau = \tau_0$ 的波前上变化. 如图 8.3 所示, (8.27) 表示一族给定半径的圆, 称为 Huygens 结构. 若波速不是常数, 如介质的折射率不是常数, 则 k 是位置的函数, 射线是弯曲的, Huygens 结构只在小的时间区间中成立.

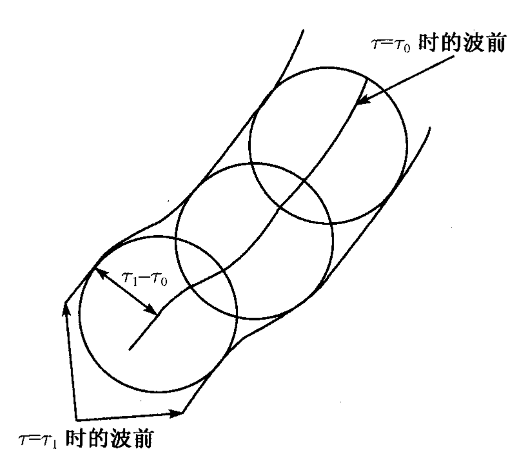


图 8.3 Huygens 结构

在我们用几何光学表示波传播有实际意义的解之前, 我们必须先说明两个严峻的困难. 第一, 是我们已经在沙堆问题中遇到过的特征线相交的现象. 在光学中对特征线相交的解释与第 1 章和上一个例子是根本不同的. 在后两种情形, 要求因变量是单值的, 特征线相交导致激波或脊线. 然而, 对波的应用, 并不要求相位必须是单值的, 甚至是实 (这是以后我们会提到的另一话题) 的限制, 因为没有理由说在一点不存在许多个波. 因此, 特征线可以通过交点延伸出去, 通常它们形成一个包络 [160]称为 *焦散*. 一个著名的例子是 $|\nabla u|^2 = 1$ 的 Charpit 方程, 带有给定在半径为 $\sqrt{2}$ 的圆周上的初始条件

$$u_0 = s \quad 在\ x_0 = \cos s + \sin s,\ y_0 = \sin s - \cos s\ 上, \tag{8.28}$$

我们稍后会发现

$$p = p_0 = -\sin s \quad 或 \quad p_0 = \cos s,$$
$$q = q_0 = \cos s \quad 或 \quad q_0 = \sin s,$$

160 当然在特殊情形, 射线可能 "聚焦" 于一点. 但这种几何形状对小扰动是不稳定的, 稳定包络能够用突变理论来 [1] 分类.

而重新定义参数 t 便得 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = p$ 等等, 有

$$x = \cos s - (t-1)\sin s \quad 或 \quad x = \sin s + (t+1)\cos s,$$
$$y = \sin s + (t-1)\cos s \quad 或 \quad y = -\cos s + (t+1)\sin s,$$
$$u = s + t,$$

分别对应于 s 的任意值. p_0 和 q_0 都有两个值而射线包络为一个在 $x^2+y^2=1$ 上的圆形焦散, 如图 8.4 所示.

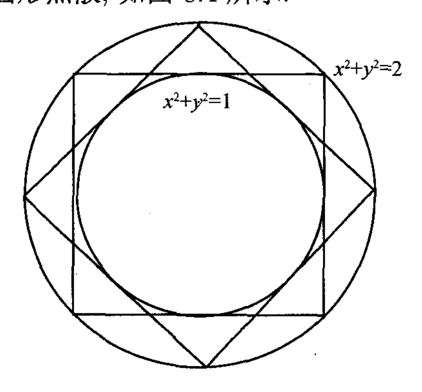


图 8.4　圆中的圆形焦散

在这种情形, 焦散将区域分成较亮的区域 $x^2+y^2>1$ 和较暗的区域 $x^2+y^2<1$, 在较亮区域的每一点有两条射线. 所有的焦散都有这种特性[161]. 然而在实际中最容易看到的是阳光通过几乎斟满的咖啡杯. 杯壁弯曲反射的肾形, 在亮区的每一点有四条射线通过, 而在暗区每一点只有两条射线通过 (见习题 8.8 和图 8.8).

图 8.4 中射线的集束表明, 最亮的区域靠近焦散. 为了更确切地看到这一点, 我们注意到对一般情形, 解为

$$x = p_0(s)t + x_0(s), \quad y = q_0(s)t + y_0(s), \quad u = t + u_0(s), \tag{8.29}$$

其中

$$p_0^2 + q_0^2 = 1 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s}p_0 + \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s}q_0 = \frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s},$$

可得 Jacobi 行列式 (见习题 8.11)

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| = (q_0p_0' - p_0q_0')(t + T(s)),$$

其中

$$T(s) = \frac{q_0x_0' - p_0y_0'}{q_0p_0' - p_0q_0'}.$$

因此, 除非 $q_0p_0' = p_0q_0'$, 这只会在 u 为实的且为 x, y 的线性函数的平面波时才会发生, 在 $t=-T(s)$ 时总有一焦散曲线. 这对 (8.4) 中的振幅 A 就有非常重要的影响. 在渐近分析时令 $O(k)$ 的项等于零, A 满足

$$A\nabla^2 u + 2\nabla u \cdot \nabla A = 0, \tag{8.30}$$

161 我们将看到, 这是因为在 (8.4) 焦散内部的场按参数 k 以指数形式变小.

这是关于 A 的线性偏微分方程, 用第 1 章的方法可得一显式解; 按照习题 8.11 所述, 我们求得

$$A(s) = A_0(s)\sqrt{\frac{T(s)}{t+T(s)}}, \tag{8.31}$$

它表明, 当 $t \to -T(s)$ 时, 亮度增加. 在本例中 $T=-1$, 而 A 当 $t \to 1$ 时, 有一个平方根倒数的奇性. 这清楚地警示几何光学渐近分析已经失效, 我们必须对 Helmholtz 方程在靠近焦散曲线处进行更加高频的近似, 但这样做不符合本书的精神 [162].

一个焦散曲线不那么对称的实例已经在椭圆沙堆问题的解 (8.26) 中遇到过. 越过脊线延伸特征线, 得到如图 8.5 所示的射线图, 而不久我们就会清楚, 在给定 u 为常数的 Dirichlet 边界条件, 焦散线发展成为尖点, 达到其曲率的最大值或最小值 (见习题 8.9).

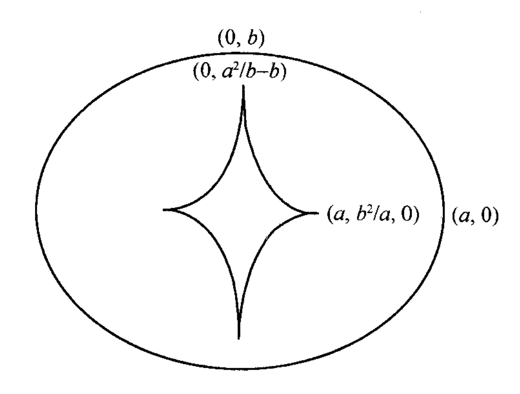


图 8.5 椭圆中的焦散

总而言之, 波传播时特征线相交引起的问题与在那些要求 u 是单值的问题相比是无足轻重的. 虽然焦散线会局部引起射线模型的扰动, 但它不会像激波或脊线那样对解造成整体的影响.

我们第二个严峻的困难是关于我们考虑的构架包含物理边界的实际的射线理论. 最常见的是射线平行于 x 轴, 波前平行于 y 轴的平面波有光滑的凸障碍的散射 [163] (见图 8.6). 在障碍边界上给定的是 Dirichlet 或 Neumann 条件. 这种情形可

162 对几何光学心存疑问的人, 可以考察 Helmheltz 方程的精确解, 函数

$$\psi = J_k\left(k\sqrt{x^2+y^2}\right)\exp\left(\mathrm{i}k\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

在 $k\to\infty$ 的极限, 只要不靠近焦散曲线, 对 $x^2+y^2>1$ (8.28) 的解是 $\psi\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/4}$ 的渐近极限.

163 当散射体为圆柱, 可用分离变量法精确地写出反射场, 遗憾的是包含 $H_n^{(1)}(kr)\cos n\theta$ 的特征函数的渐近展开是不易得到的.

以在成像、雷达或超声测试时出现, 初看起来, 我们要做的只是遵循熟悉的光学规则, 如图 8.6 那样画出射线的反射就可以了.

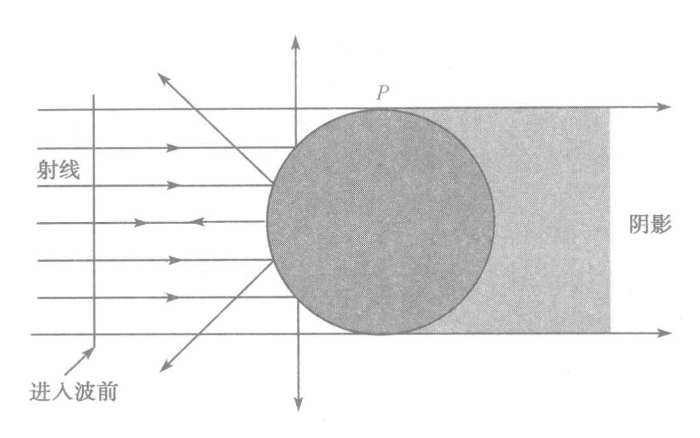


图 8.6　到圆柱的平面波散射

这个过程的验证或否定是一件令人吃惊的复杂的事, 需要从头开始对基本的反射过程进行分析. 假设, 有 Dirichlet 边界条件 $\phi = 0$ 以及入射波 e^{ikx}. 当我们将整个场写成 $\mathrm{e}^{ikx} + \psi \sim \mathrm{e}^{ikx} - A_e^{iu}$ 时, 在边界上有 $A_0\mathrm{e}^{iku_0} = \mathrm{e}^{ikx_0}$, 即 $u_0 = x_0$, $A_0 = 1$, 散射射线的方向是 (p_0, q_0) 它满足

$$\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s} = p_0\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s} + q_0\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s};$$

这说明与散射体相切的方向与反射线的夹角是和切线与入射射线的夹角是相同的, 这称为 *镜面反射*, 且虽然我们仅对几何光学导出这一定律, 但它对完全标量波动方程的平面波解都是适用的.

这一讨论一般都是成立的, 除非散射体有角点或者像在图 8.6 的点 P, 射线从边上擦过 164. 对这两种情形, 几何光学的渐近分析必须进行修改. 这将变得太复杂, 不宜在这里进行讨论. 但它们形成了 J. B. Keller 的衍射几何理论 [5] 的基础. 这一修改不可能是局部的, 比如其就涉及物体的阴影部分. 若散射体有凹陷, 焦散的出现几乎是不可避免的.

我们用三点注记来结束这一很大话题的简短讨论. 第一, 我们完全没有理由不对整个波动方程而只对单个 Fourier 分量用 WKB 类的渐近分析. 此时, 没有大的参数 k 来做渐近展开. 但是我们可以验证, 在比我们考虑解的尺度小得多的波长时, 这一过程是合理的. 所以,

$$\psi \sim A\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x,y,\tau)},$$

164 注意射线解在 P 点的破裂可以比作靠近焦散线的情形, 因为一条入射和一条反射的两条射线在 P 点重合.

此时, ∇u 是大的, 我们得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2. \tag{8.32}$$

它当然可以用 Charpit 方法求解 (见习题 8.12), 但它更确切的是二维波动方程的特征方程, 2.6 节中已用不同的符号给出. 因此, 几何光学的方法与特征理论是符合的, 这一点我们已经从本章及第 4 章中讨论射线和波前的一致性明显地看到了. 射线仅仅就是与 Charpit 方程相关的次特征. 然而几何光学的好处是允许包含较长波长效应的改进. 因为我们可以在 (8.4) 中将 A 作为的幂的倒数的级数来进行计算; 特征理论只是 "零 - 波长" 的极限状况 [165].

第二, 我们没有理由不将几何光学方法用于修改的 Helmoltz 方程

$$(\nabla^2-k^2)\psi=0. \tag{8.33}$$

我们已经看到此方程刻画的物理问题与波的传播是相当不同的, 但通过设 $\psi\sim Ae^{ku}$, 我们又一次得到 (8.1)! 然而 (8.33) 和 (8.3) 的物理解释的差别已经多处出现: 由 (8.33) 正确建模的问题, u 必须是单值的, 因此像 (8.26) 的 "脊线" 解对诸如椭圆形容器中的化学反应是适当的. 而且由 (8.33) 出发, 我们能对脊线结构用与第 2 章、第 6 章和第 7 章的思想进行类似于 "激波" 的分析 (见习题 8.14).

最后, 我们提及可能是几何光学中最具挑战性的方面. 这是关于将 (8.1) 用于波传播, u 不一定非得是实的事实. 虽然复数的 u 会对应于指数大或指数小的 ψ, 我们可以从简单的例子 (8.28) 中得到一个提示, 因为若对 s, t 使得 $x^2+y^2<1$ 成立, 那么易见 u 是复的. 但这样的 s 和 t 也是复的, 这就导致了 *复射线* 的概念, 对这种情形, x, y 也必须复数化. 这一课题尚未充分发展, 我们无法在此进一步讨论.

*8.2.4 特征值问题

应用几何光学求 Helmholtz 方程或其他与波动有关的方程的高特征频率是惊人困难的和繁琐的. 我们将只叙述一个简单的例子, 它提供下一节讨论的动机.

假定我们要求大的 λ 值, 在圆 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 内使方程

$$\nabla^2\psi+\lambda\psi=0 \tag{8.34}$$

的齐次 Dirichlet 或 Neumann 问题有非平凡解, 即 $-\lambda$ 是 ∇^2 的特征值.

设 λ 足够大, ψ 可用以下形式来近似

$$\psi(x,y;\lambda)\sim A(x,y)e^{i\sqrt{\lambda}u(x,y)},$$

165 然而我们必须记住第 4 章提到过的一种情形, 波动方程高度局部化的初始条件会在由源发出的特征附近引起一个同样是局部化的响应, 但还会引起远离特征的非平凡的响应.

其中 u 满足 $|\nabla^2 u| = 1$. 若我们已知边界上的值, 相位 u 就可由 Charpit 方程决定. 在极坐标下, 这些边界条件决定 $\partial u/\partial\theta$, $\pm\partial u/\partial r$. 由于射线的方向就是 ∇u 的方向, 同样在极坐标下 ∇u 的分量表示为 $(\sin\phi, \cos\phi)$, 其中 ϕ 是任意通过边界点 P 的两条可能射线的发射角, 如图 8.7 所示. 在每条射线上的两个相位是

$$u_\pm \sim u_p + R(\theta - \theta_p)\cos\phi \pm (R - r)\sin\phi + \cdots.$$

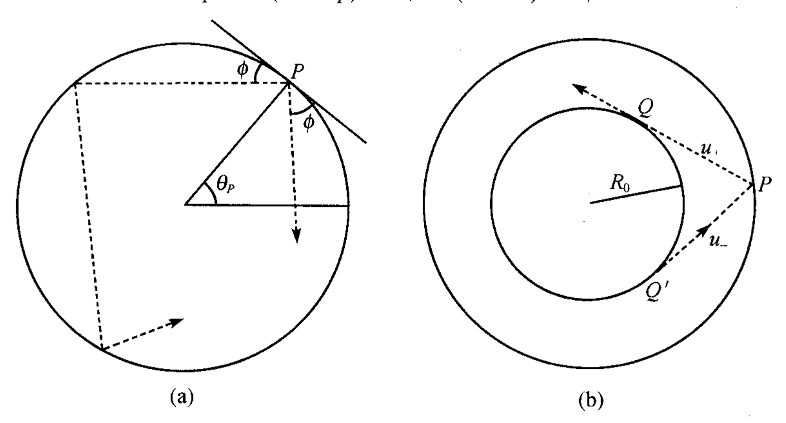


图 8.7　圆内 Laplace 算子的特征值

边界条件 $\psi = 0$ 必须满足, 由于不能在 $r = R$ 上取 $A = 0$ (这样 A 就处处为零了), 我们取

$$\psi(x, y) = A(x, y)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}u_+} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}u_-}).$$

能实现这一过程的问题只有如图 8.7(a) 所示可能经过多次反弹的 "+" 射线, 作为 "−" 射线回到 P 点, 但此时它具有沿着此射线积分 Charpit 方程得到的值 u_+, 与 P 点的 u_- 值不一致. 这一相容性的要求将导致特征值的决定. 现在对 ϕ 的大部分值, 即 $\arccos(R_0/R)$ 是 π 的无理数倍的情形, 这是不会发生的. 其中 R_0 如图 8.7(b) 所示. 然而, 我们也必须认识到从边界上不同的点用角度 φ 发射的射线有一个半径为 R_0 的包络 (焦散曲线, 见图 8.7(b)), 它本身是一条用相位 u_+ 可以沿着它行进的路径. 因此, 我们必须考虑诸如从 Q 到 P, 围绕焦散曲线任意次终结于 Q' 并回到 P 的轨道. 若必须在 P 点与 u_- 一致, 我们在求出 u_+ 沿着此轨道的变化时, 它必须是 2π 的整数倍. 通过简单的计算, 我们得到条件为

$$2\pi R_0\sqrt{\lambda} = 2\pi n_1, \tag{8.35}$$

$$2\sqrt{\lambda}\left(\sqrt{R^2 - R_0^2} - R_0\arccos\left(\frac{R_0}{R}\right)\right) = 2\pi n_2, \tag{8.36}$$

其中 n_1, n_2 为某些整数. 最后, 我们得到 λ 为特征值就应要求能够对某些整数 n_1, n_2, 能够从 (8.35) 和 (8.36) 中消去 R_0 可以证明这给出了作为 (8.34) 的精确解的 Bessel 函数 $J_{n_1}(\sqrt{\lambda}R)$ 的 n_2 次零点的一个良好的近似.

遗憾的是, 这不是一个容易用于一般问题的方法. 甚至对边界的轻微修改都会导致射线跟踪的几何和分析上的可怕的困难. 更有甚者, 任何用同时包含振幅 A 和 u 一起来提高结果的精确性的企图会变得相当复杂. (8.31) 的不精确性之一是十分明了的, 因为我们已经假设当射线擦过圆 $r=R_0$ 时 u 是连续的. 事实上, 仿照已经提到过的类似于 (8.31) 的局部计算表明, 在擦过的点, u 总是有 $\pi/2$ 的变化, 因此 (8.36) 中的 n_2 至少应该用 $n_2+1/4$ 代替.

从这样的射线分析, 我们可以洞察到对应于大特征值的特征函数的定性性态. 图 8.7(b) 揭示, 对应于发射角 φ 的特征函数会停留在焦散曲线 $r=R_0$ 附近. 而当我们试图对矩形区域作类似的分析时, 不存在焦散曲线表明特征函数没有这种几何性质, 用三角函数给出它们的精确表达式就能得到证实.

8.2.5 色散

前述想法并不只应用于 (8.1). 事实上涉及波传播具有常系数的线性偏微分方程模型, 只要波数向量 $\boldsymbol{k}$ 和频率之间的某种 **色散关系**

$$F(\boldsymbol{k},\omega)=0 \tag{8.37}$$

成立, 就有因变量都正比于 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega\tau)}$ 的解. 这一方法只是 7.2.1 节中思想的简单重复; 这种方法允许波动解存在的事实最终意味着, 存在实的 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 满足 (8.37). 对线性问题, 一个模型对实的 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 成立色散关系是 3.3 节中定义的双曲性的另一定义方法. 它应用于诸如 7.2.1 节中的表面重力波等比偏微分方程包含更多信息的模型会更有好处, 例如像下面的例 2 那样 F 会强烈地依赖于边界条件.

当我们通过将所有因变量写成 Ae^{iku}, 将 WKB 方法应用于线性波传播模型时, 本章的理论有非常重要的作用. 最高阶导数是唯一的相关项, 因为如前所述, WKB 方法的限制是波长远小于任何有兴趣的长度尺度, 从而是一种 "短波长" 或 "远场" 近似. 在任一场合, 算子 $\partial/\partial x_j$ 等价于乘以 ik_j, 而 (8.37) 意味着 u 满足

$$F\left(\nabla u,-\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)=0. \tag{8.38}$$

对简单的例子 (8.32), 从 Charpit 方程容易看出, 沿着特征不仅 ∇u 的分量和 $\partial u/\partial\tau$ 为常数, 而且 u 本身也是常数. 从而一切扰动, 不管它们的波长与频率是什么, 都用同样速度行进的事实得出沿着特征 (或射线) 相位 u 是不变的. 因此, 没有色散, 即没有不同波长的波混合在一起.

一个色散起重要作用的例子是一条在无限深的海中以速度 V 沿 x 方向行进的船只引起的波动模式的远场的著名问题. 如习题 8.15, 其色散关系是

$$(-\omega+Vk_1)^4=g^2(k_1^2+k_2^2), \tag{8.39}$$

其中 x 和 y 是海洋表面的水平坐标, g 是重力加速度, 而 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2)$. 因此, 在 $\omega=0$ 的稳定状态, 表面升高的相位 u 的 WKB 逼近满足

$$V^2p^4=g^2(p^2+q^2), \tag{8.40}$$

其中 $p=\partial u/\partial x$, $q=\partial u/\partial y$. 在 WKB 逼近中, 船作为一个点, 设为原点, 因此我们只对过原点的积分锥感兴趣, 它们由以下方程和 (8.40) 联合给出

$$x=(4V^4p^3-2g^2p)t,\quad y=-2g^2qt,\quad u=2V^4p^4t.$$

当我们考察射线斜率时, 惊人的性质出现了, 即对任何的 V (或 g) 其值都是 $pq/(p^2+2q^2)$ 并有极大值 $1/(2\sqrt{2})$. 因此, 波被限制在一个半角为 $\arcsin(1/3)$ 的楔形区域之中, 在与楔形接触的每一点都有两个具有不同相位的弯曲的波前通过. 极限的直射线是与其上 Jacobi 行列式为零的焦散曲线, 在那儿可以看到一个大尺寸的 "弓形波", 如 [45, p. 117] 中的图形所示.

8.2.6 次特征

图 8.1 的情形推广至 m 维的好处之一是我们可以构造 2.6 节引入的方程

$$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}_i}=\boldsymbol{C}$$

的次特征. 事实上, 满足 (8.22)~(8.24) 的特征形成 Monge 锥的母线的事实, 局部地意味着我们只需求 (2.53) 的特征, 即

$$Q\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\phi}{\partial x_m}\right)=\det\left(\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)=0.$$

因此, 对波动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a_0^2\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right),$$

我们需要的特征满足

$$a_0^2\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2,$$

对 $a_0=1$, 它就是 (8.32). 对通过原点的特征锥, 这些只是母线

$$x=p\tau,\quad y=q\tau,\quad t=r\tau,\quad 其中\ p^2+q^2=a_0^2r^2,$$

但其几何特性马上就会变得更加复杂 (见习题 8.13).

* 8.3 Hamilton-Jacobi 方程和量子力学

本节的目的是简要说明为什么偏微分方程掌握了经典力学与量子力学联系的钥匙. 这当然是一个错综复杂的故事, 我们只能给出一个简单的轮廓.

我们先回忆, 许多有限自由度的经典力学问题可以改写为关于广义坐标 $q_i(t)$ 和广义动量 $p_i(t)$ 的 Hamilton 方程

$$\dot{p}_i = \frac{-\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

在 8.22 节中我们已经看到, 这些方程是关于 u 的方程

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = 0, \quad \boldsymbol{q} = \{q_i\}, \quad \boldsymbol{p} = \{p_i\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial q_i} \right\} \tag{8.41}$$

的 Charpit 方程. 我们只需要在 (8.21) 中用 $\boldsymbol{q}$ 代替 $\boldsymbol{x}$ 以便与流行的习惯相一致并隐去 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 对 t 的依赖. 因此, 我们有一条从 Newton 定律经过 Charpit 方程到达 (8.41) (它称为 Hamilton-Jacobi *方程*) 的途径. 然而, Newton 定律和 Hamilton-Jacobi 方程均等价于 *最小作用原理*, 即 *作用*

$$u = \int_0^T L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \mathrm{d}t \tag{8.42}$$

当积分是沿着 Newton 方程的解 (即沿着 Charpit 方程的一条射线) 进行并设 $\boldsymbol{q}(0)$ 和 $\boldsymbol{q}(T)$ 给定时, 对所有可能的 $\boldsymbol{q}$ 达到最小值. 这里, L 称为 Lagrange *函数*, (8.42) 与 Newton 定律的等价性在 [46] 中给出. 注意到 (8.42) 与 Hamilton-Jacobi 方程的等价性和 Fermat 原理 [166]与短时方程 (8.1) 的等价性的类同是有意义的 (见习题 8.17).

我们现在问自己 "就像 Helmholtz 方程得到 (8.1) 那样, 什么方程的 WKB 极限会得出 Hamilton-Jacobi 方程?" 很清楚, 这个问题没有唯一的解答, 由于 WKB 逼近通常并不 "平衡" 给定的线性偏微分方程的最高阶导数和所有的低阶导数项, 但有一个可能是 Schrödinger 方程

$$H\left(q_i, -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}\right) \psi(q_i) = E\psi(q_i). \tag{8.43}$$

这里 ψ 被称为波函数而 E 是一个常数, 表示系统的能级; $\hbar$ 也是一个常数, 当我们处理的尺度大大超过原子的大小 (即远大于 10 埃) 时, 它是非常小的. 我们要求

166 它叙述了光线采用与其他可能的几何路径相比所需时间最短的路程.

$H(q,p)$ 对其后几个变量的依赖性是幂的线性组合, 例如

$$H\left(q_i, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + V(q_i), \tag{8.44}$$

这是势能 V 的质量为 m 的单个例子在 n 维中运动的 Hamilton 函数. WKB 渐近 $\psi A\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(q_i)/\hbar}$ 可以期待在许多个埃的尺度下得到好的近似, 它得到

$$H(q_i, p_i) = E,$$

因为 E 是常数, 只要我们令因变量与波函数的相位等同, 它等价于 (8.41)[167]. 因此, 量子力学的波函数与经典力学的轨道之间的关系是类似于电磁场与几何光学中的光线之间的关系; 在这两种情形, 波函数的相位都起着枢纽的作用. 请注意, 我们将力学中的 Hamilton 方程与 Hamilton-Jacobi 方程 (8.41) 的 Charpit 方程等同起来, t 沿着特征变化时, 必须取真实的时间. 事实上, (8.24) 式中的 T 是 Lagrange 表述中的真实时间. 然而, 沿着短时方程 (8.1) 的特征的参数未因此而确定, 因为 (8.1) 只是用来描述波动方程的解的一个单一高频分量的空向性质. 事实上, 在这种情形下将射线参数视作加权距离是有益的, 正如习题 8.17 中的解释.

在量子力学中一个有实际意义的主要的量是能级 E, 在本理论中它以特征值出现. 在小的 $\hbar$ 的情形, 我们试图推广 8.2.4 节的讨论得到 E, 这对应于二维的 $V=0$ 的非常简单的情形. 为此, 我们必须将以下非常重要的情况推广, 特别地, 如果能找到一条射线路径的话, 相位的变化必须是 $2\pi n\hbar$ 的整数倍. 现在, 假设我们能够积分 Hamilton 方程, 我们原则上就知道 u, 因为由 Charpit 方法

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t},$$

因此

$$u = u_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i, \tag{8.45}$$

其中 u_0 是相位在边界上的值. 作用 (8.42) 的极小化得到 (8.45) 是经典力学中的一个著名结果, 因此我们也能够将至关重要的相位函数与极小化的作用量等同起来. 而且原则上我们只需保证相位在任意路径上的变化

$$\oint \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i$$

167 遗憾的是, 当有许多个粒子时, 每个粒子都有各自的波函数 ψ, 得到的微分方程的维度是系统的自由度, 它可能是很大的.

是 $2n\pi\hbar$. 如 8.2.4 节中那样, 即便我们侥幸能够沿着闭的射线路径进行积分, 还是必须当心在计算路径与包络接触区域的贡献. 遗憾的是, 除非是几何形状十分简单的情形, 这可能是一项十分繁重的任务, 因为有许多 "族" u_i, 而不像在几何光学中遇到的只有两个相位.

* 8.4 高阶方程

数量众多的现象已经直接用非拟线性方程阐明, 但还有许多这样的现象通过将方程求导, 晦涩地转化为拟线性方程组. 事实上, 这个话题的许多方面我们已经提到过, 但还值得近一步讨论, 可是这些问题大部分需要相当多的渐近分析的知识基础.

没有进一步深入讨论非拟线性方程的理由是, 迄今提到的结果无一能拓广至一阶标量方程以外的情形. 能够这样拓广的方程是相对罕见的, 但是一个有趣的例子是下面定义的微分几何的 Monge-Ampère *方程*. 它的最简单形式是与可展曲面, 即单参数平面族的包络有关的. 这种曲面有重大的实际意义, 例如用玻璃或金属平板制造面积不变的弯曲制件. 它们是 (8.25) 后面提到的尺曲面的特殊情形. 简单的纸张弯曲试验表明, 可展曲面必定是一个单参数的平面族

$$p(\lambda)x + q(\lambda) = u + \lambda \tag{8.46}$$

的包络, λ 是变量. 从 (8.46) 和

$$p'(\lambda)x + q'(\lambda)y = 1$$

中消去 λ 就可以得到可展曲面. 现在 (8.46) 是一个如同在 4.8 节中的 Legendre 或 "接触" 变换, 而

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p + (xp'(\lambda) + yq'(\lambda) - 1)\frac{\partial \lambda}{\partial x} = p,$$

以及同样的 $\partial u/\partial y = q$. 因而由 p 和 q 都是一个变量 λ 的函数, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{8.47}$$

其中 f 是某个函数, 从而我们得到一个可用 (8.25) 求解的方程. 也可观察到 (8.47) 是最简单形式的 Monge-Ampère 方程

$$rt - s^2 = 0 \tag{8.48}$$

的一个首次积分, 其中 $r = \partial^2 u/\partial x^2$, $s = \partial^2 u/\partial x\partial y$, $t = \partial^2 u/\partial y^2$. 这个方程有如下的几何意义: Gauss 曲率即曲面 $u = u(x, y)$ 的两个主曲率之积的平方根为 0.

现在, 根据本书的精神, 若我们直接面对 (8.48), 最好的可能就是将其化为如

$$r\frac{\partial t}{\partial y}+t\frac{\partial r}{\partial y}-2s\frac{\partial s}{\partial y}=0,$$
$$t\frac{\partial r}{\partial x}+r\frac{\partial s}{\partial y}-2s\frac{\partial r}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial s}{\partial x}=0$$

的拟线性 3×3 组, 容易说明它恰有一对特征,

$$t\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+2s\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r=0,\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{s}{t}=-\frac{r}{s}, \tag{8.49}$$

在其上 Riemann 不变量 s/t (或 r/s) 为常数, 因此特征线总是直线, 而且从几何上, 我们可用曲面 $u=u(x,y)$ 的第二基本形式

$$r\mathrm{d}x^2+2s\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t\mathrm{d}y^2 \tag{8.50}$$

来解释. 此基本形式决定了 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 方向的法向截线的曲率, 而对可展曲面, 在通过每一点的 (直) 母线上此曲率为零. 因此, (8.49) 蕴含了通过 (x,y) 平面上任何点的特征就是母线的投影.

最后的几何注释是关于一般的尺曲面而不必为可展曲面的微分方程. 曲面 $u=u(x,y)$ 在每一点包含一条直线的条件是对任何 (x,y) 存在 λ 和 μ, 使得

$$u(x+\tau,y+\lambda\tau)\equiv u(x,y)+\mu\tau$$

对所有的 τ 成立. 关于 τ 求导可见

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u}{\partial y}=\mu,$$

导数中的变量仍然是 $(x+\tau,y+\lambda\tau)$, 进而得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

因此 $\lambda=(-s\pm\sqrt{s^2-rt})/t$, 讨论仍取 $(x+\tau,y+\lambda\tau)$ 进行. 最后关于 τ 求导得到 u 满足三阶拟线性方程

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,$$

证明 (8.48) 的任意解都满足上述方程是一个简单的练习.

我们用对 4.8 节中的气体动力学讨论的一个有趣的注记来结束本节. 在无黏**轴对称流**的特殊情形, 可以说明相应 (2.5)~(2.7) 的拓广并不导致 (4.85) 而是

$$F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+H\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

其中 F, G 和 H 又仅是 $\partial u/\partial x=p$ 和 $\partial u/\partial y=q$ (现在 y 是圆柱极坐标) 的函数. 现在当我们用 Legendre 变换

$$w(p,q)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-u,$$

其中 $x=\partial w/\partial p$, $y=\partial w/\partial q$, 我们得

$$F\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}-G\frac{\partial^2 w}{\partial p\partial q}+H\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}+\frac{q}{\partial w/\partial q}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p\partial q}\right)^2\right)=0,$$

因此, 我们导出了一个 "非齐次" Monge-Ampère 方程, $rt-s^2$ 是非零 (其中 $r=\partial^2 w/\partial q^2$ 等等). 我们观察到, 若 $rt-s^2$ 是关于位置的已知函数, 因此右端项是 x, y 的给定函数, 那么导致 (8.49) 的计算是相同的. 且当特征的二次式的判别式 (它就等于此函数) 为负时, 没有实特征, 而当它为正时有两个实特征, 在此, 形容词椭圆和双曲是特别适当的, 因为前一情形对应于一个曲面具有正的 Gauss 曲率 (如球面), 而后者是具有负 Gauss 曲率的曲面 (如马鞍面). 对正 Gauss 曲率, 基本形式 (8.50) 恒不为零, 对负 Gauss 曲率, 它在 $(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 的两个方向为零, 这两个方向称为**渐近线**, 它是一条被最大和最小曲率方向对分的曲线. $rt-s^2=0$ 的情形可以称为抛物的, 其重特征为渐近线. 这与我们弯曲纸张的经验吻合. 例如, 若将长方形的纸的一端, 限制在一条直线或圆周上, 那么纸形成一个圆柱, 其母线为渐近线. 类似地, 四分之一的圆可以弯成一个圆锥, 事实上, 观察一张稍微弄皱的纸, 它的变形在折缝处造成许多不规则的锥片, 我们可以解释为解的 "脊线".

更有意思的方程具有如下形式

$$rt-s^2=Ar+Bs+Ct, \tag{8.51}$$

其中 A, B 和 C 仅依赖于因变量的一阶导数. 这一方程曾在 [12] 中详细讨论过. 它具有以下值得注意的性质: (8.49) 变为

$$(t-A)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+(2s+B)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r-C=0,$$

且易见根据

$$B^2>4AC \quad 或 \quad B^2<4AC$$

分别有两个特征或无实特征. (8.51) 的类型又仅由右端项决定.

所有这些现象都与 $rt-s^2=0$ 是 $\iint(p^2t+2pqs+q^2r)\mathrm{d}x\mathrm{d}x$ 的 Euler-Lagrange 方程这一事实有关的. 人们总能希望, 任何非拟线性项是 Hesse 矩阵 $(\partial^2u/\partial x_i\partial x_j)$ 的不变量时, 具有某些特殊的结构, 而 Laplace 算子恰为此矩阵之迹.

习 题

[记 $p=\partial u/\partial x$, $q=\partial u/\partial y$.]

8.1. 当沙子在桌子上堆得尽可能高时, 其表面为 $u=u(x,y)$, 其中 $p^2+q^2=1$. 桌子是倾斜的长方形, 因此

$$u(x,0)=0 \quad 对\ 0<x<1, \quad u(x,a\cos\alpha)=a\sin\alpha \quad 对\ 0<x<1,$$
$$u(0,y)=u(1,y)=y\tan\alpha \quad 对\ 0<y<a\cos\alpha,$$

其中 $0<\alpha<\pi/4$, $a\geqslant 1$. 在桌子的每一边附近的三角形区域中解 Charpit 方程说明, 表面由相交在脊线的平面

$$u=y, \quad u=y\tan\alpha+x\sqrt{1-\tan^2\alpha},$$
$$u=y\tan\alpha+(1-x)\sqrt{1-\tan^2\alpha}, \quad u=a(\cos\alpha+\sin\alpha)-y$$

构成. 证明只要 $a\cos\alpha\leqslant 1/\sqrt{1-\tan^2\alpha}$, 沙堆的最高点为 $u=a(\cos\alpha+\sin\alpha)/2$. 当桌子为水平的 L- 形时, 情况如何?

8.2. 令 $d(x,y)$ 为从点 (x,y) 到光滑曲线 $y=f(x)$ 的最短距离, 证明

$$d^2=(x-X)^2+(y-f(X))^2,$$

其中

$$x-X+(y-f(X))f'(X)=0,$$

在

$$\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right)^2=1$$

的通解的基础上推导这些公式. 你可以不必求导, 从取 (x,y) 为原点, 取 x 轴为沿着 (x,y) 到曲线 $y=f(x)$ 的法线方向, 说明 $\partial d/\partial y=0$, 并注意到 $|\nabla d|^2$ 是轴旋转不变的.

8.3. 设 u 满足如下 Clairaut 方程

$$u=xp+yq-f(p,q).$$

证明若 $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$ 时, $u = u_0(s)$, 那么

$$x = x_0 e^t + \frac{\partial f}{\partial p}(p_0, q_0)(e^t - 1),$$

$$y = y_0 e^t + \frac{\partial f}{\partial q}(p_0, q_0)(e^t - 1),$$

$$u = u_0 e^t - \left(p_0 \frac{\partial f}{\partial p}(p_0, q_0) + q_0 \frac{\partial f}{\partial q}(p_0, q_0) - f(p_0, q_0)\right)(e^t - 1),$$

其中 $p_0(s)$, $q_0(s)$ 满足

$$u_0' = p_0 x_0' + q_0 y_0', \quad u_0 = x_0 p_0 + y_0 q_0 - f(p_0, q_0).$$

注意到, 当 p, q 为常数时, Clairaut 方程为 (u, x, y) 空间中的一个平面, 由此推出, 对任意的常数 α, β, $u = \alpha x + \beta y - f(\alpha, \beta)$ 均为 Clairaut 方程的一个解. 所以, 解的一般表达式可以从下面两个方程消去参数 α 得到.

$$u = \alpha x + F(\alpha) y - f(\alpha, F(\alpha)),$$

$$x + \frac{dF}{d\alpha}\left(y - \frac{\partial f}{\partial q}(\alpha, F(\alpha))\right) - \frac{\partial f}{\partial p}(\alpha, F(\alpha)) = 0,$$

其中, F 为任意函数.

注. 我们可以利用 Legendre 变换 (4.86), 写出方程解的一般表达式, 而不引入积分. 但这也只对一阶方程有效.

8.4. 设 $pq = 1$, 且当 $x + y = 1$ 时, $u = 0$. 利用 Charpit 方法证明 $u = x + y - 1$ 或者 $u = -(x + y - 1)$. 如果 $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$ 时, $u = u_0(s)$, 证明只有当 $u_0'^2 > 4x_0' y_0'$ 时, 方程存在解.

通过找所有的特征都过点 $x = y = 0$ 的解, 证明过原点的积分锥为 $u^2 = 4xy$.

8.5. 设 $u = f(x, y, p, q)$, 证明 p, q 满足如下 2×2 方程组

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} &= p - \frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} &= q - \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

且两个特征均由下式给出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial q} \Big/ \frac{\partial f}{\partial p} \quad (\text{二重特征}),$$

利用 Fredholm 二择性说明, 沿着特征

$$\frac{dx}{\partial f/\partial p} = \frac{dy}{\partial f/\partial q} = \frac{dp}{p - \partial f/\partial x} = \frac{dq}{q - \partial f/\partial y}.$$

从微分方程推导出, 上述的比率也等于

$$\mathrm{d}u\Big/\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right).$$

*8.6. 设

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 对\ 0<x<1,$$

有

$$u(x,0)=0,\quad u(0,\tau)=1,\quad u(1,\tau)=100.$$

利用 WKB 逼近 $u\sim a(x,\tau)\mathrm{e}^{-v(x)/\tau}$, 或者相似解 (6.45), 证明尽管墙壁温度不同, 但 $\tau=0+$ 时, u 在 $x=1/2$ 时达到极小.

8.7. 验证 $u=-x$ 满足几何光学方程, 其描述了无穷远处 $x=+\infty$ 入射光的平面波. 当光线入射到抛物反射面 $y^2=4x$ 时, 反射区域在抛物线上必须满足 $u=-x$. 记 p, q 在抛物线上的值为 $p_0=\cos s$, $q_0=\sin s$, 证明 $u=u_0=-x_0(s)$, $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$ 满足方程

$$-x_0'=p_0x_0'+q_0y_0',\quad y_0y_0'=2x_0'.$$

且 $y_0=-2\tan(s/2)$, $x_0=\tan^2(s/2)$, 所以, 反射光线为

$$y=(x-1)\tan s,$$

其均通过焦点 $(0,1)$.

*8.8. 假设习题 8.7 中反射体为 $x^2+y^2=1$, $x<0$. 证明初始数据为

$$u=-x_0(s),\quad x=x_0(s)=\cos\frac{s}{2},\quad y=y_0(s)=\sin\frac{s}{2},\quad \pi<s<3\pi.$$

反射光线为

$$x\sin s-y\cos s=\sin\frac{s}{2}.$$

进一步证明, 对 $s-2\pi=\varepsilon$, $|\varepsilon|\ll 1$, 反射光线均通过 $x=-\frac{1}{2}$, $y=0$ 附近; 且当 $O(\varepsilon^4)$ 被忽略时, 有

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\varepsilon+\frac{\varepsilon^3}{16}-y=0.$$

由此推导出, 在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 附近, 光线的包络可以近似地表示为

$$y=\pm\frac{8}{3^{3/2}}(-(x+1/2))^{3/2}.$$

全部的包络, 因为和肾的相似性, 称为 *肾形线*, 如图 8.8 所示.

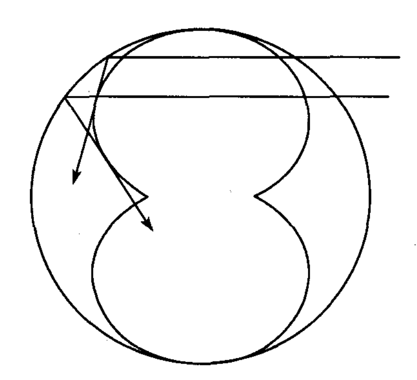


图 8.8　圆中的肾形焦散; 只有左边一半被来自 $x=+\infty$ 的射线照亮

8.9. 证明, 在椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 内, 解具有 $u=0$ 边界条件的短时距方程时, 光线垂直于边界, 并且光线的包络如图 8.5 所示, 由下列方程给出

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 s,\quad y=\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 s\quad 对\ 0\leqslant s<2\pi.$$

8.10. 假设温度 $T(\boldsymbol{x})$ 满足对流 - 扩散方程

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)T=\varepsilon\nabla^2 T,$$

其中 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 为给定速度场. 证明, 如果我们寻求形如 $T\sim A\mathrm{e}^{u(\boldsymbol{x})/\varepsilon}$ 的 WKB 近似解, 则

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u=|\nabla u|^2.$$

并证明 Charpit 方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{p},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v},\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\nabla\wedge\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{p},$$

其中 $\boldsymbol{p}=\nabla u$, 说明等温线 $T=$ 常数平分特征线与平行 $\boldsymbol{v}$ 的流线的夹角.

8.11. (i) 选取自变量 t, 使得对短时距方程 $p^2+q^2=1$, 沿着光线有 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=p$, 所以

$$x=p_0t+x_0,\quad y=q_0t+y_0.$$

定义

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{pmatrix}x_0'+tp_0' & y_0'+tq_0'\\ p_0 & q_0\end{pmatrix}.$$

证明

$$|J|=(q_0p_0'-p_0q_0')(t+T(s)),$$

其中

$$T(s)=\frac{q_0x_0'-p_0y_0'}{q_0p_0'-p_0q_0'}.$$

利用 (8.30) 式证明

$$\frac{2}{A}\frac{\partial A}{\partial t}=-\nabla^2 u.$$

求 J 的逆并利用关系式

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\\ &= p_0'\frac{\partial s}{\partial x}+q_0'\frac{\partial s}{\partial y}\end{aligned}$$

证明 $\nabla^2 u=J^{-1}\partial J/\partial t$. 并导出

$$\frac{\partial}{\partial t}(A^2J)=0,\quad \nabla^2 u=\frac{1}{T+t},$$

其中 T 由 (8.29) 定义. 最后导出 (8.31).

(ii) 假设光线延伸到无穷远处, 证明

$$A^2\sim\frac{A_0^2T}{(x^2+y^2)^{1/2}},$$

即辐射到无穷的场的方向为 A_0^2T (我们在 5.6.2 节中利用了这一结果).

(iii) 假设在初始曲线 Γ 上 $u=0$, $A=1$. 证明：在每一条光线上

$$A=\sqrt{\frac{\rho(s)}{\rho(s)+t}},$$

其中 $\rho(s)$ 为 Γ 上光线离开点处的曲率半径. (如果曲线 Γ 选取弧长 s 作为参数, 则曲率为 $1/\rho=y_0''x_0'-x_0''y_0'$.) 证明, 在没有焦散线的情况下, 随着 $t\to\infty$,

$$A\to\frac{A_0}{r^{1/2}}\left(\frac{q_0x_0'-p_0y_0'}{q_0p_0'-p_0q_0'}\right)^{1/2},$$

其中 $A_0(s)$ 为初始大小. 证明, 当 $u_0(s)=1$ 时, $Ar^{1/2}$ 最终反比于出发点的曲率. (在三维情形, 可以证明高斯曲率的倒数决定远场的方向性. 所以, 为了从散射场导出物体的形状, 我们必须求解一个 Monge-Ampère 方程.)

8.12. 假设 a_0 为常数, 且

$$a_0^2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2,$$

初始值为 $\tau=0$, $u=u_0(x,y)$. 证明 p_0, q_0 及 v_0 (其中 $v=\partial u/\partial\tau$) 由下式给出

$$p_0=\frac{\partial u_0}{\partial x},\quad q_0=\frac{\partial u_0}{\partial y},\quad v_0=\frac{\pm\sqrt{p_0^2+q_0^2}}{a_0}.$$

且解

$$u(x,y,\tau)=u_0(X,Y),$$

其中

$$x=2p_0t+X,\quad y=2q_0t+Y,\quad \tau=-\frac{2v_0t}{a_0^2}.$$

如果 u_0 位于原点 $x=y=0$ 附近, 证明方程的解位于圆 $x^2+y^2=a_0^2t^2$ 附近.

注. 当把上面所得的解作为波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=a_0^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)$$

的近似解时, 这个结果似乎与 Huygens 原理矛盾. 然而, WKB 逼近只描述了速变解, 而不能用其描述特征锥 $x^2+y^2=a_0^2t^2$ 内的渐变过程.

*8.13. 非齐次波动方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=a_0^2(y)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)$$

可以模拟声音在密度只垂直变化的海洋或者大气中传播. 证明射线锥面为 $\phi(x,y,t)=$ 常数, 其中

$$a_0^2(y)\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2,$$

且重特征满足

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=p, && \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=q, && \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=-\tfrac{r}{a_0^2},\\
&\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}=0, && \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}=\tfrac{r^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{a_0^2}\right), && \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=0,
\end{aligned}$$

其中 $r=\partial\phi/\partial\tau$. 证明, 当 $t>0$ 时, 通过原点的射线的投影与过原点的射线锥面在 $t=$ 常数的截线的投影垂直. 当 $a_0^2=1/(1+y)$ 时, 对任意的 $y>-1$, 证明: 过原点的射线锥面为

$$x=p\tau,\quad y=\nu\tau+\frac{1}{4}r^2\tau^2,\quad t=-r\tau-\frac{1}{2}r\nu\tau^2-\frac{1}{12}r^3\tau^3,$$

其中

$$p^2+\left(\nu+\frac{1}{2}r^2\tau\right)^2=(1+y)r^2.$$

*8.14. 设 ψ 在矩形区域 $-1 < x < 1$, $-a < y < a$ 内满足修正 Helmholtz 方程

$$\nabla^2\psi - k^2\psi = 0,$$

在边界上 $\psi = 1$. 证明方程的解为

$$\psi = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^n}{n+1/2} \times\left(\frac{\cos((n+1/2)\pi x)\cosh\alpha_n y}{\cosh\alpha_n a} + \frac{\cos((n+1/2)\pi y/a)\cosh\beta_n x}{\cosh\beta_n}\right),$$

其中 $\alpha_n^2 = (n+1/2)^2\pi^2 + k^2$, $\beta_n^2 = (n+1/2)\pi^2/a^2 + k^2$. 再证明

$$\psi = 2\mathrm{e}^{-k}\cosh(kx) + 2\mathrm{e}^{-ka}\cosh(ky)$$

满足方程, 即其为精确解 $k \to \infty$ 时的极限, 并且除了角点附近近似地满足边界条件. 如果将其解写作 $A\mathrm{e}^{-ku(x,y)}$, 证明其最低阶项分别在

$$x = -1, \quad x = 1, \quad y = -a, \quad y = a$$

附近满足

$$u \sim -(x+1), \quad x-1, \quad -(y+a), \quad y-a,$$

并将其与习题 8.1 的答案作比较.

注. 在脊线 $x = y$ 上, ψ 可以近似地写成 $\mathrm{e}^{-kx} + \mathrm{e}^{-ky}$. 表明通过脊线, u 是连续的, 一面趋向于 x, 另一面趋向于 y. 但是 ∇u 具有间断

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_- = -\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_+ .$$

*8.15. 在海洋 $z < 0$ 上, 一艘沿着 x 轴以速度 $-V$ 移动的船产生的小振幅波由以下模型给出

$$\nabla^2\phi = 0 \quad 对\ z < 0,$$

满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} + g\eta = 0 \quad 在\ z = 0\ 上,$$

其中 $\phi(x,y,z,t)$ 是速度势, $\eta(x,y,t)$ 是海面高度. 证明, 如果 $\xi = x + Vt$, 那么

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + V\frac{\partial\eta}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} + V\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + g\eta = 0 \quad 在\ z = 0\ 上.$$

现令

$$\eta = \mathrm{Re}\left(\eta_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega t + k_1\xi + k_2 y)}\right).$$

证明

$$\phi = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega t+k_1\xi+k_2 y)+z\sqrt{k_1^2+k_2^2}}$$

及

$$g^2(k_1^2+k_2^2) = (-\omega+Vk_1)^4.$$

*8.16. 对 $x(t)$ 一个最优控制问题, 如果 x 满足 $\dot{x}=f(x,u)$, 我们希望选取 $u(t)$ 使代价泛函 $\int_0^1 L(x,y)\mathrm{d}t$ 最小, 若 $f(x,u)$ 关于 x 和 u 都充分光滑, 证明:

$$\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial u}\bigg/\frac{\partial f}{\partial u} = p,$$

比如说

$$\frac{\partial u(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} = 1\bigg/\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial u(x,\dot{x})}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}\bigg/\frac{\partial f}{\partial u}.$$

由 Euler-Lagrange 方程推导出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg/\frac{\partial f}{\partial u}\\ &= \dot{p} - \frac{\partial L}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x}\\ &= 0.\end{aligned}$$

进一步证明, 若 $H(x,p)$ 定义成 $-L+pf$, 其中 L 和 f 是 x 和 p 的函数, 那么

$$\frac{\partial H(x,p)}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial x} + \left(-\frac{\partial L}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u(x,p)}{\partial x} = -\dot{p},$$

$$\frac{\partial H(x,p)}{\partial p} = f + \left(-\frac{\partial L}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u(x,p)}{\partial p} = \dot{x};$$

因而由 Charpit 方程即得到原问题的一个最优控制解. 且若 $x(0)=x_0$, 则第二边界条件为 $p(1)=0$.

*8.17. (i) Fermat 原理 指出光在介质中沿着最优路径从原点传播到 x, 即传播速度 $a(\boldsymbol{x})$ 最小化从 0 到 $\boldsymbol{x}$ 的路径长度

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}s}{a}$$

记路径 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(t)$, 则有

$$u(x) = \int_0^T \frac{|\dot{\boldsymbol{X}}|}{a(\boldsymbol{X})}\mathrm{d}t, \quad 其中\ \boldsymbol{X}(T)=\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{0},$$

证明 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{X}}}{a|\boldsymbol{X}|}\right)+\frac{|\dot{\boldsymbol{X}}|}{a^2}\nabla a=0,\quad \dot{}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

进一步证明, 当 $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t=a|\dot{\boldsymbol{X}}|$ 时, 该方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{1}{a^3}\nabla(a(\boldsymbol{X})),\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{p}.$$

(ii) 证明 $|\nabla u(\boldsymbol{X})|=1/a(\boldsymbol{X})$, 且上面的偏微分方程为 Charpit 方程.

(iii) 证明该 Charpit 方程对应的 Hamilton 系统为

$$H(\boldsymbol{X},\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}|\boldsymbol{p}|^2-\frac{1}{2a^2}.$$

注.

(a) 取 $1/a$ 为合适的曲率, 这样问题可以简化为在曲面上找测地线, 使其为 Hamiton-Jacobi 方程的解.

(b) 在 Lagrange 力学中.

(i) 我们在所有使 $Q_i(T)=q_i$ 的路径中选取 $Q_i(T)$, 使得

$$u(q_i)=\int_0^T L(Q_i(t),\dot{Q}_i(t))\mathrm{d}t,\quad \dot{}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

取到极小值, 其中 L 是 Lagrange 算子, 则 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial Q_i},\quad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}.$$

(ii) 对 q_i 微小改变, 可以证明, 对任意 δQ_i, 有

$$\sum\frac{\partial u}{\partial Q_i}(Q_i(T))\delta Q_i=L(Q_i(T),\dot{Q}_i(T))\delta T,$$

且

$$\sum\frac{\partial u}{\partial Q_i}\dot{Q}_i=L,$$

所以, 从 (i) 可知

$$\frac{\partial u}{\partial Q_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}=p_i.$$

(iii) 由 u 的定义, 并注意到 $\mathrm{d}/\mathrm{d}T(u(Q_i)-\int_0^T L\mathrm{d}t)=0$, 可知: u 满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$\sum p_i\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}-L\equiv H(Q_i,p_i)=\text{常数};$$

且 Charpit 方程为

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

即 Hamilton 方程.

(c) 注意到在 Lagrange 力学中参数 t 不仅表示沿着特征的参数而且表示时间. 在 Fermat 模型中 $\mathrm{d}\tau = a\mathrm{d}s$, τ 必须看作是沿着光线的加权弧长参数.

第9章 杂 记

9.1 引 言

前 8 章我们的讨论覆盖了特殊类型的 pde 的许多已知的方法, 但仅仅勾画了他们的表面[168]. 在本杂记中我们试图进一步引导读者进入某些 "行业的诀窍". 然而在进入详细讨论之前, 我们将对某些不仅与经典 pde 理论有密切关系而且本身是如此丰富和重要完全有必要形成专门教科书的但至今我们还很少提及的若干数学领域进行说明.

首先是关于 *反问题*, 有些又称为 *参数辨识* 问题的研究. 这个课题的哲学是始于对某些例如可以用 pde 来建模的现象的观察, 然后问 "什么是这些相关 pde 的系数与边界资料?", 这与我们以往的研究哲学几乎是 "直交的". 鉴于以下理由, 这是一个十分困难的过程:

1. 这是本质非线性的; 甚至一个 pde 是线性的, 其解也几乎不会线性地依赖于它的系数;

2. 它很容易成为不适定的, 例如, 一个由未知常密度 ρ 的有限二维体产生的重力位势 ϕ 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2\phi = -\rho,$$

我们可以在一个靠近但不能接触物体的圆周 $r = R$ 上对位势进行测量. 什么样的观察足以决定它的形状? 很清楚, 甚至 $\partial\phi/\partial r = g$ 在 $r = R$ 上为常数的知识也不足以决定 ϕ, 因为任意具有半径 $\sqrt{2Rg/\rho}$ 的圆形物体都是可能的[169].

决定系数如热传导系数的空间变化是一个更加困难的挑战. 这通常会导致一个关于未知量 *欠定* 的不适定问题. 用不同的正则化方法去寻求最佳的猜测有很大的余地, 见 [18].

鉴于这些困难, 除了注意到前几章发展的理论对反问题有特殊的价值外, 我们将不作进一步的讨论. 对椭圆型方程, 一个常用的方法是给定 Dirichlet 边界条件然后去观察它的 Neumann 边界条件或反之. 这些边界条件间的关系是 Dirichlet-to-Neumann 映射 (5.65) 和 (5.68) 的推广, 且包含了 pde 的参数在边界以外的信息. 因此, 它对将参数辨识的问题化为积分方程是有一定帮助的. 另一方面 pde 问题的谱, 包含特征值作为参数在实际中通过观察或听其振动的正模态是容易测量的, 这

168 仅在这一章我们简称偏微分方程为 pde.

169 对此情形非圆形的物体也是可能的, 例如可用第 7 章的 Hele-Shaw 模型进行构造.

就提出了从谱重构 Helmholtz 方程的问题. 这是一个声名狼籍的困难问题, 其先驱是一篇题为"我们能听出鼓的形状吗?"的著名文章[170]. 它披露, 单用 Dirichlet 问题的谱是不足以决定鼓的形状的知识. 为了解释这一点以及它对雷达和成像的现代化发展的重要性所需要的知识远远超出我们在第 5 章提供的谱理论的知识. 这亦可应用于实际中更重要的发现 *散射体* 即被入射波场透射或照射的物体的形状与性质, 如 8.2.3 节所述. 事实上, 我们已经遇到过的, 在"逆散射"问题上有不可估量价值的一个理论是几何光学. 只要散射体尺寸大大超过入射波长, 任意物体的散射场差不多可以用手绘出的事实意味着直观建立任意散射场的原因是相当容易的. 但关于任意波长的确切的数学理论要困难得多. 在本章末我们会看到在一维空间的情况已经取得了一定的进展.

反问题易于导致欠定系统, 它是一种信息欠缺的模型, 相反地, *超定系统* 也是可能发生的. 特别是用到群的对称性, 如在 6.5 节这种系统就会出现. 当时, 我们看到 pde 在李群 (或其推广) 下的不变性只能在定义群的函数是使得变换后方程的系数与原方程的系数一致时才能保证. 这就导致了定义这种函数的巨大的 pde 组, 通常其大小较要定义的函数的数量要大得多.

对超定系统的叙述可在 [10] 中找到. 这里, 我们仅注意到这种方程组是否有解的问题[171]最终可以用重复交叉求导的系统方法来回答. 其想法是用关于自变量的越来越多的偏导数来攻克这一方程组, 并用混合导数的等式直接导致矛盾或者任何进一步求导得到的方程都自动满足为止. 当然这是一个繁琐的过程, 用符号运算处理器可以节省大量的时间, 现在符号处理器通常整合在系统地求群对称性的软件包中.

本书几乎没有注意到的领域是 *随机偏微分方程* 的研究, 随着对其应用的关注, 这个领域变得越来越重要. 其原因之一是人类活动从保险、金融到管理以及社会政策风险的定量化要求. 遗憾的是要掌握此课题对学生有两方面的要求, 即了解关于一般随机微分方程以及连续时间随机过程所需的微积分的进一步发展的知识. 在 1.1 节和 6.1 节中我们已经对此领域中的一些问题进行了粗略的叙述, 但是我们忽略了刚刚提到的两个方面, 若我们试图在这一课题进一步深入时, 马上会更深地陷入这些问题之中, 因此我们请读者参阅 [31].

最后, 我们要为缺乏对非光滑系数 pde 的讨论致歉. 虽然我们已经对不光滑边界和不光滑边界条件予以强调, 但仅有的两个关于不光滑系数的例子是 7.1.2 节的耗氧问题和7.4.2节的Stafan问题的焓表述. 太容易假设若 pde 具有不连续系数, 则

---

170 Kac, M. (1966), "Can you hear the shape of a drum?", *Amer. Math. Monthly*, **73**(4), 1~23.

171 比较, 例如, 关于单个函数 $u(x,y)$ 的方程组 (i) $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ 及 (ii) $\partial u/\partial x = 0$, $\partial u/\partial y = x$.

其解可以将在交界面两侧光滑的函数合成起来就构成了解. 这种直观的方法不仅依赖于一个交界面的存在性, 也依赖于此交界面的光滑性. 但我们可以回忆起我们不希望发生的混融区域在 Stafan 问题中是可能出现的[172]. pde 在系数间断处应该如何解释的整个问题甚至比守恒律的激波理论更为棘手.

本章无法补充这些 pde 方面的缺失内容而做到包罗万象, 取而代之的是我们将对某些不能直接归入第 1~8 章但能说明这些章中的某些概念的重要性与局限性的一些模型与方法进行考察作为本书的结束. 不可避免的是以下各节都是可扩展的.

9.2 线性方程组重提

记得我们是通过形如 $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \partial \boldsymbol{u}/\partial x_i = \boldsymbol{c}$ 的拟线性组进入应用 pde 理论的. 正如引言中指出的, 它覆盖了所有系数光滑且相对最高阶导数系数不为零的 pde. 现在我们用在第 4~6 章学到的知识重新审视此方程组. 很少新的一般的方法出现, 但某些特殊的方法适用于特殊的问题.

在第 4~6 章中如此成功应用的 Green 函数和 Riemann 函数可以拓广应用于线性方程组是不会令人意外的, 但正如下面将看到的, 我们要花费一些技术上的代价.

9.2.1 线性方程组: Green 函数

首先, 让我们回忆常微分方程 (ode) 组. 对 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 “Cauchy 问题” 是在 $t>0$ 求 $\boldsymbol{x}(t)$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(t), \tag{9.1}$$

并给定

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

它原则上可用求以下 Green 矩阵 来解, 该矩阵 $\boldsymbol{G}(t,\tau)$ 满足

$$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{9.2}$$

有

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I} \quad 在\ t=\tau, \tag{9.3}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵[173]. 容易看到这等价于

$$-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \delta(t-\tau)\boldsymbol{I}, \tag{9.4}$$

172 进一步的困难可能在实际问题中发生, 例如摩擦效应是用其符号依赖运动方向来建模的.

173 $\boldsymbol{G}$ 与常微分方程教科书 [11] 中常用的所谓基本矩阵有关.

具

$$G(T,\tau)=\mathbf{0} \quad \text{对某 } T>\tau, \tag{9.5}$$

这和 Riemann 函数的归结是类似的; 方程 (9.4) 只是意味着

$$G(\tau-0,\tau)-G(\tau+0,\tau)=I,$$

因此

$$G(\tau-0,\tau)=I.$$

利用 G 的不管哪一个定义, 用第 4~6 章重复用过的办法, 先将 (9.1) 乘 G 减去 (9.4) 乘 x, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Gx)=Gb, \tag{9.6}$$

从而

$$x(\tau)=G(0,\tau)x(0)+\int_0^\tau G(t,\tau)b(t)\mathrm{d}t. \tag{9.7}$$

注意到若 $A=$ 常数[174], 对 $t\leqslant\tau$, $G=\mathrm{e}^{-A(t-\tau)}$, 当 $\tau\to\infty$, b 趋向于一个常向量. 那么易见当 $\tau\to\infty$, 由 (9.7), 只要 A 的特征值有负实部

$$x\to -A^{-1}b.$$

对 (9.1) 的两点边值问题也可以用同样方法求解, 例如设我们有 Dirichlet 问题, 当 $x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 在 $t=0$ 和 $t=1$ 成立 $(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 那么

$$x(\tau)=\int_0^1 G(t,\tau)b(t)\mathrm{d}t, \tag{9.8}$$

其中为了满足边界条件, G 的最后 n 列在 $t=0$ 和 $t=1$ 为零. 我们亦可以用

$$-\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}-GA=\delta(t-\tau)I \tag{9.9}$$

或用 (9.2) 及

$$[G]_{\tau-0}^{\tau+0}=-I \tag{9.10}$$

定义 G.

很容易将 (9.7) 和 (9.8) 式与我们在 4.2.1 节和 5.5.1 节中分别叙述过的标量方程的Green函数联系起来. 事实上, 若我们将第4~6章中考虑的标量方程写为一阶

174 我们用

$$\mathrm{e}^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}$$

定义矩阵指数.

方程组, 这总是能做到的, 我们发现对这些问题的 Green 函数只不过是由 (9.2) 和 (9.3) 或 (9.29) 和 (9.10) 的拓广定义的 Green 矩阵的适当的元素. 然而除非 $\boldsymbol{A}$ 是常矩阵, (9.1) 一般不能重新化为一个标量方程, 从而上面叙述的方法还是有帮助的. 增加矩阵的复杂性而非标量 Green 函数的理由是为了解方程组, 我们需要知道 $\boldsymbol{x}$ 的每一分量被 $\boldsymbol{b}$ 的每一分量和所有分量驱动的响应.

记住这一点, 让我们转向线性双曲组的 Cauchy 问题

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} \quad \text{对 } x_1 > 0, \tag{9.11}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{例如, 在 } x_1 = 0 \text{ 上;} \tag{9.12}$$

我们设 $x_1 = 0$ 不是如 (2.53) 所定义的特征. 为了形式上求解这一问题, 我们用以下问题的解定义 Green (或 Riemann) 矩阵

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_i) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{B} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{I}, \tag{9.13}$$

其中具有向量自变量的 δ 函数如 4.2 节中一样定义, 且 $\boldsymbol{G}$ 在类似于图 4.1 所示的曲面 Γ 上为零. 那么和通常一样进行

$$\begin{aligned}-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_1>0}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{u})}{\partial x_i}\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{x_1>0}\boldsymbol{G}\boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{9.14}$$

若代之以对 $x_1 = 0$ 给定初始条件 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}')$, 其中 $\boldsymbol{x}' = (x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$, 以及 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, 上述积分给出标准的公式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{x_1=0} \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{u}_0\mathrm{d}\boldsymbol{x}'. \tag{9.15}$$

对 m 维问题, 即便对 $x_1 < \xi_1$, $\boldsymbol{G}$ 是质量集中在 $x = \xi$ 的 $m-1$ 维特征曲面上的分布, 这不是标准的情形. 因此, (9.14) 和 (9.15) 的积分包含了这些曲面以及它们与 $x_1 = 0$ 之交以及内部区域的贡献. 这是我们在 4.2.2 节末给出的 Riemann 函数的不连续性的传播的一个粗糙的推广.

对形如 (9.11) 的椭圆组具有在一个闭区域 D 的边界 ∂D 上成立, 例如

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_{2n})^{\mathrm{T}}, \quad \text{及} \quad (u_1, \cdots, u_n)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

的 Dirichlet 问题, 经完全类似的计算, 我们同样用满足 (9.13) 来定义 $\boldsymbol{G}$, 但其最后 n 列在 ∂D 上为零. 从以下模型我们可以看到, $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ 邻近的渐近性态不像在常微分方程情形那样容易洞悉.

9.2.2 线性弹性

在 4.7.1 节, 我们已经遇到过著名的线性弹性 Navier-Lamé 方程, 在三维稳定平衡情形它们是

$$\mathcal{L}\boldsymbol{u} \equiv \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{9.16}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 是位移, $\boldsymbol{f}$ 是单位体积上的力, λ, μ 是刻画材料特性的所谓 Lamé 常数.

根据恒等式

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

和

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\wedge(\nabla\wedge\boldsymbol{v}) = \nabla\cdot((\nabla\wedge\boldsymbol{u})\wedge\boldsymbol{v} - (\nabla\wedge\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{u}),$$

易见当给定 $\boldsymbol{u}$ 的适当的边界条件时, 算子 $\mathcal{L}$ 是自共轭的.

在开始之前有两点要说明, 首先方程组是二阶而非一阶的, 虽然它可以很费力地化成 (9.11) 的形式, 但没有任何理由将上述讨论只限制在线性一阶方程组的情形, 所以我们直接对 (9.16) 进行处理. 其次, (9.16) 是常系数的, 因此通过交叉求导可化为一个关于 $\boldsymbol{u}$ 的任一分量的标量方程, 这也是一个无聊的过程, 因为得到的结果是相对的简单了 (见习题 9.4), 而 Green 函数的物理意义却被隐藏起来了.

为简单起见, 我们只考虑各个方面都伸展至无穷的弹性连续体, 并假设 $|\boldsymbol{u}|$ 在无穷远的增长速度不快于 $|\boldsymbol{x}|$, 且应变分量 $\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$ 至少按 $O(1/|\boldsymbol{x}|^3)$ 的速度衰减[175]. 我们注意到刚体位移 $\boldsymbol{u} = \mathbf{c}$, 其中 $\mathbf{c}$ 为常量, 满足 $\mathcal{L}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ 和上述衰减条件. 因此, Fredholm 二择性[176]意味对一切 $\mathbf{c}$

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{c}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0,$$

因此

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

$\mathcal{L}\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ 以及衰减条件同样被 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{x}$ 满足, 对常量 $\boldsymbol{\omega}$ 它对应于一个刚体的旋转 (因为我们仅考虑小位移, 旋转可以表示为向量积), 因此

$$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

对一切 $\boldsymbol{\omega}$ 成立, 因此

$$\int \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

---

175 这些条件保证了弹性应变能是有限的.

176 对本节的余下的部分我们用 $\int\cdots\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 记在整个三维空间的积分.

物理上, 这些条件意味着 $\boldsymbol{f}$ 对连续体施加的合力和合力矩为零.

现在, 再一次利用 $\mathcal{L}$ 是自共轭的事实. 受 (9.13) 的启发, 定义 Green 矩阵为下述问题的解

$$\mathcal{L}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{I}, \tag{9.17}$$

且成立

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) \to \boldsymbol{0} \quad 当\ |\boldsymbol{x}| \to \infty, \tag{9.18}$$

上面各式都解释为按元成立. 易见 $\boldsymbol{G}$ 是对称的且仅依赖于 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}$, 由通常的做法立即得出

$$\int((\mathcal{L}\boldsymbol{G})\boldsymbol{u} - \boldsymbol{G}\mathcal{L}\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int(\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{9.19}$$

并由左端为零得

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

有意思的是, 如果我们一开始计算就没有依赖于 (9.19) 关于分布的正确性 (参见 (4.13) 后的评注). 那么用 Green 定理从一个以 $\boldsymbol{\xi}$ 为球心的小球得到一个分布, 它可以按照作用在该球上的力进行解释. 因此, $\boldsymbol{G}$ 在物理上可以按照任意直接作用在介质 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 处点力的响应 (因此我们并不期望它衰减得像前面我们对 $\boldsymbol{u}$ 要求得那样快).

为了求出 $\boldsymbol{G}$ 的显式, 我们只要考察 (9.17) 的 Fourier 变换. 定义

$$\widehat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi}) = \int \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \tag{9.20}$$

其中变换变量 $\boldsymbol{k}$ 是向量, 易见[177]

$$\widehat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{\mu|\boldsymbol{k}|^2}\boldsymbol{I} - \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^4}\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{9.21}$$

对此奇异函数作 Fourier 函数逆变换是要多加小心的 (见习题 9.5), 但它给出了 $\boldsymbol{G}$ 的元素为

$$G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\delta_{ij} + \frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2}\right). \tag{9.22}$$

非对角元的出现似乎难以从 (9.17) 中看出, 它们说明了前面给出的叙述: 每个 $\boldsymbol{f}$ 的分量影响到 $\boldsymbol{u}$ 的所有分量. $\boldsymbol{G}$ 的列恰好是前面叙述过的沿坐标轴作用的点力产生的位移.

当有边界时, (9.22) 仍然刻画 $\boldsymbol{G}$ 在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 附近的局部性态, 但毫无疑问镜像概念的应用比 5.6 节中的要复杂得多.

---

177 $\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 (k_ik_j).

9.2.3 线性无黏水动力学

我们现在考虑有实特征但非双曲的方程组的奇异解会发生什么？从而再一次说明 (9.11) 中 $\boldsymbol{f}$ 的分量影响 $\boldsymbol{u}$ 的分量的令人惊讶的方式. 我们将研究一个非常简单的无黏水动力学模型, 它将揭示在定常流体中的物体在受到提、拉的运动可以按照一个线性 pde 组的分布解来理解的基本概念. 模型是不可压 Euler 方程的截断情形, 它与 (2.3)～(2.7) 有关, 在 9.4.4 节还会引用. 当流体被一局部的力驱动, 而该力很弱只需保留线性项, 此方程的无量纲形式[178]为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0,$$

当 $t = 0$ 时成立 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. 我们现在研究不同的 $\boldsymbol{f}$, 它可能刻画不同类型的小物体在流体中运动的响应.

对所有的情形, 我们设流体从各个方面伸展至无限且在无限远处是静止的, 我们也可指望许多流体是无旋的, 因为在 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ 的模式, 速度涡 $\nabla \wedge \boldsymbol{u}$ 与时间是无关的. 因此, 若初始的涡度为零, 我们可以指望它保持为零, 但这方面我们会遇到出人意料的情形.

二维情形的一个提升力

考虑一个小的被提升的物体, 如机翼沿 x 轴移动. 我们设升力 $L\boldsymbol{j}$ 为向 y 方向, 沿着机翼位置 $X(t)\boldsymbol{i}$ 是给定的. 当轴与机翼一起移动, 我们期望 $\boldsymbol{u}$ 和 p 满足

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \dot{X}(t)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi} + \nabla p = L\delta(\xi)\delta(y)\boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{9.23}$$

其中 $\xi = x - X(t)$. 当 L 和 $\dot{X}$ 为常数, 我们可以设 $\partial \boldsymbol{u}/\partial t = \boldsymbol{0}$, 发现其 Fourier 变换

$$\widehat{\boldsymbol{u}}(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\xi + \mathrm{i}k_2 y}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y \tag{9.24}$$

得到

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \frac{L}{\dot{X}}\frac{\mathrm{i}}{k_1^2 + k_2^2}(k_2\boldsymbol{i} - k_1\boldsymbol{j})$$

且

$$\widehat{p} = \frac{\mathrm{i}k_2 L}{k_1^2 + k_2^2}.$$

将这些变换做逆变换是很简单的, 只要利用如下事实：因为 $\nabla^2 \log r = 2\pi\delta(x)\delta(y)$, $\log r$ 的变换为 $-2\pi/k_1^2 + k_2^2$, 答案为

$$\boldsymbol{u} = \frac{L}{2\pi\dot{X}}\frac{1}{\xi^2 + y^2}(y\boldsymbol{i} - \xi\boldsymbol{j}), \quad p = \frac{Ly}{2\pi(\xi^2 + y^2)}, \tag{9.25}$$

---

178 仅在本章我们恢复到用 $\boldsymbol{u}$ 表示水动力学中的流体速度的传统用法.

这是一个中心在 $x = X(t)$, $y = 0$ 的涡的速度场, 因此机翼的小的运动可等同于这样的涡.

当允许速度和升力变化时, 有时会出现相当不同的结果, 只要 $L = \Gamma\dot{X}$, 其中 Γ 为常数, 我们发现

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widehat{\boldsymbol{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1X}) = \frac{\Gamma\dot{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1X}}{k_1^2+k_2^2}(-k_2\boldsymbol{i}+k_1\boldsymbol{j}), \tag{9.26}$$

因此重新得到 (9.25). 然而只要 $L \neq \Gamma\dot{X}$, (9.26) 就不能直接积分, 而且 $\widehat{\boldsymbol{u}}$ 会发生变化. 例如, 若 $L = \Gamma\dot{X}H(t)$, 其中 H 是 Heaviside 函数, (9.25) 式由下式代替

$$\boldsymbol{u} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{y\boldsymbol{i}-\xi\boldsymbol{j}}{\xi^2+y^2} - \frac{y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}\right), \tag{9.27}$$

它表示一个 "开始涡" 在原点 $x = y = 0$ 散发出来[179]. 对这种情况, 期望离开机翼的流动是无旋的是不合理的. 此时 (9.23) 的单实特征已经传播了机翼运动的性质.

二维的拉动

这是一个有趣的问题, 是由著名的 d'Alembert 悖论 [27] 排除了导致物体在无旋流中以常速度运动的拉力的存在性而提出来的. 然而, 若我们试图天真地用下式代替 (9.23) 式来建立拉力的模型

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \dot{X}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi} + \nabla p = D\delta(\xi)\delta(y)\boldsymbol{i}, \tag{9.28}$$

我们发现, 当 D 和 $\dot{X}$ 为常数且 $\partial\boldsymbol{u}/\partial t = \boldsymbol{0}$ 时,

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \frac{-\mathrm{i}D}{\dot{X}(k_1^2+k_2^2)}\left(\frac{k_2^2}{k_1}\boldsymbol{i} - k_2\boldsymbol{j}\right), \quad \widehat{p} = \frac{\mathrm{i}Dk_1}{k_1^2+k_2^2}, \tag{9.29}$$

逆变换导致当拉动物体趋近于 $\xi = y = 0$ 时, $\boldsymbol{u}$ 的分量会出现 δ 函数, 事实上, 众所周知拉动一个加速物体, 通常称为 *增加质量* 必须由下式建模

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \dot{X}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi} + \nabla p = \boldsymbol{0}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = M\delta'(\xi)\delta(y). \tag{9.30}$$

其最后一项为 "质量涡极子" 且它导致速度场

$$\boldsymbol{u} = \frac{M}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\log r)\boldsymbol{i} + \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial y}(\log r)\boldsymbol{j}\right), \quad r^2 = \xi^2 + y^2, \tag{9.31}$$

它与 (9.29) 的不同表现在前述 $\boldsymbol{u}$ 中的 δ 函数, 因此 (9.28) 并非拉力的好的表示. 正确的表示 (9.30) 建立了由一个非提升物体对任意 $\dot{X}$ 产生的流动的模型且 Euler 方程的精确解揭示 M 与 $\dot{X}$ 是成正比的.

179 当考虑黏性时, 此涡扩散到整个流场, 最终是稳定的, 成立 $\int \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 围绕机翼等于 Γ, 这称为循环.

三维流

在三维时, 情形变得更加有趣, 当一在 $(Vt,0,0)$ 的小机翼由下式建模

$$-V\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi}+\nabla p=L\delta(\xi)\delta(y)\delta(z)\boldsymbol{j}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,$$

我们求出三维 Fourier 变换

$$\widehat{\boldsymbol{u}}=-\frac{\mathrm{i}Lk_2}{Vk_1(k_1^2+k_2^2+k_3^2)}\boldsymbol{k}.$$

因此, $\boldsymbol{u}=\nabla\phi$, 其中

$$\phi=\frac{L}{4\pi V}\frac{y}{y^2+z^2}\left(1-\frac{x-Vt}{((x-Vt)^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right),$$

所以甚至对稳定流, 一个尾波沿着退化特征 $y=z=0, x<Vt$ 散发出来, 这就是著名的 "马蹄涡"[26](见图 9.1).

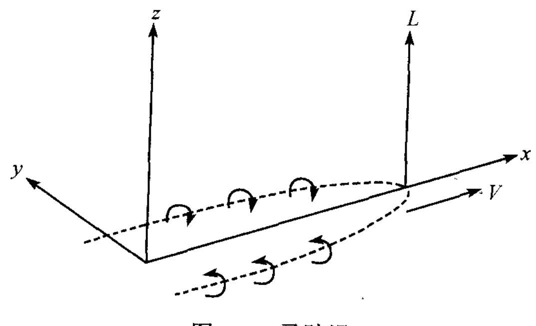


图 9.1 马蹄涡

我们的方法甚至可用于著名的由例如雪茄烟喷发时的涡环传播现象. 上述方法可以说明, 由以下方程为模型的稳定轴对称流

$$-V\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi}+\nabla p=D\delta(\xi)\delta'(y)\delta'(z)\boldsymbol{i}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$$

的解是

$$\boldsymbol{u}=\frac{D(2\xi^2-y^2-z^2,3\xi y,3\xi z)}{4\pi(\xi^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad 对\ (\xi,y,z)\neq 0,$$

这是一个涡环的远场 (见 [39] 和 (7.114)). 这一速度场与 (9.30) 质量偶极子产生的场的差别在于原点处的 δ 函数, 但更加重要的是它说明了由烟圈产生的运动等价于由方程中适当的点力产生的运动.

9.2.4　波传播的放射条件

对作为波传播模型的线性 pde 组, 用例如 Riemann 矩阵的思想直接在时间域通过分析三个独立空间变量和时间的方程来处理是可能的. 然而, 我们经常谈及, 若方程组的系数与时间无关, 那么比较容易且经常更有好处的是通过将因变量写成一个正比于 $e^{-i\omega t}$ 的函数[180], 将注意力集中于频率域中的单波. 在 5.1.5 节和 8.1 节中我们对标量波动方程就是这样做的. 某些这样的思想可以用到向量的情形. 然而许多吸引人的问题出现了, 如周期介质中的波传播, 正如在 4.5.4 节中已经提到, 在一维情形这导致了一个以周期 Sturm-Liouville 问题的特征值为界的通过或停止波段的概念. 但这一方法对常微分方程来说强烈依赖于完善发展的周期系数的 Floquet 理论. 由于波从每个周期单元边界反射的几何复杂性, 去理解这类问题的多维构架是非常困难的. 我们不能在这里进一步讨论这个问题是令人遗憾的, 因为它对波在晶格中的传播有着本质的重要性.

考虑无界的, 在远处为均匀的载波介质的频率域中问题的另一话题是拓广 Sommerfeld 条件 (5.75) 的放射条件问题, 它对保证标量问题的唯一性是至关重要的, 例如对 Maxwell 方程 (见 4.7.2 节), 我们可以假设由任何非零强度的有界源的远场辐射关于距离的衰减正比于 e^{ikr}/r (或在二维时 $e^{ikr}/\sqrt{r}$), 其中 $k=\omega/c$ 为波数. 现在按照 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直于任何波的传播方向的意义, 所有的电磁波为横波, 在频域这是 (4.82) 的推论, 因为当我们求形如 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ 的解时, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都垂直于 $\boldsymbol{r}$. 因此, 我们可以在距离很远处, 此时 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 接近于平行, 将 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 写成

$$\boldsymbol{E}\sim\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{H}\sim\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{h},$$

其中 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 都是方位角, 且直至最低阶与 $\boldsymbol{r}$ 无关. 那么选取适当单位 (4.82) 式立即得出放射条件, 当 $\to\infty$

$$\boldsymbol{0}=\nabla\wedge\boldsymbol{E}-i\omega\boldsymbol{H}\sim i(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{e}-\omega\boldsymbol{h})=o\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\boldsymbol{0}=\nabla\wedge\boldsymbol{H}-i\omega\boldsymbol{E}\sim i(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{h}-\omega\boldsymbol{e})=o\left(\frac{1}{r}\right).$$

同样对弹性问题, 波动方程 (4.73) 意味着远离源的任何有界区域, $\boldsymbol{u}$ 如同 $\boldsymbol{u}_0e^{ikr}/r$ 那样衰减, 其中 $\boldsymbol{k}$ 是径向的. 正如我们希望的, 对应于横向剪切波 (S- 波), 我们可以求得

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_s,\quad 其中\ \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{k}_s=0\ 及\ \omega^2=\frac{k_s^2\mu}{\rho},$$

180 这样的波总可以在时间域叠加产生解, 当然说比做要容易.

对应于纵向压缩波 (P- 波)

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_p, \quad \text{其中 } \boldsymbol{u}_0\wedge\boldsymbol{k}_p=\boldsymbol{0} \text{ 及 } \omega^2=\frac{k_p^2(\lambda+2\mu)}{\rho},$$

因此放射条件是, 在距离很远处

$$\boldsymbol{u}\sim\boldsymbol{u}_s\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_s r}}{r}+\boldsymbol{u}_p\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_p r}}{r},$$

其中 $\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{k}_s=0$, $\boldsymbol{u}_p\wedge\boldsymbol{k}_p=\boldsymbol{0}$.

9.3 复特征和分类

我们已经多次指出了椭圆性、抛物性和双曲性的显著差异. 已经作出的协调二者概念差异的努力是 Garabedian 的 **复特征理论**[21]. 其基本思想是基于椭圆型偏微分方程组的通解一般都是自变量的解析函数, 因此对椭圆型方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,$$

我们可以求关于 $\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta$ 解析的解. 注意到这意味着

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=0.$$

将这两个方程相减得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=0,$$

这是关于 (y,η) 的 **双曲型方程**. 然而这一过程不可避免地常涉及边界条件的解析延拓, 这是我们早就指出的有危险性的过程, 它仅当延拓到 $\eta\neq0$ 时不遇到奇性才是合理的 (见习题 9.7).

用第 8 章的射线理论, 我们可以获得试图将椭圆性、抛物性和双曲性进行统一的缺陷的进一步认识. 例如在 $y>0$ 考虑以下问题

$$\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, \tag{9.32}$$

有

$$\phi(x,0)=\mathrm{e}^{-x^2/2\varepsilon}, \quad \varepsilon>0 \tag{9.33}$$

以及

(i) $\alpha>0$ 且当 $y\to\infty$, $\phi\to0$

或者

(ii) $$\alpha < 0 \text{ 且在 } y = 0 \text{ 上 } \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sqrt{-\alpha}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

易见在椭圆情形 (i), 衰减条件是足以保证唯一性; 对情形 (ii), Cauchy 问题等价于 ϕ 是 $x - \sqrt{-\alpha}y$ 的函数, 保证了唯一性. (当 $\alpha = 0$ 即 "抛物" 情形, 在无穷远处的唯一的解是 $\phi(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2/2\varepsilon}$.)

虽然在每一个问题中参数 ε 可用改变尺度的办法去掉. 但是我们期待当 $\varepsilon \to 0$ 时得到我们推断的极限. 事实上, 这种极限 ϕ 与 Green 函数或 Riemann 函数紧密联系的, 以后我们会看到它们的确切关系. 现在我们用射线理论, 作 $\phi \sim A\mathrm{e}^{u/\varepsilon}$ 的渐近分析得到短时方程

$$\alpha\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

Charpit 方法得出 $u = -s^2/2$, 其中在情形 (i)

$$x = s(1-t), \quad y = \pm\frac{\mathrm{i}st}{\sqrt{\alpha}}, \quad u = -\frac{(x \pm \mathrm{i}y\sqrt{\alpha})^2}{2}.$$

因此, 当 $y \to \infty$ 没有指数衰减的可能性. 然而对情形 (ii) 有

$$x = s(1-t), \quad y = -\frac{st}{\sqrt{-\alpha}}, \quad u = -\frac{(x - y\sqrt{-\alpha})^2}{2}.$$

因此, 对情形 (ii) 特征为 $x = s + y/\sqrt{-\alpha}$, 我们重新获得边界条件沿特征 $x = y/\sqrt{-\alpha}$ 传播的希望. 而情形 (i) 不幸无法揭示出像伴随 (9.32) 的 Green 函数的奇性那样的任何东西. 所以射线摄动渐近分析在方程为双曲时很起作用, 但对椭圆方程会导致解的无界的振荡和增长.

现在我们对这两种情形用 Fourier 变换求解, 解答是

(i) $$\phi(x, y) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon k^2/2 - \sqrt{\alpha}|k|y - \mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{9.34}$$

(ii) $$\phi(x, y) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon k^2/2 + \mathrm{i}\sqrt{-\alpha}|k|y - \mathrm{i}kx}\mathrm{d}k, \tag{9.35}$$

对两种情形, 指数中 y 的系数由边界条件唯一决定.

现在我们必须依靠积分渐近展开理论 [22] 的某些结果. 当 $\varepsilon \to 0$, (9.35) 总是由我们记 $k = \kappa/\varepsilon$ 得到

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\kappa^2/2 + \mathrm{i}\sqrt{-\alpha}\kappa y - \mathrm{i}\kappa x)/\varepsilon}\mathrm{d}\kappa$$

时出现的鞍点的贡献来近似. 鞍点位于 $\kappa = \mathrm{i}(x - y\sqrt{-\alpha})$, 导致 ϕ 中 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x - y\sqrt{-\alpha})^2/\varepsilon}$ 项. 然而, 对情形 (i) 积分必须写成

$$\mathrm{Re}\frac{1}{\pi\sqrt{2\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\kappa^2/2 + \mathrm{i}\sqrt{\alpha}\kappa y - \mathrm{i}\kappa x)/\varepsilon}\mathrm{d}\kappa,$$

它总是由靠近于 $\kappa=0$ 的端点的贡献所近似, 即 $\varepsilon y\sqrt{\alpha}/(\alpha y^2+x^2)$, 它正比于 (9.32) 带有 $y=0$ 上的 Dirichlet 边界条件的 Green 函数关于 y 的导数.

因此, 我们可以将从双曲到椭圆的转换与在 Fourier 积分求逆轨道上鞍点出现与否等同起来. 在情形 (i) 求逆轨道不能变形为一条 "最速下降" 轨道 (见图 9.2(i)), 但在情形 (ii) 时是可以的 (图 9.2(ii)). 注意, 从射线摄动渐近分析出现的函数是没有通常意义下的 Fourier 变换的, 因此我们写的 (9.34) 是不合法的.

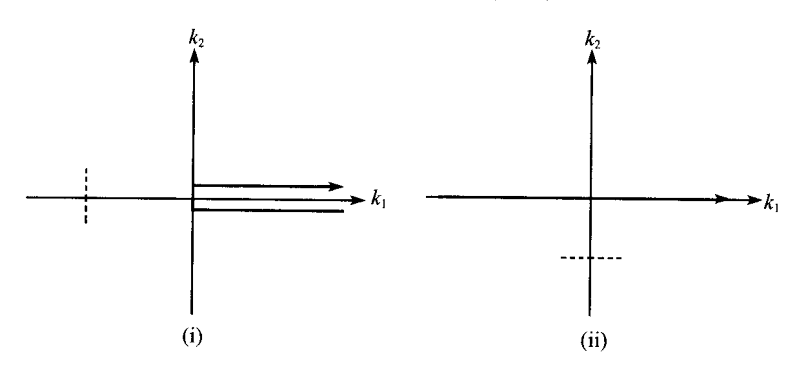


图 9.2 情形 (i) 与 (ii) 的求逆轨道, 在两种情形中都取 $x=0$, 最速下降方向用虚线表示

9.4 有一个实特征的拟线性组

令人烦恼的是实际问题提出的 pde 组像 9.2.3 节那样按照第 3 章的意义既非椭圆又非双曲, 通常又是非线性的, 因此需要根据各自的特点分别进行处理. 在此我们仅给出三个例子.

9.4.1 具有电阻发热的热传导

在许多电器装置如热敏电阻的模型中, 热传导方程中热传导必须与电磁阻抗或装置的电阻发热进行耦合. 对一个最简单的构架, 电流密度 $\boldsymbol{j}$ 与电势 ϕ 通过 Ohm 定律相联系

$$\boldsymbol{j}=-\sigma(T)\nabla\phi, \tag{9.36}$$

其中电导率 σ 是温度 T 的一个正函数. 在拟稳恒的条件下, 电荷守恒给出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=\nabla\cdot(-\sigma(T)\nabla\phi)=0. \tag{9.37}$$

同时阻抗热形成一个体热源 $-\boldsymbol{j}\cdot\nabla\phi$, 在适当的单位下能量方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla^2T+\sigma(T)|\nabla\phi|^2. \tag{9.38}$$

按照 2.6 节, 容易验证 (9.37) 的唯一实特征是 $t=$ 常数. 但这令人失望, 因为它只给出很少的关于解的结构的信息. 它只揭示了对 T 提初始条件和对 T 与 ϕ 都提边界条件可能足以保证适定性, 至少对 σ 是严格正的情况是如此. 另一明显的特性是当有足够的对称性时 (如一维的情形), (9.37) 可显式地积出, 消去 ϕ 后得到关于 T 的一个抛物方程. 当热敏电阻与外部电路耦合时, 这个方程可能是 "非局部" 的. 然而在稳态的情形, 对二维问题, 得到的椭圆方程组具有在共形映射下不变的良好性质, 因此若边界条件具有适当的形式, 可求得许多显式解 (见习题 9.8).

9.4.2 空间电荷

另一有趣的电磁现象发生在一个很强的电场足以将离子发射到其作用的介质中. 这种情况可能发生于空气包围的高压直流输电线. 另一例子是用静电沉淀从电站的发射装置中除去微小的颗粒或用带电的漆微粒镀到金属工件的表面. 因为所有的电流是离子的运动产生的, 因此取电流密度为平均电荷密度 ρ 以及平均粒子运动速度 $\boldsymbol{v}$ 之积是合理的, 即由

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}.$$

许多场合 $\boldsymbol{v}$ 可通过一个离子或带电微粒上的静电力平衡求得, 它正比于 $-\nabla\phi$, 还有一个正比于 $\boldsymbol{v}$ 的黏性拉力, 因此在适当的单位下

$$\boldsymbol{j}=-\rho\nabla\phi.$$

由电量守恒得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\nabla\cdot(\rho\nabla\phi)=0, \tag{9.39}$$

但是 $\varepsilon=1$ 的 Maxwell 方程要求 ρ 和 ϕ 由以下的 Poisson 方程联系起来

$$\nabla^2\phi=-\rho. \tag{9.40}$$

根据 2.6 节的办法, 我们发现法锥只有一个实分量, 即其为一个平面. 因此, 在空 - 时中特征锥是线 $(-\nabla\phi,1)$. 对稳态问题, 这给出了相当深入的观察, 因为易见 (9.39) 化为

$$\nabla\phi\cdot\nabla\rho-\rho^2=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}+\rho^2=0,$$

其中 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ 记沿特征的微商. 而且在稳定状态存在一个 "流函数" ψ 使得

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \rho\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

而在正交于等势线的特征上 ψ 为常数. 以上的观察使我们可用变换到速度图变量 ϕ,ψ 的方法将问题简化. 在习题 9.9 中给出了一些解.

9.4.3 流体动力学：Navier-Stokes 方程

在考虑更加重要和困难的 Navier-Stokes 方程时，记住前面引入的一些概念是有益的. Navier-Stokes 方程可能是得到最广泛研究的非线性 pde 组，而且是本书前面叙述过的两种不同模型的综合. 对不可压缩流，方程组是

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla p+\frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{u},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{9.41}$$

具有适当的初始与边界条件，唯一的参数为 R，称为 Reynolds 数，它反比于流体的黏性. 注意到 (9.41) 的导出，我们只指出，当 $R\to\infty$ 时，我们又形式上得到第 2 章中叙述过的无黏流，当 $R\to 0$ 以及 $p=O(R^{-1})$ 时，我们回复到第 5 章的缓慢流动. 在 [29] 中可找到完整的推导，在该文中还解释了对大的有限的 R，边界层方程 (6.77) 是适当的.

在本书中我们已经看到，作为不同近似的结果，(9.41) 是许多 pde 组的起源，其中有的是椭圆的，有的是双曲的. 然而除了 R 是很小的情形，对原方程没有关于存在唯一性或适定性的严格结果. 遗憾的是许多有趣的和重要的流动发生在 R 很大的情形 (例如在空气动力学中为 10^8)，事实上人们广泛相信，湍流现象可以用 R 很大时的 (9.41) 来描述. 因此，(9.41) 具有理论的挑战性是毫不令人意外的，我们从考虑形式极限 $R=\infty$ 的情形开始讨论.

9.4.4 无黏流：Euler 方程

采用标准的方法，我们首先求下述方程组的实特征曲面

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\nabla p,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0. \tag{9.42}$$

在流动的某些点的邻域局部地 “冻结” 算子 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla$，我们发现，若用 $\phi(\boldsymbol{x},t)=$ 常数记特征曲面，并记 $\partial\phi/\partial t=\xi_0$，$\partial\phi/\partial x_i=\xi_i$，法锥为

$$\left(\xi_0+\sum_{i=1}^{3}u_i\xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2\right)=0. \tag{9.43}$$

因此，特征曲面只有一个实分量，它退化为一条线

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}, \tag{9.44}$$

称为 *粒子路径*. 且容易看到，对定常流 (9.42) 中的 $\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ 为零，量 $p+\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$ 是粒子路径上的 Riemann 不变量，所以称为 *流线* (t 就是沿着路径的距离参数)，这个结果是流体动力学中的所谓 *Bernoulli 方程* 的一个版本，而这一简单的 Riemann 不

变量应用在计算水压力时具有根本的重要性. 然而通过考察 Riemann 不变量概念的下述拓广, 从 (9.42) 中可以发掘出更多的信息.

在第 4 章我们只是设定目标为寻找自变量和因变量的函数, 它沿特征是不变的, 至少对二维的情况是如此. 但为什么我们不去找沿特征线是守恒的 $\boldsymbol{u}$ 的 *导数* 的函数, 甚至是向量值或矩阵值函数呢[181]? 初看似乎这是一种无聊的想法, 因为不仅计算导数满足的方程是十分冗长的, 而且引入高阶导数令它们满足的方程组更加超定. 然而看一下我们只考虑 (9.42) 中 $\boldsymbol{u}$ 和 p 的关于空间变量的一阶导数: 若我们机智地利用非线性项的齐次性和用交叉求导消去 p, 在二维空间 (x, y), 其中 $\boldsymbol{u} = (u, v)$, 我们得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0. \tag{9.45}$$

因此, 涡度

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.46}$$

沿着特征线是守恒的. 当流稳定时, Bernoulli 函数 $p + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ 沿特征线也是守恒的.

这样的想法推广至三维甚至是更加迷人的, 由 (9.46) 启发或基于先前关于流体动力学的讨论, 定义

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \boldsymbol{u}, \tag{9.47}$$

通过交叉求导的练习得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \tag{9.48}$$

而此方程对无黏流体动力学有着像 (9.45) 一样戏剧性的含义. 在 9.2.3 节中我们已经看到无黏线性化方程具有 *无旋解*, 即若初始时 $\boldsymbol{\omega}$ 为零, 有 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ 的解. 现在我们能看到这一结果也适用于完全非线性 Euler 方程. 从 (9.45) 看出这一点是平凡的, 但从 (9.48) 看出这一点就不那么容易了. 在任何一种情形, 正如第 5 章所预言, 有一大类无旋流, 存在速度势 ϕ 使得

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi, \tag{9.49}$$

对这些*势流*, (9.42) 意味着 Euler 方程已经化为第 5 章最简单的情形, 即

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{9.50}$$

181 找守恒导数的思想也可应用于 6.5 节的群论方法, 此时群作用在 *喷射空间* 上.

通过考察其梯度容易证明, 量

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla \phi|^2+p \tag{9.51}$$

对势流是全局不变的, 不仅像上面讨论得到的只是在任一特征上是不变的.

以后我们还要更多地谈到速度势, 但首先让我们回到稍显神秘的方程 (9.48), 初看它并不是沿着特征 (9.44) 守恒的表述. 然而必须记住我们现在处理的是向量 $\boldsymbol{\omega}$, 这迫使我们重新考虑沿着一条曲线守恒意味着什么. 如图 9.3 所示, 只有将 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $t+\delta t$ 的值与其在 t 时的值联系起来, 说 $\boldsymbol{\omega}$ 沿着 (9.44) 守恒才有几何意义. 我们先画通过点 P 的向量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 考虑 P 和附近的点 P' 分别演变为 Q 和 Q', 并要求 $\boldsymbol{\omega}(t+\delta t)$ 的方向是沿着 QQ' 的. 通过简单的计算 (习题 9.11) 说明 (9.48) 确是 $\boldsymbol{\omega}$ 在这样的几何意义下守恒的条件.

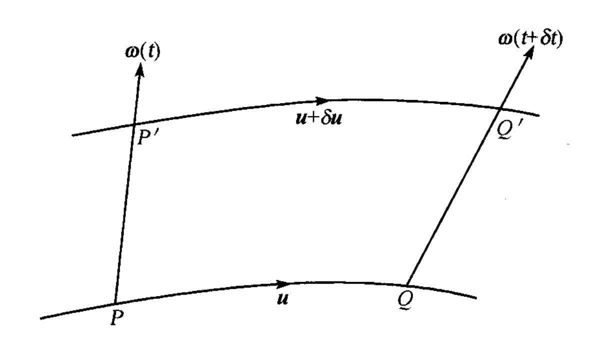


图 9.3 涡量的守恒

我们提醒注意, 当考虑像液晶这样的流体时, 甚至这样的守恒概念还需前进一步. 它的各向异性的结构要求它们的性质在任意 “离子” 上由一个矩阵或线性变换描述 (它是由粒子传送的). 这就需要考虑一个线性变换沿着像 (9.44) 那样的向量场守恒. 因此, 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}'$ 是守恒时我们要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征便得

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}'}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}'=(\boldsymbol{a}'\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \tag{9.52}$$

而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$ 在 $t=0$ 成立, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$ 对一切 t 成立. 如习题 9.12 说明的, 这要求

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}, \tag{9.53}$$

其中涡度矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 的元素为

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

我们以关于 $\boldsymbol{u}$ 的初始与边界条件的讨论来结束关于 Euler 方程的研究. 对无旋流, 椭圆方程 (9.50) 通常有 Neumann 条件, 但对有旋的情形并非那么清楚. 然而,

如同第 5 章中的椭圆性我们可以在信息是沿着特征传播的基础上进一步作出一个有教益的猜测. 若 (9.42) 是双曲的, 我们可以指望必须有 $\boldsymbol{u}$ 和 p 的四个 Cauchy 边界条件指定在边界上, 若我们用 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 就需要六个边界条件. 然而从 (9.43) 可以看出射线锥只有一个实的分量, 即粒子路径伴随着 Laplace 算子的复分量. 而且有一个类时方向, 这意味着信息只是沿着粒子路径按流动方向传输. 现在我们回忆当 $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$, 在任何粒子路径进入我们感兴趣的区域的入口, 问题退化为 Laplace 方程, 只需要一个 Cauchy 边界条件 (典型的是 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$). 因此, 我们推测, 当 $\boldsymbol{\omega}\neq 0$ 时需要更多的信息, 仅给出 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ 是不够的. 我们不能作出确切的表述, 但习题 9.13 表明, 给定 $\boldsymbol{\omega}$ 本身会导致问题超定.

9.4.5　黏性流

如先前提示, 本书对十分困难的 Navier-Stokes 方程 (9.41) 只有很少的东西可说. 如同先前电阻发热的例子, 我们发现对 R 的有限值, (9.41) 是抛物型的, 而仅有的实特征流形是 $t=$ 常数, (9.48) 也变成

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\frac{1}{R}\nabla^2\boldsymbol{\omega};\tag{9.54}$$

这提示了黏性起了弥散温度的作用, 因此温度不再按图 9.3 的意义守恒.

很明显余下的唯一的途径就是求显式解, 只要几何形状是足够对称或寻者有对存在唯一性有帮助的估计 (如 [14]) 或者有求近似解的多种方法. 事实上, 我们已经在本书中多次遇到这种近似, 但它们与最近几十年发展起来的多变和精细的摄动理论相比是比较粗糙的. 然而对二维定常流的特殊情形最近出现了一个惊人精确的结果. 这使得用两个任意函数写出 Navier-Stokes 方程的通解的可能性得以实现. 该结果在此叙述过于复杂[182], 但它们起源于共形不变的思想. 回想在二维情形 Laplace 方程的通解可以写成

$$u=\mathrm{Re}f(z),$$

其中 f 是任一解析函数, 同时, 在 5.8.4 节中我们看到双调和方程的通解为

$$u=\mathrm{Re}(\overline{z}g(z)+h(z)),$$

其中 g 和 h 是任意解析函数. 现在, 对定常流, (9.54) 可想象为双调和方程的非线性拓广, 因为若我们引入流函数 ψ 使得 $\boldsymbol{u}=(\partial\psi/\partial y,-\partial\psi/\partial x)$, 那么我们发现

$$\frac{1}{R}\nabla^4\psi=\frac{\partial(\psi,\nabla^2\psi)}{\partial(y,x)}.\tag{9.55}$$

182 见 K. B. Ranger 的论文 "Parametrization of general solutions for the Navier-Stokes equations", *Quart. Appl. Math.*, **52**, 335~341, 1994.

进一步, 我们回忆在 5.12 节甚至对非线性 Liouville 方程, 可将 z 和 $\bar{z}$ 视作自变量而将其化为 Ricatti 方程求解. 同样类型的思想在这里是适用的; (9.55) 可以写作

$$\frac{4}{R}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} - 2\mathrm{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}} = 0,$$

它反过来又可以分裂成一个函数与其共轭之和如

$$\left\{\frac{2}{R}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} + 2\mathrm{i}\left(\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^3\psi}{\partial z\partial\bar{z}^2}\right)\right\}$$
$$+\left\{\frac{2}{R}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} - 2\mathrm{i}\left(\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\bar{z}}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}}\right)\right\} = 0.$$

大括号中的每一项是完全的二阶导数, 因此

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right)\right] = 0,$$

这就最终使 ψ 可用 z 和 $\bar{z}$ 的两个函数表示出来.

9.5 介质之间的相互作用

当 pde 用来对科学技术中更加复杂的结构建模时, 我们不可避免地遇到不同的 pde 用各种方式耦合在一起的复合问题. 一个现在已经成为经典的例子来源于飞机结构的颤振或船舶潜艇的水下声学的下述问题.

9.5.1 流体/固体声学相互作用

我们可以设想的最简单的情形是一种流体载弹性固体的情形: 固体本身会传播波, 它浸入的流体也会传播波. 一个直觉的问题是声波在在固体附近会选择哪一种介质中传播呢? 典型的对二维空间的情形, 我们必须解在频率域 $y > 0$ 中的无黏性的 Helmholtz 方程, 在边界上满足一个波算子条件而非第 5 章中讨论的传统的 Dirichlet 或 Neumann 边界条件. 最简单的构架是固体是一张膜, 则流体的速度势为 $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\phi(x, y))$ 且 ϕ 满足

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0 \quad 对\ y > 0. \tag{9.56}$$

若膜的垂直位移为 u, 边界条件为

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u = \nu p \quad 在\ y = 0\ 上, \tag{9.57}$$

其中 c 是波在膜中相对于流体的速度, ν 是度量 "流体载荷" 的正常数, p 是流体施加的压力. 为使模型封闭, 在 $y=0$ 处的 Bernoulli 方程和对小扰动的动力学条件, 有

$$p = \mathrm{i}\omega\phi(x,0), \quad -\mathrm{i}\omega u = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0), \tag{9.58}$$

另外还要给定源和必要的放射条件.

这类问题提供了许多新的挑战和机会. 从负面来讲, 放射条件比第 5 章考虑的方程组更不清楚, 但同样地, 方程是线性的易于用 Green 函数方法和对这样的几何形状易于用 Fourier 变换. 正如像对这种看起来简单的实际问题经常发生的情况一样, 其技术细节是十分令人生畏的, 需要大量的篇幅. 然而, 其预测的结果是令人惊讶的, 它得出对一个位于膜上的源, 仅当 $c<1$ 时, 会将能量均匀地辐射到流体的无穷远处. 这是超音速流和亚音速流的差别的一个简单的推广 (见习题 9.15).

9.5.2 流体/流体重力波相互作用

只要两种介质在一个很可能是运动着的交界面上相互作用, 对交界面的运动可以建立一个自由边界模型. 这种情形最常见的就是 7.1 节中讨论的具有不同密度的不混融的无黏流互相流过的情形. 而且因为交界面的运动很小以至于可以像 7.2 节中那样线性化. 原则上所有这种复合问题能够 "浓缩" 为仅用涉及定义在不同区域之间的边界上的变量来描述的问题. 例如, 在 (9.56) 中我们记 Dirichlet-to-Neumann 算子为

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) = \mathcal{L}\phi(x,0), \tag{9.59}$$

则 (9.57) 成为

$$\left(c^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k^2\right)\mathcal{L}\phi(x,0) = \nu\omega^2\phi(x,0). \tag{9.60}$$

当然, 现在 $\mathcal{L}$ 是一个整体算子[183]且这立刻将我们引入积分微分方程的范畴, 原则上讲这超出了本书的范围. 然而这涉及许多有趣的新思想, 习题 9.16 叙述了一个引人注目的例子. 它是 Benjamin-Ono 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{H}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{9.61}$$

其中 $\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 变换. 在 9.7 节中我们会再次提及.

---

183 事实上,

$$\mathcal{L}u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k(x-\xi))u(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中 $H_0^{(1)}$ 是第一类 Hankel 函数.

9.6 规范与不变性

在本书的不同阶段, 我们已经遇到 pde 或多或少不是用积分来求解而是用一种似乎是漫不经心的办法来求解的, 例如在二维不可压缩流体动力学中我们简单地断言只要流函数成立 $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$, 质量守恒方程 $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ 是自动满足的. 更近的对 (9.49) 中的速度势我们也作同样的断言. 在一个稍高的水平, 在 (5.110) 式后我们断言 Maxwell 方程中的 $\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0$ 可用存在一个向量势 $\boldsymbol{A}$ 使得 $\boldsymbol{H} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$ (或斜对称矩阵其散度为 $\boldsymbol{H}$) 来解得. ψ, ϕ 和 A 这种量经常被称为*规范*, 在提及另一些有意思的实例之前我们先作以下两个一般的注记.

1. 大部分 pde 并不具有规范, 至少不是一种显然可以决定的形式.

2. 由于规范的不唯一性, 使用规范总是要付出代价的. 对前面提到的情形 ψ, ϕ 和 $\boldsymbol{A}$ 在分别相差一个附加常数或一个函数的附加梯度的意义下是任意的. 而在与时间无关的情形, $\boldsymbol{A}$ 可以在允许相差一个常数的意义下由要求 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 确定下来, 它称为 Coulomb *规范*. 为了应用第 2 章意义下的适定性, 对这些规范的模型放松唯一性对允许这些变换是必要的.

然而, 缩减 pde 组的大小带来的方便超过引入规范的好处是大家都体验到的事实, 而规范可能在实际问题的建模中发挥主要的作用.

说明规范函数概念的复杂性的一个有趣的例子来自以下的问题: “用多少个独立的标量函数来定义 $\boldsymbol{u}(x, y, z)$ 就能够刻画它的分量的特征?” 比简单地说 “三个, $\boldsymbol{u}$ 的每一个分量是一个” 的回答更有内涵的答复由下述向量场分层次给出:

1. 设温度为零

$$\nabla \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{9.62}$$

这是一个高度退化的 pde 组, 其法锥是全空间; 2.6 节中的计算对任意的 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 都得到零. 然而, 众所周知 (9.62) 成立的重要条件是

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi \tag{9.63}$$

对某规范函数 ϕ 成立, 它在允许相差一个常数的意义下唯一确定的, 因此 $\boldsymbol{u}$ 是在相差一个常数的意义下由一个函数解析地刻画特征, 几何上, 场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是处处与曲面 $\phi =$ 常数正交的. 然而这个几何条件对某些函数 ϕ_1, ϕ_2 当

$$\boldsymbol{u} = \phi_1 \nabla \phi_2 \tag{9.64}$$

成立时也是满足的. 这就导致进入下一层.

2. 设*螺旋性* $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \wedge \boldsymbol{u}$ 为零:

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \wedge \boldsymbol{u} = 0. \tag{9.65}$$

此标量方程对 (9.64) 是自动满足的且它甚至比 (9.62) 更加欠定. 然而可以证明 (9.65) 蕴涵了 (9.64), 其中 ϕ_2 是不确定的, 至少是在乘一个常数的意义下是如此. 因此, 得出存在一个处处与 $\boldsymbol{u}$ 正交的二维曲面簇的重要条件就是 (9.65). 若 (9.65) 作为 $\boldsymbol{u}$ 的 pde 组的一部分出现时, 它可以被规范函数 ϕ_1, ϕ_2 的存在性替代.

3. 最少退化的情形是当

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\wedge\boldsymbol{u}=f \tag{9.66}$$

而 f 是一个在感兴趣的区域中不等于零的给定函数. 我们能够说的最好的是任何刻画 $\boldsymbol{u}$ 的特征要求三个标量函数并推广 (9.64), 它们就是所谓 Clebsch 势, 它以下述形式表示 $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u}=\phi_1\nabla\phi_2+\nabla\phi_3. \tag{9.67}$$

ϕ_1, ϕ_2 和 ϕ_3 的规范性甚至比螺旋性为零时更不清楚.

我们不能在这里进一步讨论这些问题, 而只能说明螺旋性在磁流体力学中起着重要的作用 [28]. 甚至对没有边界的 Euler 方程 (9.42) 和 (9.48), 易见对 $\nabla\wedge\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\boldsymbol{x}&=\int\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\int(-\nabla p\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&=\int\nabla\cdot(-p\boldsymbol{\omega}+(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{x};\end{aligned} \tag{9.68}$$

假设 p 和 $\boldsymbol{u}$ 在无穷远处衰减得足够快, 上式为零, 因此螺旋性是守恒量.

9.7 孤 立 子

Benjamin-Ono 方程 (9.61) 是一小类非线性模型的例子, 这些模型大多为 pde, 它们在科学上的影响已经大大超出它们在数量上占的比例. 另外一个足够简单可以在这里导出的例子是许多刚性摆 (如大头针) 吊挂在一个具有扭转刚度的弹性物体 (如弹性带) 沿 x 排齐如图 9.4 所示. 在没有重力的情形, 扭转波可以下传到系统, 根据众所周知得一维波动方程

$$c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0, \tag{9.69}$$

其中 $\theta(x,t)$ 是在 x 处摆离开垂直向下方向的角位移, c 是扭转波速. 同样地, 若没有任何空向的变化, 有重力出现一长度为 l 的摆会根据单摆方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

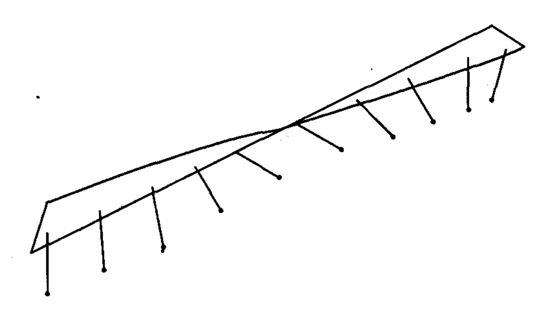


图 9.4 Sine-Gordon 方程的实现

来响应. 将这两个机制联合起来, 我们得到了著名的 Sine-Gordon *方程*[184]

$$c^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{9.70}$$

到目前为止关于 Sine-Gordon 方程我们必须作两点说明, 它是双曲的 (对 Benjamin-Ono 方程我们甚至不能说这么多) 且它存在涉及双曲正割 (对 (9.61) 是双曲正切) 的行波解. Sine-Gordon 方程、Benjamin-Ono 方程和后面提到的一些其他方程的 Cauchy 问题几乎可以显式求解的发现来自一系列包括守恒律、群变换、特征值问题、散射理论和反问题等互不关联的思想的联合作用. 最大的驱动来自于关于某些被称为 "孤立子" 的行波解的著名的数值实验, 这些行波解相互通过且分开, 就像他们是 (9.69) 的原型解一样. 甚至在先驱性的工作出现三十年后, 激发孤立子理论的关键思想比本书中的其他思想更加困难, 部分原因是缺乏初等的几何解释.

在前面几章中与遇到孤立子理论最接近的是第 6 章中我们讨论用群的变换简化某些 pde 的可能性. 那时, 我们只是寻求自变量和因变量的 "相似变换". 甚至将 6.5 节的想法拓广至包含因变量的导数也会使我们遇到未经确认的复杂方法. 但这不会限制我们想象当 pde 满足时什么对象是不变的. 对这个问题的简单回答是对象可能是一个函数 (像 Reimann 不变量) 或者是一个泛函 (像守恒率的积分密度) . 但假设我们将提出一个问题, 这个问题可能由对量子力学感兴趣的科学家提出的: "依赖于一个未知函数的 *算子*, 当此函数是根据某 pde 而演变时, 该算子能否是不变的?" 正如我们考察最简单的平凡线性算子即 2×2 矩阵时可以看到这是一个比前一个问题更加讲究的问题. 特别地, 我们问 "是否存在 $a_{ij}(t)$ 必须满足的常微分方程组使得

$$\boldsymbol{A}(t)=(a_{ij}(t)) \tag{9.71}$$

按照其特征值因而其不变量为不依赖时间的常数的方式演变?" 不仅这本身是一个有意义的问题, 而且它导致我们从特征值逆向求出某些 a_{ij} 满足的微分方程的可能

184 此方程产生于远比这一现象更不透明的情况, 如在两种第二类超导体之间的一个小间隙 (Josephson 间隙) 间的阶参数变化.

性.

因此, 假设

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=\lambda\boldsymbol{x}(t),$$

其中所有特征值均与 t 无关, 因此存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}(t)$ 使得

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{C}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{C}(t).$$

由 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$, 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}(0)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B},\end{aligned}\tag{9.72}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{C}=-(\boldsymbol{C}^{-1})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t}.$$

注意到

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\right)=\boldsymbol{0},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=T(t)\boldsymbol{x}\tag{9.73}$$

对某标量函数 $T(t)$ 成立. 并注意到若 $\boldsymbol{C}$ 是正交阵[185], 此时 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$, 那么从恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}+T\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+T\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$$

发现, 只要 $|\boldsymbol{x}|^2$ 与时间无关, 则 $T(t)=0$ 而 x 的演变满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}.\tag{9.74}$$

导致 (9.72) 的计算来源于孤立子理论中著名的 Lax 公式[186], Lax 公式要求将 (9.72) 拓广为一般的算子. 为说明有限维理论, 我们可以通过选取元素为 a_{ij} 的函数的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 来构造 (9.71) 中的 a_{ij} 满足的常微分方程组. 但我们必须留意我们允许多少个 a_{ij} 发生变化. 若其中的三个为常数, 从 (9.72), 我们将得到一个变量元素的四个常微分方程, 而且因为特征值只依赖于一个元素, 它必须为常数. 另

185 若任何矩阵, 特征值或特征向量为复的, 转置必须用复共轭转置代替, 那么 $\boldsymbol{C}$ 必须为酉阵, 即 $\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$.

186 注意 (9.72) 和 (9.53) 的相似性以及 $\boldsymbol{C}$ 是正交阵因为经典力学中角速度的概念.

一极端是允许四个元素变化, 用保证两个守恒量存在的特征值的一致性得到它们的四个常微分方程. 最容易考察的是中间情形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & x(t) \\ y(t) & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{9.75}$$

其中 a_{11} 和 a_{22} 是给定的常数. 容易看到不管 $\boldsymbol{B}$ 如何选择, 只要保证 $\boldsymbol{A}$ 具有形式 (9.75), 我们最终得到 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=F(x,y)$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-(y/x)F(x,y)$. 因此, 决定两个特征值的 xy 事实上为常数.

现在让我们将上述的讨论延伸至无限维情形. 设 $\mathcal{A}$ 是一个关于 x 的线性微分算子, 其系数为 x 和 t 的函数, 仍保持 $\mathcal{A}$ 的谱关于时间是不变的, 我们要求

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}=\mathcal{B}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{B}. \tag{9.76}$$

这可解释为

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\phi=(\mathcal{B}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{B})\phi$$

对任意光滑函数 ϕ 成立. 然而, 现在我们进一步要求这些函数使 $(\mathcal{B}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{B})\phi$ 不包含 ϕ 的导数, 只包含 ϕ 本身及 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的函数. (对应有限维的情形 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}$ 是一个方阵, 我们无法通过例如 (9.75) 这样做, 除非 $\boldsymbol{B}$ 是 2×2 矩阵.) 特别地, 由于历史的原因, 我们只能选择

$$\mathcal{A}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,t), \quad 从而 \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

及

$$\mathcal{B}=-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right).$$

然后我们发现 (9.76) 是著名的 Korteweg-deVries (KdV) *方程*[187].

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6u\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.77}$$

而且对 $\mathcal{A}$ 作更加复杂的选择时, 诸如 (9.70) 的方程同样会出现.

现在对 (9.77) 的 Cauchy 问题构造性的处理步骤是

1. 给定 $u(x,0)=u_0(x)$, 对适当的边界条件求算子 $\mathcal{A}(u_0)$ 的特征值 (在 KdV 方程的情形, $\mathcal{A}(u_0)=-\partial^2/\partial x^2+u_0$).

2. 知道特征值的不变性, 去求以后时间的 $\mathcal{A}$ 并由此解一个反问题, 读出 $u(x,t)$.

187 这一引人注意的方程可以从经典的无黏性流体动力学与浅水波理论及变换行波理论结合导出 (见习题 9.16).

由于第二步的困难, 这一计划叙述比实现要容易得多. 因此, 我们只限于注意 KdV 方程的 Cauchy 问题, 此时 u_0 是给定在 $-\infty < x < \infty$ 上正的函数, 且在无穷远处衰减得足够快. 那么 $u(x,t)$ 是使得成立 $|\widehat{\psi}|$ 有界的特征值问题.

$$\mathcal{A}\widehat{\psi} = -\frac{\partial^2 \widehat{\psi}}{\partial x^2} + u(x,t)\widehat{\psi} = -\lambda\widehat{\psi} \quad 对\ -\infty < x < \infty, \tag{9.78}$$

甚至当 $\mathcal{A}$ 根据 (9.76) 随时间演变时具有与时间 t 无关的谱. 也由于我们对 u 的假设, 我们期望谱包含所有的负值 $\lambda = -\omega^2$ 以及可能有某些离散的正值 $\lambda = \omega_n^2$, 对应的特征函数为 $\widehat{\psi}_{(n)}(x,t)$.

现在来到关键的考察: 这个谱刻画了一个由以下的双曲型方程建模的一维弹性连续体的振动的模态

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - u(x,t)\psi = 0; \tag{9.79}$$

事实上, 设 $\lambda = -\omega^2$, ψ 与 $\widehat{\psi}$ 的关系由下式给出

$$\widehat{\psi}(x,\omega;t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,\tau;t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

通过求逆, ψ 是 $\widehat{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\widehat{\psi}(n)\mathrm{e}^{\omega_n t}$ 的适当的加权和.

注意, 这是本书中第一次对类时变量作 Fourier 变换, 但对一维空间时空变量在数学上是可以互换的. 事实上在以下的讨论中我们将在不同的地方将 x 和 τ 都视作 "时间变量".

我们记得, 我们可以将 (9.73) 拓广至无限维的情形计算 $\widehat{\psi}$ 和 $\widehat{\psi}_{(n)}$ 关于 t 的导数, 由此得 ψ 的导数, 然而 t 只是作为一个参数进入 (9.79), 暂时我们不讨论 u, ψ 和 $\widehat{\psi}$ 对 t 的显式依赖.

(9.79) 的好处是其物理解释, 因为我们可以假想, 我们是希望通过介质振动模态的知识去确定 $u(x)$ 的不均匀性的地质学家. 继续前进的一个方法是使介质按一切频率振动然后记录其响应. 这通过在一点 $x = X$ 激起一个脉冲是容易做到的, 其中 X 是充分大的负数以远离不均匀性. 这种情形在图 9.5 中得到系统的说明; 脉冲向正 x 方向传播, 而反射波 r 是在 $x = X$ 处观察的. 由于

$$\psi \sim \delta(x - X - \tau) + r(x + \tau + X) \quad 当\ x \to -\infty, \tag{9.80}$$

变量 r 被选用是由于我们预测从 $x = O(1)$ 到 $\tau + X = O(1)$ 没有反射, 建立这个激励问题的相关资料是

$$\psi = \delta(-\tau) + r(\tau + X), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \delta'(-\tau) + r'(\tau + X) \quad 在\ x = X. \tag{9.81}$$

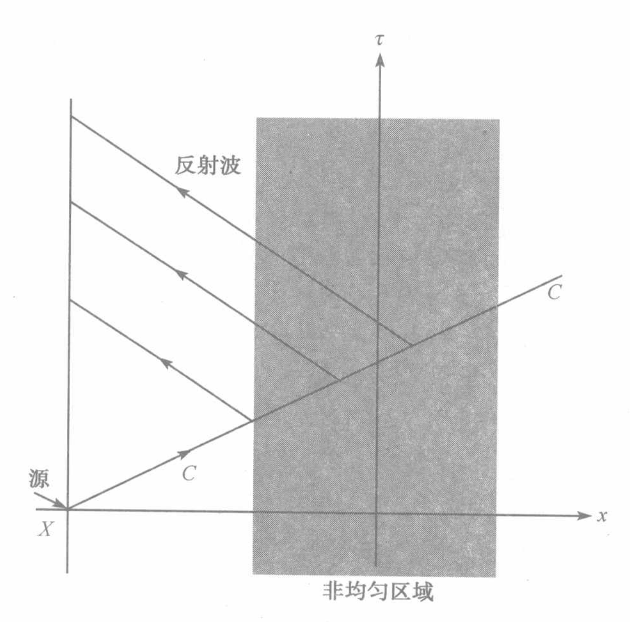


图 9.5 半平面 $x > X$ 的激发; ψ 在特征 $C: x = \tau + X$ 之下为零

第 4 章关于 Riemann 函数的知识有利于我们分析这个问题. (9.79) 的 Riemann 函数是令其右端等于 x 和 τ 的 δ 函数之积而得到的. 但从习题 4.22, 我们同样能用 δ 函数的适当组合作为 Cauchy 边界条件得到. 例如设 ψ_1 是 (9.79) 的解, 有

$$\psi_1 = \delta(-\tau), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \delta'(-\tau) \quad 在\ x = X, \tag{9.82}$$

我们发现 $\psi_1 - \delta(x - \tau - X)$ 是 x, τ 和 X 的有界函数. 为方便计将其写成

$$\psi_1 - \delta(x - \tau - X) = \Psi_1(x, X, \tau + X), \tag{9.83}$$

其中 Ψ_1 仅在 $X - x < \tau < x - X$ 中不等于零. 现记 $\xi = x - \tau$ 和 $\eta = x + \tau$, 因此

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{4} \left(\frac{\xi + \eta}{2} \right) \psi_1;$$

因为 ψ_1 的 "奇支集" 是在 $x = \tau + X$ 上, 从 $\xi = X - 0$ 到 $\xi = X + 0$ 积分, 我们看到 u 能够从我们对 Ψ_1 的知识通过方程

$$\lim_{\xi \to X+0} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \Psi_1(\tau + X, X, \tau + X) = \frac{1}{4} u(\tau + X) \tag{9.84}$$

重新得到. 注意到当趋近 $x = \tau + X$ 时, Ψ_1 失去它对 X 的显式依赖性.

让我们回到地质学家, 他会发现模拟 (9.82) 要比模拟 (9.81) 困难得多. 因此, 让我们试图从 ψ_1 和 ψ_2 将解与资料 (9.81) 综合起来, 其中, 同 (9.83) 一样,

$$\psi_2 = \delta(-\tau), \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\delta'(-\tau) \quad 在\ x = X; \tag{9.85}$$

$\psi_2 = \delta(-x-\tau+X)+\Psi_2(x, X, \tau+X)$, 其中 Ψ_2 也是有界的, 且仅在 $X-x<\tau<x-X$ 中不等于零. 对各自的 Fourier 变换在 $x = X$ 的边界条件为

$$\begin{aligned}
&\widehat{\psi} = 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega X}\widehat{r}, && \frac{\mathrm{d}\widehat{\psi}}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}\omega(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega X}\widehat{r}),\\
&\widehat{\psi}_1 = 1, && \frac{\mathrm{d}\widehat{\psi}_1}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}\omega,\\
&\widehat{\psi}_2 = 1, && \frac{\mathrm{d}\widehat{\psi}_2}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\omega,
\end{aligned} \tag{9.86}$$

因此 $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}_1 + \widehat{r}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega X}$. 因此, 由卷积定理

$$\begin{aligned}
\psi(x,\tau) =& \psi_1(x,\tau) + r(\tau + 2X) * \psi_2(x,\tau)\\
=& \psi_1(x,\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau' + 2X)(\delta(X - x - (\tau - \tau'))\\
&+ \Psi_2(x, X, \tau - \tau' + X))\mathrm{d}\tau'\\
=& \delta(x - X - \tau) + \Psi_1(x, X, \tau + X) + r(\tau + x + X)\\
&+ \int_{\tau-x+X}^{\tau+x-X} r(\tau' + 2X)\Psi_2(x, X, \tau - \tau' + X))\mathrm{d}\tau'.
\end{aligned} \tag{9.87}$$

我们只需作两个最后的观察将其转变成 Ψ_1 关于 r 的方程.

1. 关于 Ψ_1 和 Ψ_2 的方程是

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau^2} - u(x)\Psi_1 = \delta(x - \tau - X)u(x),\\
&\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \tau^2} - u(x)\Psi_2 = \delta(-x - \tau + X)u(x) = \delta(x + \tau - X)u(x),
\end{aligned}$$

具有在 $x = X$ 上的零 Cauchy 数据. 因此,

$$\Psi_1(x, X, \tau + X) = \Psi_2(x, X, -\tau + X),$$

(9.87) 中的积分为

$$\int_{\tau-x+X}^{\tau+x-X} r(\tau' + 2X)\Psi_1(x, X, \tau' - \tau + X)\mathrm{d}\tau' = \int_{2X-x}^{x} r(\tau'' + y)\Psi_2(x, X, \tau'')\mathrm{d}\tau'',$$

其中例如 $y = \tau + X$, $\tau'' = \tau' - \tau + X$.

2. 由因果关系, 在 $x-X>\tau$ 上, 即 $x>y$, 成立 $\psi\equiv 0$. 因此, 若我们记 $\Psi_1(x,X,\tau+X)$ 当 $x\to\infty$ 的渐近极限为 $\widetilde{\Psi}_1(x,\tau)$, 我们得到 $\widetilde{\Psi}_1(x,\tau)$ 关于 r 的 Fredholm 积分方程

$$\widetilde{\Psi}_1(x,y)+r(x+y)+\int_{-\infty}^{x} r(\tau''+y)\widetilde{\Psi}_1(x,\tau'')\mathrm{d}\tau''=0. \tag{9.88}$$

原则上, 给定 r 我们能在 $x>y$ 解这个关于 Ψ_1 的 Marchenko 方程, 从而由 (9.84) 重新得到 u.

最后一点是关于 r 如何随 τ 演变的函数的公式. 我们记得

$$\psi(x,\tau;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\psi}(x,\omega;t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega+\sum_n\widehat{\psi}_{(n)}(x,t)\mathrm{e}^{\omega_n\tau},$$

通过与 (9.80) 比较, 当 $x\to-\infty$,

$$\begin{aligned}&\widehat{\psi}(x,\omega;t)\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-X)}+\widehat{r}(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x+X)},\\&\widehat{\psi}_{(n)}(x,t)\sim\widehat{r}_{(n)}\mathrm{e}^{\omega_n x},\end{aligned}$$

其中 $\omega_n>0$, 因此

$$r(x+\tau,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{r}(\omega,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x+\tau)}\mathrm{d}\tau+\sum_n\widehat{r}_{(n)}(t)\mathrm{e}^{\omega_n(x+\tau)};$$

而且当 $x\to-\infty$, $\mathcal{B}\sim-4\partial^3/\partial x^3$. 为研究 $\widehat{\psi}$ 和 $\widehat{\psi}_{(n)}$ 关于 t 的演变, 我们必须用 (9.73) 的无限维拓广, 或者若我们对范数与 t 无关的特征函数工作, 我们可用较简单的方程 (9.74). 采用前一策略, 我们发现若 $T(t)=0$, $\widehat{\psi}_{(n)}$ 仅能像一个可以接受的特征函数那样演变, 因此

$$\frac{\partial\widehat{\psi}_{(n)}}{\partial t}=\mathcal{B}\widehat{\psi}_{(n)},\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}\widehat{r}_{(n)}}{\mathrm{d}t}=-4\omega_n^3\widehat{r}_{(n)}, \tag{9.89}$$

而 $\widehat{\psi}(x,\omega;t)$ 必须满足

$$\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial t}=\mathcal{B}\widehat{\psi}+T_\omega\widehat{\psi},$$

其中

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x+X)}\frac{\partial\widehat{r}}{\partial t}=-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega X}(\mathrm{i}\omega^3\widehat{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}-\mathrm{i}\omega^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x})+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega X}T_\omega(\widehat{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}).$$

因此,

$$T_\omega=-4\mathrm{i}\omega^3,\quad \frac{\partial\widehat{r}}{\partial t}=-8\mathrm{i}\omega^3\widehat{r}, \tag{9.90}$$

从而 $\widehat{r}_{(n)}$ 和 $\widehat{r}$ 可按其初值求得.

我们重新概述要点, 此过程是, 给定 u_0,

(i) 作为一个谱理论 "直接" 问题求 $\widehat{r}_{(n)}(0)$, $\widehat{r}(\omega,0)$ 和 ω_n;

(ii) 用 (9.89), (9.90) 更新 $\widehat{r}_{(n)}(t)$ 和 $\widehat{r}(\omega,t)$;

(iii) 从 (9.88) 求解 $\widetilde{\Psi}_1$;

(iv) 从 (9.84) 求 $u(x,t)$.

解 u 中对应于离散谱 ω_n 的项被称为 孤立子 (见习题 9.17), 它们具有许多迷人的性质 [15]. 事实上, 它们是我们在本节开始时提到的最简单的行波解, 逆散射理论漂亮地解释了对任意的初始条件, 它们最终会出现以及它们如何相互作用.

将逆散射理论付诸实践通常比说说困难, 甚至在最简单的情形也是如此. 最最简单的情形是 $u_0 = u(x,0) \equiv 0$, 那么 $\widehat{r}_{(n)}(0) = \widehat{r}(\omega,0) = 0$, 从而 $r = 0$; 然后 (9.88) 得出 $\widetilde{\Psi}_1 = 0$, 并对 $\psi = \delta(x - X - \tau)$ 从 (9.85) 得到 $u(x,t) = 0$. 稍不平凡地, 设 $u(x,0)$ 很小便得 r 和 $\widetilde{\Psi}_1$ 很小, 从而 (9.88) 中的积分可以忽略, 还假设没有离散谱. 我们需要为先求出用 u_0 表示得 $\widehat{r}(\omega,0)$, 这通过 $\widehat{\psi}(x,\omega,0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-X)} + \widetilde{\psi}$, 其中

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\psi}}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2\widetilde{\psi} = u_0(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-X)}$$

考虑最低阶项, 成立当 $x \to -\infty$, $\widetilde{\psi} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-X)}\widehat{r}(\omega,0)$, 当 $x \to +\infty$, $\widetilde{\psi}$ 正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$. 因此, 由参数的变分

$$2\mathrm{i}\omega\widetilde{\psi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-X)}\int_{-\infty}^{x} u_0(\xi)\mathrm{d}\xi - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x+X)}\int_{\infty}^{x} u_0(\xi)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi,$$

我们得

$$\widehat{r}(\omega,0) = \frac{\widehat{u}_0(2\omega)}{2\mathrm{i}\omega}.$$

现在, 从 (9.90) 得

$$r(x+\tau,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\omega^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x+\tau)}\widehat{r}(\omega,0)\mathrm{d}\omega,$$

并因此

$$\Psi_1(\tau+X,X,\tau+X) = -r(2(\tau+X),t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-8\mathrm{i}\omega^3}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega(x+\tau)}\frac{\widehat{u}_0(\omega)}{2\mathrm{i}\omega}\mathrm{d}\omega.$$

最后恢复 u 对 t 的依赖

$$u(\tau+X,t) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Psi_1(\tau+X,X,\tau+X),$$

因此, 令 $2\omega = k$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^3t-\mathrm{i}kx}\widehat{u}_0(k)\mathrm{d}k,$$

这恰好是对 $\partial u/\partial t + \partial^3 u/\partial x^3 = 0$ 进行 Fourier 变换的结果.

逆散射理论作为 Fourier 变换的拓广的这一解释为本书作了一个圆满的结束，因为它说明了甚至关于 pde 的一点只是设计来求解的基本知识也可以导致最具独创性的数学过程.

习　题

9.1. 假设在 $4 < r^2 < 9$ 内成立 $\nabla^2 u(r,\theta) = 0$, 我们希望通过 u 和 $\partial u/\partial r$ 在 $r = 3$ 上的值来计算 $u(2,\theta)$. 证明, 若

$$u(3,\theta) = \frac{3\cos\theta - 1}{10 - 6\cos\theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(3,\theta) = \frac{6 - 10\cos\theta}{(10 - 6\cos\theta)^2},$$

则 $u(2,\theta) = (2\cos\theta - 1)/(5 - 4\cos\theta)$.

请解释为什么我们能幸运地做到这一点, 为什么我们不能根据在 $1/4 < r^2 < 9$ 内成立 $\nabla^2 u(r,\theta) = 0$, 来计算出 $u(1/2,\theta)$.

注. 若 u 和 $\partial u/\partial r$ 在 $r = 3$ 上为常数, 对任何的 $R > 0$, 我们都可以计算出 $u(R,\theta)$. 这提示我们可以通过在 $r = 3$ 上对资料作平均来对原来的反问题进行正则化, 也就是说忽略 $u(3,\theta)$ 和 $\partial u/\partial r(3,\theta)$ 在 $r = 3$ 上的 Fourier 分量的高频部分, 从而可以利用 Cauchy-Kowalevskaja 定理.

9.2. 考虑一个在第 7 章中所描述的 Hele-Shaw 自由边值问题 (三维空间中无重力的多孔介质流), 当 $t > 0$ 时, 流体以常速度 Q 从 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 处注入到一个包含原点的初始区域 $\Omega(0)$ 中.

(i) 假设在流体区域 $\Omega(t)$ 外压力 $p(\boldsymbol{x},t) = 0$, 定义

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t p(\boldsymbol{x},\tau)\mathrm{d}\tau,$$

如同 7.4.1 节, 证明

$$\nabla^2 u = \begin{cases} 0, & \text{在 } \Omega(0)\backslash\{\boldsymbol{0}\} \text{ 中}, \\ 1, & \text{在 } \Omega(t)\backslash\overline{\Omega}(0) \text{ 中}, \\ 0, & \text{在 } \overline{\Omega}(t) \text{ 外}. \end{cases}$$

并证明 u 和 ∇u 在 $\partial\Omega(0)$, $\partial\Omega(t)$ 上连续.

(ii) 固定 $t > 0$, 在二维的情况下令 $\phi(\boldsymbol{x},t) = u(\boldsymbol{x},t) + (Qt/2\pi)\log|\boldsymbol{x}|$ (在三维的情况下令 $\phi(\boldsymbol{x},t) = u(\boldsymbol{x},t) - Qt/4\pi|\boldsymbol{x}|$), 证明 ϕ 等于由介于 $\partial\Omega(0)$ 和 $\partial\Omega(t)$ 之间的环形区域中的质量所产生的重力势的常数倍. 注意到 $u(\boldsymbol{x},t) \equiv 0$, 证明由区域外的重力势, 以及假设质量密度为常数, 并不能唯一地决定区域.

(iii) 在二维的情况下, 利用 $\phi(z,t)$ 的 Green 函数来表示 $(z = x + \mathrm{i}y, \zeta = \xi + \mathrm{i}\eta)$ 证明, 在区域 $\Omega(t)$ 外有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega(t)\backslash\Omega(0)} \frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{z-\zeta} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \iint_{\Omega(t)\backslash\Omega(0)} \zeta^n \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

对足够大的 $|z|$ 成立. 并由 (ii) 说明, 已知区域的所有矩也不能唯一地决定区域.

9.3. 定义一个三维向量分布 $\boldsymbol{v}$ 的一种方法是

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\psi} \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{\psi}$ 是一个所有分量在无穷远处均趋向于零的光滑向量试验函数. 利用公式

$$\nabla \cdot (\psi \boldsymbol{a}) = \nabla\psi \cdot \boldsymbol{a} + \psi \nabla \cdot \boldsymbol{a}, \quad \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{b}),$$

其中 ψ 为标量函数, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为向量函数. 证明在三维的情况下, 我们可以给出下面的证明

$$(\nabla v, \boldsymbol{\psi}) = -(v, \nabla \cdot \boldsymbol{\psi})$$

(其中 v 是一个标量分布, 右边的内积即为通常的标量内积),

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \psi) = -(\boldsymbol{v}, \nabla\psi)$$

(其中 ψ 是一个标量试验函数), 并且

$$(\nabla \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{v}, \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}).$$

证明对标量分布 v 和向量分布 $\boldsymbol{v}$, 分别成立 $\nabla \wedge (\nabla v) \equiv \boldsymbol{0}$ 和 $\nabla \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{v}) \equiv 0$.

9.4. 在 (9.16) 中令 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, 并且作两次旋度运算来证明 $\boldsymbol{u}$ 的每个分量 u_i 满足 $\nabla^4 u_i = 0$.

9.5. (i) 利用第 5 章的结论

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

证明

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \widehat{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{4\pi}{k^2},$$

其中 $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = |\boldsymbol{k}|^2$. 注意这个结论包含了对散度积分的一个解释. 同时,

由习题 5.32, 我们可以得到

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{k^2} = \pi \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_2 y + k_3 z) - x\sqrt{k_2^2+k_3^2}} \frac{\mathrm{d}k_2 \mathrm{d}k_3}{\sqrt{k_2^2+k_3^2}}$$
$$= \pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho x - \mathrm{i}\rho(y\sin\phi + z\cos\phi)} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi$$
$$= \frac{2\pi^2}{r}.$$

(ii) 证明

$$\widehat{\left(\frac{x^2}{r^3}\right)} = \frac{4\pi(k_2^2 + k_3^2 - k_1^2)}{k^4} = \widehat{\left(\frac{1}{r}\right)} - \frac{8\pi k_1^2}{k^4}$$

且

$$\widehat{\left(\frac{xy}{r^3}\right)} = -\frac{8\pi k_1 k_2}{k^4}.$$

(iii) 假设 $\boldsymbol{G}$ 为满足如下方程的 Green 矩阵

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{G} + (\lambda+\mu)\left(\nabla\left(\frac{\partial G_{i1}}{\partial x_i}\right), \nabla\left(\frac{\partial G_{i2}}{\partial x_i}\right), \nabla\left(\frac{\partial G_{i3}}{\partial x_i}\right)\right) = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{I},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵, 同时我们利用了求和习惯

$$\frac{\partial G_{i1}}{\partial x_i} = \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3},$$

以及 $x_1 = x$ 等等. 证明 $\widehat{\boldsymbol{G}}$ 可由 (9.21) 给出, 同时利用 (i) 和 (ii) 可知 $\boldsymbol{G}$ 可由 (9.22) 给出.

9.6. 证明, 在二维时 (9.16) 的 Green 矩阵 (它满足, 当 $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ 时, $\boldsymbol{G} = O(\log|\boldsymbol{x}|)$) 由下式给出

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi\mu(1+\kappa)} \begin{pmatrix} -\kappa\log|\boldsymbol{x}| + x_1^2/|\boldsymbol{x}|^2 & x_1 x_2/|\boldsymbol{x}|^2 \\ x_1 x_2/|\boldsymbol{x}|^2 & -\kappa\log|\boldsymbol{x}| + x_2^2/|\boldsymbol{x}|^2 \end{pmatrix},$$

其中 $\kappa = (\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)$.

9.7. 假设 $\phi(\xi, y)$ 在 $y > 0$ 时满足

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0,$$

在 $y = 0$ 时满足 Cauchy 初值条件

$$\phi = \frac{\varepsilon}{\xi^2 + \delta^2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

(对照 p. 42 的例子). 证明, 若 ξ 像 p. 377 那样被复化, 则作为 y 和 η 的函数 ϕ 满足当 $y>0$ 时,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}=0$$

在 $y=0$ 时满足 Cauchy 初值条件

$$\phi=\frac{\varepsilon}{\delta^2-\eta^2},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

请画出它的特征图谱, 描述在 $\eta=\pm\delta,\ y=0$ 处的奇点的传播情况, 并由此得到原问题是不适定的.

9.8. 考虑 9.4.1 节中讨论的在方形区域 $0<x<a,\ 0<y<b$ 上的热敏电阻方程. 假设边界条件为

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial T}{\partial n}=0\quad \text{在边 } y=0,b \text{ 上},$$

因此它同时是热绝缘和电绝缘的. 同时

$$\phi=0,\quad T=T_0\quad \text{在 } x=0,\quad \phi=V,\quad T=T_0\quad \text{在 } x=a,$$

因此在这些端点上, 分别放在具有势差 V 的恒温 T_0 中. 证明存在一个一维的对称解, 满足在中心线 $x=a/2$ 上 $\phi=V/2$, 而且当

$$V^2<8\int_{T_0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sigma(t)},$$

$x=a/2$ 是装置中的最热部分.

注. 可以证明这个解是唯一的. 假设与时间无关的热敏电阻方程在一个二维区域 D 中进行求解, 它的边界被分为四部分, 并且被交替地赋予常数的 Dirichlet 边界条件和齐次的 Neumann 边界条件. 由于这样的方程在这样的特殊边界条件下是保角映射不变的, D 可以被映射到具有上述解的长方形区域上. 这样 T 和 ϕ 的水平曲线是一致的, 所以 $T=T(\phi)$, 且上面所给出的关于 V 的限制是解存在的必要条件, 这与区域的几何形状是无关的.

9.9. (i) 证明 9.4.2 节给出的与时间无关的空间电荷方程具有一个解, 其中 $\phi=\log r+\theta^2$, $\rho=-2/r^2$, 且流函数为 $\psi=2\theta/r^2$.

(ii) 证明与时间无关的空间电荷方程中的 ρ 可以被消去, 从而得到下面的三阶方程

$$\nabla\cdot(\nabla^2\phi\nabla\phi)=0.$$

假设在两维的情况下, 等势线 $\phi=$ 常数与调和函数 Φ 的水平线一致, 即 $\phi=F(\Phi)$. 证明

$$\frac{\nabla\Phi\cdot\nabla|\nabla\Phi|^2}{|\nabla\Phi|^4}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Phi}\log(F'(\Phi)F''(\Phi))=G(\Phi).$$

记 $\Phi = \frac{1}{2}(\omega(z) + \overline{\omega(z)})$, 使得 $\nabla\Phi = \frac{1}{2}(\omega' + \overline{\omega'}, \mathrm{i}(\omega' - \overline{\omega'}))^{\mathrm{T}}$, 证明

$$\frac{\omega''(z)}{(\omega'(z))^2} + \frac{\overline{\omega''(z)}}{(\overline{\omega'(z)})^2} = G(\Phi).$$

先对 z 然后再对 $\overline{z}$ 微分, 证明 G 的唯一可能的形式为 $G(\Phi) = a\Phi + b$, 其中 a, b 为实常数. 因而证明

$$\frac{\omega''(z)}{(\omega'(z))^2} = \frac{1}{2}a\omega + k,$$

其中 k 是一个复常数, 且 $b = k + \overline{k}$. 最后证明, ω 由下式决定

$$z = c_1 \int^{\omega} \mathrm{e}^{-ks-\frac{1}{4}as^2} \mathrm{d}s,$$

其中 c_1 是一个常数, 且 ϕ 和 Φ 通过下式相关联

$$\phi = c_2 \int^{\Phi} \left(\int^{\xi} \mathrm{e}^{-bt-\frac{1}{2}at^2} \mathrm{d}t \right)^{1/2} \mathrm{d}\xi,$$

其中若积分为正时, c_2 为一纯实数.

注. (ii) 中给出了解的一个三参数簇, 由 a, b, $\mathrm{Im}k$ 参数化 (常数 c_1, c_2 可通过尺度变换消去). 更进一步的性质可参考 S. A. Smith 的论文 “Congruent harmonic functions and space charge electrostatic fields”, *IMA J. Appl. Math.*, **39**, 189~214, 1987. 不幸的是, 它们都不满足物理上的方便边界条件.

9.10. (i) 证明若 $\partial \boldsymbol{u}/\partial t = 0$, 则 (9.42) 可写为

$$\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 - \boldsymbol{u} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{u}) = -\nabla p$$

因此 $p + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2$ 在特征线 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{u}$ 上为常数.

(ii) 证明若在 (9.42) 中 $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$, 则 (9.51) 的梯度为零.

9.11. 在图 9.3 中, 记 P 为 $\boldsymbol{x}(t)$, 记 P' 为 $\boldsymbol{x}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\omega}(x(t), t)$. 经过小的时间间隔 δt, P 移到了 Q, P' 移到了 Q', 其中 Q 为 $\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(x, t)\delta t$, Q' 为 $\boldsymbol{x}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}(t), t) + \boldsymbol{u}(x(t) + \varepsilon\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}(t), t))\delta t$. 证明, 关于 δt 的低阶项有

$$QQ' - PP' = \varepsilon\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\boldsymbol{u}\delta t,$$

同时 (9.48) 意味着

$$\varepsilon\boldsymbol{\omega}(x(t + \delta t), t + \delta t) - \varepsilon\boldsymbol{\omega}(x(t), t) = \varepsilon(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}\delta t;$$

从而 $P'Q' = \varepsilon\boldsymbol{\omega}(x(t+\delta t), t+\delta t)$, 所以, 若 PQ 在 t 时刻沿 $\boldsymbol{\omega}$ 方向, 则 $P'Q'$ 在 $t+\delta t$ 也时刻沿 $\boldsymbol{\omega}$ 方向.

9.12. 证明, 若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ 按照 (9.52) 演化, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}',$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{a} = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla).$$

而且至少在两维的情形下有 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$ 满足 (9.53).

9.13. 假设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 满足下面的退化的拟线性方程组

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla\wedge\boldsymbol{u}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0,$$

以及将要在 $z > 0$ 中求解决定的 $z = 0$ 上的资料. 证明由 $\boldsymbol{u}$ 的切向的信息可以决定 $\boldsymbol{\omega}$ 的法向的信息, 因此同时指定 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $z = 0$ 上的值将会导致一个超定问题.

注. 可以证明, 只需在 $z = 0$ 上指定三个标量的信息就足够了. 例如, 可以指定 $\boldsymbol{u}$, 或者 $\boldsymbol{u}$ 的法向和 $\boldsymbol{\omega}$ 的切向分量.

9.14. 假设一个位于 $x = X(t)$ 的弹簧活塞在压力 $-p$ 的作用下在管中作 $x = 0$ 附近的小振幅振动. 则其模型为

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \Omega^2X = \nu p,$$

其中 p 由下面的声学模型给出

$$p = \left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{x=0}, \quad \dot{X} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = a_0^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad 对\ x > 0.$$

证明, 只要 $a_0 = \omega/k$, $\omega = \Omega/\sqrt{1+\mathrm{i}\nu/k}$, $\phi = \mathrm{Re}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ 成立, 当 $x \to +\infty$ 时, 这对应于外流波, 上述方程的解是可能的. ω 为复值意味着能量到 $x = +\infty$ 的辐射抑制了活塞的运动.

9.15. 假设 ϕ, p 和 u 满足 (9.56)~(9.58), 其中 $k > 0$. 证明对某些常数 K, 它可能具有形如

$$\phi = \mathrm{Re}\left(A\mathrm{e}^{-y\sqrt{K^2-k^2}+\mathrm{i}Kx}\right)$$

的解. 只要当 $|K| > k$ 时 $\mathrm{Re}\sqrt{K^2-k^2} > 0$, 当 $|K| < k$ 时 $\mathrm{Im}\sqrt{K^2-k^2} < 0$, 则这些解在物理上就是可以接受的, 其中后者即是辐射条件的具体表现. 同时证明

$$(cK^2 - k^2)\sqrt{K^2-k^2} - \nu k^2 = 0,$$

因此, 对较小的 ν (即当膜受到流体的轻微的影响的时候), 要么

$$c<1 \quad 且 \quad K \text{ 接近于 } \frac{k}{\sqrt{c}}\left(1+\frac{\nu c}{2k\sqrt{1-c^2}}\right),$$

或者 $c>1$, 并且要么

$$K \text{ 接近于 } \frac{k}{\sqrt{c}}\left(1+\frac{\mathrm{i}\nu c}{2k\sqrt{c^2-1}}\right)$$

要么

$$K \text{ 接近于 } k\left(1+\frac{\nu^2}{2k^2(c-1)^2}\right).$$

注. 这个结果的物理解释是, 波要么沿着膜作 "亚音速" 传播, 并且在流体中随着 y 的增加而衰减; 要么作超音速传播, 并且要么 (i) 辐射进流体且随着 x 的增加而衰减, 要么 (ii) 不辐射且随着 y 的增加而衰减. (作者非常感谢 R. H. Tew 博士提供这个例子.)

9.16. (i) 当水在一个浅的几乎水平的厚度为 $\eta(x,t)$ 的层上以速度 $u(x,t)$ 流动时, 通过将 ϕ 作为 y 的幂级数展开, 由 (7.28) 和 (7.29) 分别得到

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}(u\eta)+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)=0,$$

其中 ε 是一个小参数. 证明, 若我们令 $x-t=\xi$, $\tau=\varepsilon t$, 则可以得到

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\eta-u)+\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi}(u-\eta)+\varepsilon\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(\eta u)+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}\right)=0,$$

并且由此根据小参数 ε 的低阶项近似导出 KdV 方程

$$2\frac{\partial \eta}{\partial t}+3\eta\frac{\partial \eta}{\partial \xi}+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}=0.$$

(ii) 若 (i) 中的浅层在半平面内被较轻的流体所覆盖, 则 u 和 η 的方程被重新调整为

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon u\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}(\eta u)+\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0,$$

其中 p 为较轻的流体底部所受到的压力. 若较轻的流体是无旋的, 且具有速度势 $\overline{\phi}$, 则利用通常的线性化方法, 我们可以得到 (最低阶)

$$p+\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}+\eta=0,\quad \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}\quad \text{在 } y=0 \text{ 上},$$

其中在 $y>0$ 内, $\nabla^2\overline{\phi}=0$. 证明

$$\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial x}=\mathcal{H}\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial y}\right)\quad \text{在 } y=0 \text{ 上},$$

其中 $\mathcal{H}$ 表示 Hilbert 变换. 同时, 按照 (i) 中的讨论导出 Benjamin-Ono 方程

$$2\frac{\partial\eta}{\partial\tau}+3\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta}{\partial\xi}-\mathcal{H}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)=0.$$

9.17. 证明对于任意的 $c>0$, 如下形式的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

都存在行波解 $u=u(x-ct)$, 且

$$u=\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}(x-ct)}{2}\right).$$

并说明, 在这种情况下 $\mathrm{sech}(\sqrt{c}(x-ct)/2)$ 是方程 (9.78) 的主特征函数.

注. 可以证明, 若 $u(x,0)=(c/2)\mathrm{sech}^2(\sqrt{c}x/2)$, 则方程 (9.78) 的离散谱是单点 $c/4$.

9.18. 证明对于如下的 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sin u$$

存在关于 $x=ct$ 对称的行波解, 且

$$u=\begin{cases}4\arctan\tanh((x-ct)/2\sqrt{c^2-1}, & c>1,\\ 4\arctan\exp((x-ct)/2\sqrt{c^2-1}, & c<1.\end{cases}$$

结　　语

我们用纵览我们在本书中叙述了什么, 概括我们认为是主要的学习内容来结束本书.

首先是适定性的概念, 用椭圆方程和双曲方程 Cauchy 问题的对照将它说明得淋漓尽致. 甚至 3.1 节中最简单的例子就可以给出一个令人信服的指南: 方程的一个项的符号的改变会改变一切游戏规则. 我们遗憾的最大根源是只有对双曲方程才易于对适定性问题给出一个一般的回答, 即特征是否实的会导致完全不同的结果; 可能在未来的年代中复特征理论得到长足的发展会将这种差别抹平.

第二, 紧密相关的课题是解的定性性质, 问诸如在第 4 章中的 "方程有在区域内传播的 '波解' 吗?", 或诸如第 5 章和第 6 章中 "方程离开不正则的边界条件后是否马上成为光滑的?" 的问题经常是重要的.

关于解的表达式, 唯一出现的无所不包的概念是, 任意线性微分算子的逆表示的形式解. 它是相关的边界条件用适当的 Green 函数或 Riemann 函数的加权积分, 除了 Fredholm 二择性规定的其他情形.

没有适用于给出偏微分方程显式解的一般原则. 对一种未曾预计的情形求得了显式解, 常常可以当作节日来庆祝. 通常它反映出一种对称性或不变性. 然而洞悉对称性或不变性甚至比求解本身还困难. 在这方面, 尽管我们已经叙述过的远未穷尽, 我们只能希望读者不会因为发明过多的技巧来处理一个个特殊的案例而感到沮丧. 我们只是叙述那些似乎是本质的且具有一般性的方法与技巧.

很遗憾, 对于偏微分方程的数学有两个方面我们在本书中强调得不够. 首先是 "摄动方法" 讨论. 正如引言中指出的, 要对它进行讨论要付出改革本书的性质和增加篇幅的代价. 我们可以从以稳定性理论作为建立自由边值问题理论框架的一个基本工具的第 7 章和衍射的几何理论是最有助于理解高频时波的传播的第 8 章窥见这一被我们排除在外的最有潜力思想之一斑.

其次是缺乏对我们已经解释的和从数值计算中获得的理解的关系的处理. 同样只有将本书的篇幅扩大一倍, 在每章包含算法的收敛性、误差估计和稳定性分析才可以做到这一点. 或者我们可用合适的软件来处理这些微分方程, 给出有关结果的图表. 除了要求简洁之外, 我们对这种省略的唯一辩解是, 我们遇到的许多情形的精细性, 只有用数学分析的方法才能保证质量.

我们也想包含更多激励各个方程的数学含义的讨论. 在许多场合这样的做法是令人吃惊的, 从预测未曾预料的不稳定性到提出容易的和可信赖的算法. 但这样做连同对理论的强调, 会对读者提出远远超过本书的要求.

最后, 这本书给作者带来巨大喜悦的特色是用相当简单的数学术语揭示出许多

在日常生活中有实际重要性的现象的定量理解.

我们知道没有其他的理论科学分支能够在 400 页的书中对如此多的情形建立模型并进行分析. 然而偏微分方程的这种表面上的成功一定不要使学生被一种错误的安全感所蒙骗. 因为, 一方面相对于其他模型如离散模型它们是性态较好的特殊模型, 另外应该记住离开解析的方程和解析求解是多么危险. 当然, 我们只遇到一个例子 (p. 61), 整个理论在非解析性面前崩溃. 书中包含了许多情形, 人工引入的奇性可以摧毁一切分类和定性的性态. 第 7 章的讨论已经揭示即使是具有非连续的系数的最实际的例子会导致用我们现有的知识无法用系统的方法建立这种偏微分方程的数学意义的情形.

参考文献

[1] Arnol'd V I. Catastrophe theory. New York: Springer-Verlag, 1984

[2] Arscott F M. Periodic differential equations. An introduction to Mathieu, Lamé, and allied functions. Oxford: Pergamon Press, 1964

[3] Bender C M, Orszag S A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. Tokyo: McGraw-Hill, 1978

[4] Birkhoff G, Zarantonello E H. Jets, wakes and cavities. New York: Academic Press, 1957

[5] Bleistein N. Mathematical methods for wave phenomena. London: Academic Press, 1984

[6] Bonnet M. Boundary integral equations methods applied to solid and fluid mechanics. New York: Wiley, 1997

[7] Buckmaster J D, Ludford G S S. Theory of laminar flames. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[8] Carrier G F, Krook M, Pearson C E. Functions of a complex variable. Theory and technique. New York: McGraw-Hill, 1966

[9] Carslaw H S, Jaeger J C. Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 1959

[10] Chester C R. Techniques in partial differential equations. New York: McGraw-Hill, 1971

[11] Coddington E A, Levinson N. Theory of ordinary differential equations. New York: McGraw-Hill, 1955

[12] Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics, Vols I & II. New York: Interscience, 1962

[13] Crank J. Free and moving boundary problems. Oxford: Clarendon Press, 1984

[14] Doering C R, Gibbon J D. Applied analysis of the Navier-Stokes equations. New York: Cambridge University Press, 1995

[15] Drazin P G, Johnson R S. Solitons: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989

[16] Driscoll T A, Trefethen L N. Schwarz-Christoffel mapping. Cambridge: Cambridge University Press, 2002

[17] Elliott C M, Ockendon J R. Weak and variational methods for moving boundary problems. London: Pitman, 1982

[18] Engl H W, Hanke M, Neubauer A. Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer, 1996

[19] Erdélyi A, Magnus W, Oberhettinger F, Tricomi F G. Tables of integral transforms, Vol. I. New York: McGraw-Hill, 1954

[20] Gakhov F D. Boundary value problems. Oxford: Pergamon Press, 1966

[21] Garabedian P R. Partial differential equations. New York: Wiley, 1964

[22] Hinch E J. Perturbation methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1991

[23] John F. Partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1971

[24] Jones D S. Acoustic and electromagnetic waves. Oxford: Clarendon Press, 1986
[25] Kevorkian J, Cole J D. Perturbation methods in applied mathematics. New York: Springer-Verlag, 1981
[26] Milne-Thomson L M. Theoretical aerodynamics. London: MacMillan, 1948
[27] Milne-Thomson L M. Theoretical hydrodynamics. 2nd ed. London: MacMillan, 1949
[28] Moffatt H K, Tsinober A. Topological fluid mechanics. Proceedings of the IUTAM Symposium. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
[29] Ockendon H, Ockendon J R. Viscous flow. New York: Cambridge University Press, 1995
[30] Ockendon H, Tayler A B. Inviscid fluid flows. New York: Springer-Verlag, 1983
[31] Øksendal, B. Stochastic differential equations. 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1992
[32] Piaggio H T H. An elementary treatise on differential equations and their applications. London: G. Bell & Sons Ltd, 1946
[33] Pólya G, Szegö G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton: Princeton University Press, 1951
[34] Polyanin A D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002
[35] Protter M H, Weinberger H F. Maximum principles in differential equations. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967
[36] Renardy M, Rogers R C. An introduction to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993
[37] Richards I, Youn H. Theory of distributions: a non-technical introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
[38] Rubinstein I, Rubinstein L. Partial differential equations in classical mathematical physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1993
[39] Saffman P G. Vortex dynamics. New York: Cambridge University Press, 1992
[40] Sokolnikoff I S. Mathematical theory of elasticity. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1956
[41] Sparrow E M, Cess R D. Radiation heat transfer. New York: Hemisphere, 1978
[42] Stakgold I. Green's functions and boundary value problems. 2nd ed. New York: Wiley, 1998
[43] Tayler A B. Mathematical models in applied mechanics. Oxford: Clarendon Press, 1986
[44] Titchmarsh E C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford: Clarendon Press, 1946
[45] Van Dyke M. An album of fluid motion. Stanford (CA): Parabolic Press, 1982
[46] Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1937
[47] Wilmott P, Howison S D, Dewynne J N. The mathematics of financial derivatives: a student introduction. New York: Cambridge University Press, 1995
[48] Zauderer E. Partial differential equations of applied mathematics. 2nd ed. Singapore: Wiley, 1989

索 引

C

K

Q

T

(O−3189.0101)


ISBN 978-7-03-021945-9
9 787030 219459 >

销售分类建议：高等数学

定 价：88.00 元